

Expressions de la somme de deux indéterminées en fonction du produit.

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **14 (1941-1942)**

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14296>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Monsieur Mirimanoff

fête cette année son quatre-vingtième anniversaire. Nous présentons nos félicitations chaleureuses et nos vœux les meilleurs à celui qui a su se créer tant d'amitiés respectueuses parmi ses collègues et a éveillé chez nous plus d'une vocation mathématique par son enseignement incomparable de rigueur et de finesse.

Notre revue, qui lui doit une collaboration très précieuse, est fière de pouvoir publier aujourd'hui un bel article de lui.

LA RÉDACTION

Expressions de la somme de deux indéterminées en fonction du produit

Par D. MIRIMANOFF, Genève

Introduction

Soient $f_1 = \sum x_i$, $f_2 = \sum x_i x_j$, ..., $f_n = x_1 x_2 \dots x_n$ les fonctions symétriques élémentaires de n indéterminées x_1, x_2, \dots, x_n , $f(x)$ le polynôme

$$x^n - f_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n f_n,$$

qui a pour zéros x_1, x_2, \dots, x_n .

Désignons par C l'ensemble des nombres entiers ordinaires, par X ou X_n le domaine d'intégrité $C[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (ensemble de tous les polynômes en x_1, x_2, \dots, x_n à coefficients faisant partie de C) et par F ou F_n le domaine d'intégrité $C[f_1, f_2, \dots, f_n]$ (ensemble de tous les polynômes en f_1, f_2, \dots, f_n à coefficients faisant partie de C).

Soient maintenant φ et ψ deux fonctions du domaine X , invariants caractéristiques d'un même groupe de substitutions. En vertu d'un théorème de Lagrange, chacune d'elles est une fonction rationnelle de l'autre, à coefficients faisant partie de F .

Un cas particulièrement important est celui où l'une d'elles est la somme et l'autre le produit de deux indéterminées x_i, x_j . Pour fixer les idées, je supposerai $i = 1, j = 2$ et je désignerai par p la somme $x_1 + x_2$ et par q le produit $x_1 x_2$,

$$p = x_1 + x_2, \quad q = x_1 x_2.$$

Ces deux fonctions jouent un rôle important dans les démonstrations arithmétiques du théorème fondamental de l'algèbre, dont je crois utile de rappeler les principes.

Soit $f(x) = 0$ une équation particulière sans racines multiples, dont les coefficients font partie d'un corps réel K . On admet que $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle, lorsque son degré n est impair. Pour établir le théorème fondamental, il suffit de montrer que le calcul d'une (ou de plusieurs) racines de $f(x) = 0$, si n est pair, peut être ramené à celui d'une racine d'une équation de degré impair. Soit $n = 2^k(2m + 1)$. Si α_1, α_2 sont deux racines réelles ou imaginaires conjuguées de $f(x) = 0$, dont il s'agit justement de démontrer l'existence, la somme $p = \alpha_1 + \alpha_2$ et le produit $q = \alpha_1\alpha_2$ vérifient des équations du degré $\frac{n(n-1)}{2}$ dont l'ordre de parité est $k - 1$, inférieur d'une unité à celui de n . Si donc l'on suppose que le théorème fondamental soit vrai pour les équations dont le degré est d'un ordre de parité inférieur à k , on pourra, en partant par exemple d'une racine de l'équation en q , calculer la valeur correspondante de $p =$ fonction rationnelle de q (formule de Lagrange), en tirer ensuite α_1 et α_2 et établir ainsi l'existence de ces racines. Mais, comme l'a fait remarquer Gauss, qui le premier a donné une démonstration arithmétique rigoureuse du théorème fondamental, l'expression de p en fonction de q (ou de q en fonction de p) peut devenir illusoire, lorsque l'équation en q (ou en p) a des racines multiples. Pour éviter cet écueil, Gauss a introduit l'invariant caractéristique $q + cp$, que je désignerai par G , et il a montré qu'il est toujours possible de choisir la constante c de telle façon que l'équation en G n'ait pas de racines multiples. En partant alors d'une racine de l'équation en G , on pourra calculer p et q , et finalement α_1, α_2 . Et comme le théorème fondamental est vrai pour un degré impair, il est vrai pour n quelconque (induction complète). Le point essentiel dans cette démonstration arithmétique est donc qu'on a, pour tout c convenablement choisi,

$$K(\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = K(\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)) \quad ^1),$$

c'est-à-dire que $p = \alpha_1 + \alpha_2$ et $q = \alpha_1\alpha_2$ sont fonctions rationnelles de $G = \alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)$, à coefficients faisant partie de K . Et ces fonctions rationnelles s'écrivent exactement de la même manière que dans le cas de n indéterminées x_1, x_2, \dots, x_n ²⁾.

¹⁾ *B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, t. 1, 1930, p. 229.*

²⁾ C'est à *Euler* et à *F. de Foncenex* que l'on doit les premiers principes des démonstrations arithmétiques (cf. *Gauss, Demonstratio nova. Diss., 1799*).

Si maintenant on voulait essayer de former, à l'aide des procédés classiques, les expressions de p (ou q) en fonction de q (ou p) ou bien celles de p et q en fonction de G , soit pour illustrer la méthode arithmétique, soit pour calculer les racines d'une équation donnée, on serait vite découragé par la complication extrême des formules et la longueur des calculs.

La question suivante se pose: existe-t-il, à côté des formules classiques, des expressions plus simples, dans lesquelles le dénominateur est d'un degré moins élevé?

C'est là, évidemment, un problème particulier, mais nous allons voir qu'il comporte une solution précise.

Désignons par Q le domaine d'intégrité $F[q]$ (ensemble de tous les polynômes en q dont les coefficients font partie de F). Je montrerai qu'on peut établir les quatre théorèmes suivants:

Théorème 1. Il existe, pour tout $n \geq 4$, une expression de p en fonction de q sous forme d'un quotient de deux polynômes faisant partie de Q , dans laquelle le dénominateur est du degré $\frac{n(n-3)}{2}$ par rapport à q et du degré $n(n-3)$ par rapport à l'ensemble x_1, x_2, \dots, x_n .

Cette expression sera dite l'expression canonique.

Théorème 2. Dans l'expression canonique, le dénominateur est égal à

$$(x_1 x_2)^{n-3} \prod_{i,j} (x_1 x_2 - x_i x_j) ,$$

le produit \prod , que je désignerai par \prod_n , étant étendu à toutes les combinaisons $x_i x_j$ deux à deux des $n-2$ indéterminées x_3, x_4, \dots, x_n .

Théorème 3. Il existe, pour tout $n \geq 4$, une expression de p en fonction de q , sous forme d'un quotient de deux polynômes de Q , dans laquelle le dénominateur est du degré $(n-2)^2$ par rapport aux x_1, x_2, \dots, x_n .

Cette expression sera dite l'expression réduite.

Théorème 4. Il n'existe pas d'expression de p , sous forme d'un quotient de deux polynômes de Q , dans laquelle le degré du dénominateur par rapport aux x_1, x_2, \dots, x_n soit inférieur à $(n-2)^2$.

Le degré $(n-2)^2$ est donc le degré le plus petit possible.

Nous verrons que les expressions de p et q en fonction de G se déduisent des équations qui fournissent les expressions canoniques de p . Il suffit donc d'envisager le couple p, q .

§ 1. Démonstration du théorème 1

Soit $R_1x - R_2$ le reste de la division du polynôme

$$f(x) = x^n - f_1x^{n-1} + \dots + (-1)^n f_n$$

par $x^2 - px + q$. Ce reste étant identiquement nul, on a les deux relations suivantes :

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0. \quad (1)$$

Or, R_1 et R_2 étant deux polynômes en p et q à coefficients faisant partie de F_n , on pourrait, en appliquant l'algorithme d'Euclide, chercher à calculer le plus grand commun diviseur de R_1 et R_2 , considérés comme des polynômes en p à coefficients appartenant à Q . Ce plus grand commun diviseur fournirait, égalé à 0, l'expression cherchée de p . Mais ce procédé, qui réussit pour $n = 3, 4$ et 5 , n'est pas commode : des facteurs parasites s'introduisent, en effet, au cours des divisions successives et aucune loi ne se dégage de l'ensemble des opérations effectuées. Aussi ai-je préféré suivre une voie différente.

Commençons par faire remarquer qu'on a identiquement

$$R_1 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad R_2 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2}. \quad (2)$$

Posons

$$\alpha_k = \frac{x_1^{k+1} - x_2^{k+1}}{x_1 - x_2} = x_1^k + x_1^{k-1}x_2 + \dots + x_2^k,$$

d'où, en particulier,

$$\alpha_1 = p, \quad \alpha_0 = 1.$$

Les α_k , ainsi définis, sont des polynômes en p et q à coefficients faisant partie de C , et tout polynôme en p et q à coefficients faisant partie de F_n , est une fonction linéaire des α_k à coefficients appartenant au domaine Q , en vertu de la relation

$$p\alpha_{k-1} = \alpha_k + q\alpha_{k-2}; \quad (3)$$

on en tire en effet

$$p^2 = \alpha_2 + q, \quad p^3 = \alpha_3 + 2q\alpha_1 \quad \text{etc.},$$

expressions connues ³⁾.

Or, R_1 et R_2 s'expriment très simplement en fonction des α_i et de q . On a, en effet,

³⁾ Les α_k interviennent dans certains chapitres de la théorie additive des nombres.

$$R_1 = \alpha_{n-1} - f_1 \alpha_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1}, \quad (4)$$

$$R_2 = q(\alpha_{n-2} - f_1 \alpha_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-2} f_{n-2}) + (-1)^{n-1} f_n.$$

A partir de R_1 et R_2 nous construirons une suite de $n - 3$ polynômes R_3, R_4, \dots, R_{n-1} , fonctions linéaires de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$, à coefficients faisant partie de Q .

Ces polynômes seront définis par la relation

$$R_i = -qR_{i-2} + pR_{i-1}. \quad (5)$$

Nous verrons tout à l'heure, qu'en égalant ces polynômes à 0 (en vertu de (1)), on obtient $n - 3$ équations linéaires à $n - 3$ inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$.

Ordonnons les termes des R_i suivant les puissances décroissantes de q . Il est commode alors de distinguer deux groupes de termes, le premier comprenant les termes en q^{i-1} , que nous réunirons en mettant le facteur q^{i-1} en évidence, et l'ensemble des termes de degrés plus petits en q . Il est facile de voir que l'ensemble des termes du premier groupe s'écrit

$$q^{i-1}(\alpha_{n-i} - f_1 \alpha_{n-i-1} + \cdots + (-1)^{n-i} f_{n-i}).$$

Si, en effet, cette propriété est vraie de R_{i-2} et de R_{i-1} , elle sera encore vraie de R_i , puisque les termes du premier groupe de R_i s'obtiennent des premiers groupes de R_{i-2} et R_{i-1} en appliquant la relation (3) que j'écrirai

$$-\alpha_k + p\alpha_{k-1} = q\alpha_{k-2}; \quad (3 \text{ bis})$$

or, la propriété en question est vraie de R_1 et R_2 , elle est donc vraie de tout R_i .

Je ferai remarquer de plus que l'avant-dernier terme du premier groupe de R_{i-2} , multiplié par $-q$, et le dernier terme du premier groupe de R_{i-1} , multiplié par $p = \alpha_1$, tombent (termes semblables et de signes contraires), et que le dernier terme de R_{i-2} , multiplié par $-q$, passe dans le second groupe de R_i .

Ce second groupe est un polynôme du degré $i - 2$ en q qui s'écrit très simplement. Mais nous n'avons pas besoin de connaître sa structure. Je me bornerai seulement à faire remarquer que l'indice max. des α dans le second groupe est égal à $i - 2$ et que α_{i-2} figure dans le terme constant (coefficient de q^0) $(-1)^{n-1} f_n \alpha_{i-2}$, qui est le seul terme de R_i contenant le facteur f_n . En supposant, en effet, que cette propriété soit vraie de

R_{i-2} et R_{i-1} (et elle est vraie de R_1 et R_2), l'ensemble des termes en f_n dans R_i s'écrira

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} f_n (-q\alpha_{i-4} + p\alpha_{i-3}) &= (-1)^{n-1} f_n (-q\alpha_{n-4} + \alpha_{i-2} + q\alpha_{n-4}) \\ &= (-1)^{n-1} f_n \alpha_{i-2}. \end{aligned}$$

Faisons maintenant $i = 3, 4, \dots, n-1$; l'indice max. des α du premier groupe va parcourir alors la suite $n-3, n-4, \dots, 1$ et l'indice max. des α du second groupe, égal à $i-2$, va parcourir la même suite en sens inverse. On voit donc que les $R_i (i \geq 3)$ sont bien des fonctions linéaires de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$.

Ordonnons maintenant les termes des R_i , que nous égalons à 0, suivant les indices décroissants des α et faisons passer les termes connus dans les seconds membres. Les premiers termes des premiers groupes, c'est-à-dire $q^2\alpha_{n-3}, q^3\alpha_{n-4}, \dots$, vont se ranger le long de la diagonale principale, tandis que les termes à indices max. du second groupe, c'est-à-dire les termes $(-1)^{n-1}f_n\alpha_1, (-1)^{n-1}f_n\alpha_2, \dots, (-1)^{n-1}f_n\alpha_{n-3}$ se rangeront le long de la seconde diagonale.

Posons

$$\alpha_i = \frac{N_n(\alpha_i)}{D_n} \quad (6)$$

le dénominateur D_n étant le déterminant dont les éléments sont les coefficients des α , et le numérateur $N_n(\alpha_i)$ le déterminant correspondant qu'on obtient en appliquant la règle de Cramer.

Il résulte alors des propriétés que nous venons d'établir que

$$\begin{aligned} D_n &= q^2 \cdot q^3 \dots q^{n-2} + \dots + (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} f_n^{n-3} \\ &= q^{\frac{n(n-3)}{2}} + \dots + (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} f_n^{n-3}, \end{aligned} \quad (7)$$

et l'on voit que D_n est bien un polynôme du domaine Q , du degré $\frac{n(n-3)}{2}$ par rapport à q et du degré $n(n-3)$ par rapport aux x_1, x_2, \dots, x_n .

Comme $\alpha_1 = p$, on a

$$p = \frac{N_n(\alpha_1)}{D_n} \quad (8)$$

et le théorème 1 est établi.

⁴) $N_n(\alpha_i)$ se lit „numérateur de α_i “.

Pour illustrer la méthode que je viens d'esquisser, envisageons le cas de $n = 7$.

Le tableau des R_i s'écrit

$$\begin{aligned}
R_1 &= \alpha_6 - f_1\alpha_5 + f_2\alpha_4 - f_3\alpha_3 + f_4\alpha_2 - f_5\alpha_1 + f_6, \\
R_2 &= q(\alpha_5 - f_1\alpha_4 + f_2\alpha_3 - f_3\alpha_2 + f_4\alpha_1 - f_5) + f_7, \\
R_3 &= q^2(\alpha_4 - f_1\alpha_3 + f_2\alpha_2 - f_3\alpha_1 + f_4) - f_6q + f_7\alpha_1, \\
R_4 &= q^3(\alpha_3 - f_1\alpha_2 + f_2\alpha_1 - f_3) + f_5q^2 - f_6q\alpha_1 + f_7\alpha_2, \\
R_5 &= q^4(\alpha_2 - f_1\alpha_1 + f_2) - f_4q^3 + f_5q^2\alpha_1 - f_6q\alpha_2 + f_7\alpha_3, \\
R_6 &= q^5(\alpha_1 - f_1) + f_3q^4 - f_4q^3\alpha_1 + f_5q^2\alpha_2 - f_6q\alpha_3 + f_7\alpha_4.
\end{aligned}$$

On voit que la structure des seconds groupes est aussi simple que celle des premiers.

En égalant les R_i ($i = 3, 4, 5, 6$) à 0, on obtient, après avoir fait passer les termes connus dans les seconds membres, le système d'équations canoniques à quatre inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{aligned}
q^2\alpha_4 - f_1q^2\alpha_3 + f_2q^2\alpha_2 + (-f_3q^2 + f_7)\alpha_1 &= -f_4q^2 + f_6q \\
q^3\alpha_3 + (-f_1q^3 + f_7)\alpha_2 + (f_2q^3 - f_6q)\alpha_1 &= f_3q^3 - f_5q^2 \\
f_7\alpha_3 + (q^4 - f_6q)\alpha_2 + (-f_1q^4 + f_5q^2)\alpha_1 &= -f_2q^4 + f_4q^3 \\
f_7\alpha_4 - f_6q\alpha_3 + f_5q^2\alpha_2 + (q^5 - f_4q^3)\alpha_1 &= f_1q^5 - f_3q^4.
\end{aligned}$$

On en tire les expressions canoniques de $\alpha_1 = p, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$. Je crois inutile de les donner ici. Mais au cours de ce travail nous serons amené à calculer les expressions canoniques des α pour $n = 4, 5$ et 6 .

§ 2. Expressions de p et q en fonction de G

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, les expressions de p et q en fonction de G se déduisent des équations canoniques que nous venons de construire. Il suffit, à cet effet, de remplacer les α_i par leurs expressions en fonction de p et q , de substituer à q la fonction $G - cp$ et de réduire, à l'aide des relations $R_1 = 0, R_2 = 0$, les puissances de p supérieures à $n - 3$, pour que le max. des degrés de p dans les équations ainsi transformées ne dépasse pas $n - 3$. On obtiendra ainsi $n - 3$ équations dont les inconnues seront p, p^2, \dots, p^{n-3} . Je me bornerai à envisager le cas de $n = 4$.

Le tableau des R_i s'écrit

$$\begin{aligned}
R_1 &= \alpha_3 - f_1\alpha_2 + f_2\alpha_1 - f_3, \\
R_2 &= q(\alpha_2 - f_1\alpha_1 + f_2) - f_4, \\
R_3 &= q^2(\alpha_1 - f_1) + qf_3 - f_4\alpha_1.
\end{aligned}$$

Le système canonique ne contient qu'une seule équation $R_3 = 0$ qui s'écrit

$$\alpha_1(q^2 - f_4) = f_1 q^2 - f_3 q$$

d'où

$$p = \frac{f_1 q^2 - f_3 q}{q^2 - f_4} . \quad (9)$$

Dans cette expression, certainement connue, le degré du dénominateur est bien égal à $\frac{n(n-3)}{2} = 2$ par rapport à q et à 4 par rapport à l'ensemble des indéterminées x_i . Je rappelle que dans l'expression classique, fournie par le théorème de Lagrange, le degré du dénominateur, qui est le discriminant de q et de ses conjuguées, est égal à 60, tandis que dans une autre expression classique, le degré du dénominateur, qui est la „différente“ de q , est égal à $\frac{n(n-1)}{2} - 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = 5$ par rapport à q et à 10 par rapport aux x_1, x_2, x_3, x_4 .

Si l'on effectue maintenant les transformations dont je viens de parler, on obtient l'expression suivante de p en fonction de G

$$p = \frac{f_1 G^2 - f_3 G + 2c(G^2 - f_2 G + f_4) - c^2(f_1 G - f_3)}{G^2 - f_4 - c f_3 + c^2(2G - f_2) - c^3 f_1} , \quad (10)$$

qui se réduit à (9), pour $c = 0$.

On en tire l'expression de q en fonction de G , puisque

$$q = G - c p .$$

§ 3. Deux propriétés du dénominateur D_n

Dans la démonstration du théorème 2, nous aurons à nous appuyer sur deux propriétés très simples du dénominateur D_n .

Faisons $x_n = 0$; la fonction symétrique f_n va s'évanouir; quant aux f_i dont l'indice i est inférieur à n , elles se transforment en f_i de même indice, mais relatives aux $n - 1$ indéterminées x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Pour éviter la confusion, j'écrirai f_i , l'indice n désignant le nombre des indéterminées correspondantes. Nous pourrions donc écrire

$$f_i(x_n = 0) = f_i , \quad \text{pour } i < n . \quad (11)$$

Que devient alors le tableau des R_i ?

On voit immédiatement que R_2 se transforme en qR_1 , et qu'en général

$$R_i(x_n = 0) = q R_{i-1} \quad (12)$$

On en déduit la première des propriétés de D_n que nous nous proposons d'établir :

Propriété 1. Pour $x_n = 0$, le dénominateur D_n se transforme en $q^{n-2}D_{n-1}$,

$$D_n(x_n = 0) = q^{n-2}D_{n-1} \quad (13)$$

Propriété 2. Le degré max. de chacune des indéterminées x_1, x_2, \dots, x_n dans les coefficients du polynôme D_n est égal à $n - 3$.

La démonstration est immédiate. En effet, les éléments du déterminant D_n sont des fonctions linéaires des f_i ; or, les f_i contiennent chacune des indéterminées à la première puissance et le degré du déterminant est égal à $n - 3$.

Exemples.

Envisageons le cas de $n = 5$. Le tableau des R_i s'écrit

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha_4 - f_1\alpha_3 + f_2\alpha_2 - f_3\alpha_1 + f_4, \\ R_2 &= q(\alpha_3 - f_1\alpha_2 + f_2\alpha_1 - f_3) + f_5, \\ R_3 &= q^2(\alpha_2 - f_1\alpha_1 + f_2) - f_4q + f_5\alpha_1, \\ R_4 &= q^3(\alpha_1 - f_1) + f_3q^2 - f_4q\alpha_1 + f_5\alpha_2. \end{aligned}$$

Le système canonique s'écrit

$$\begin{aligned} q^2\alpha_2 + (-f_1q^2 + f_5)\alpha_1 &= -f_2q^2 + f_4q \\ f_5\alpha_2 + (q^3 - f_4q)\alpha_1 &= f_1q^3 - f_3q^2. \end{aligned}$$

Donc

$$D_5 = \begin{vmatrix} q^2 & -f_1q^2 + f_5 \\ f_5 & q^3 - f_4q \end{vmatrix} = q^5 - f_4q^3 + f_1f_5q^2 - f_5^2, \quad (14)$$

$$N_5(\alpha_1) = \begin{vmatrix} q^2 & -f_2q^2 + f_4q \\ f_5 & f_1q^3 - f_3q^2 \end{vmatrix} = f_1q^5 - f_3q^4 + f_2f_5q^2 - f_4f_5q, \quad (15)$$

$$N_5(\alpha_2) = \begin{vmatrix} -f_2q^2 + f_4q & -f_1q^2 + f_5 \\ f_1q^3 - f_3q^2 & q^3 - f_4q \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$= (f_1^2 - f_2)q^5 - (f_1f_3 - f_4)q^4 + (f_2f_4 - f_1f_5)q^3 - (f_4^2 - f_3f_5)q^2.$$

Pour $x_5 = 0$, D_5 devient $q^3(q^2 - f_4) = q^3 D_4$ et $N_5(\alpha_1)$ se transforme en $q^3(f_1 q^2 - f_3 q) = q^3 N_4(\alpha_1)$ (voir la formule (9)).

Je donnerai encore l'expression de D_6 .

$$D_6 = q^9 - f_4 q^7 + (f_1 f_5 - f_6) q^6 - (f_1^2 f_6 - f_2 f_6) q^5 + (f_4 f_6 - f_5^2) q^4 + \\ + (f_1 f_5 f_6 - f_6^2) q^3 - f_2 f_6^2 q^2 + f_6^3 . \quad (17)$$

Remarque. Si, dans les polynômes D_n , on remplace q et les f_i par leurs expressions en fonction des indéterminées x_1, x_2, \dots, x_n , on obtient les relations suivantes:

$$D_4 = x_1 x_2 (x_1 x_2 - x_3 x_4) , \\ D_5 = (x_1 x_2)^2 (x_1 x_2 - x_3 x_4) (x_1 x_2 - x_3 x_5) (x_1 x_2 - x_4 x_5) , \\ D_6 = (x_1 x_2)^3 (x_1 x_2 - x_3 x_4) (x_1 x_2 - x_3 x_5) (x_1 x_2 - x_3 x_6) (x_1 x_2 - x_4 x_5) \\ (x_1 x_2 - x_4 x_6) (x_1 x_2 - x_5 x_6) .$$

Le théorème 2 est donc vrai pour $n = 4, 5, 6$. Dans le paragraphe suivant nous montrerons qu'il est vrai pour tout $n \geq 4$.

§ 4. Démonstration du théorème 2

Cette démonstration comprendra deux parties:

Première partie. Nous commencerons par montrer que D_n est divisible par $\Pi_n = \prod_{i,j} (x_1 x_2 - x_i x_j)$, le produit étant étendu à toutes les combinaisons i, j deux à deux des indices 3, 4, ..., n .

Partons de la relation

$$p \cdot D_n = N_n(\alpha_1) ,$$

qui devient une identité en x_1, x_2, \dots, x_n , lorsqu'on remplace p et q par $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.

Soit S_n la norme de D_n qu'on obtient en multipliant D_n par tous ses conjugués. Si l'on pose $D_n = P(x_1 x_2)$, les conjugués $P(x_i x_j)$ s'obtiennent de $P(x_1 x_2)$ en appliquant les substitutions $(x_1 x_i) (x_2 x_j)$.

$S_n = \prod_{i,j} P(x_i x_j)$ est donc une fonction symétrique faisant partie de F_n .

Par conséquent on a

$$(x_1 + x_2) S_n = \mathfrak{P}(x_1 x_2) , \quad (18)$$

\mathfrak{P} étant un polynôme en $x_1 x_2$, à coefficients faisant partie de F_n .

Appliquons aux deux membres de (18) la substitution $(x_1 x_3) (x_2 x_4)$. La différence $\mathfrak{P}(x_1 x_2) - \mathfrak{P}(x_3 x_4)$ étant divisible par $(x_1 x_2 - x_3 x_4)$, il vient

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) S_n = (x_1 x_2 - x_3 x_4) \varphi ,$$

le quotient φ faisant partie de X_n .

Le facteur $x_1 x_2 - x_3 x_4$ divise donc S_n et par conséquent l'un au moins des polynômes $P(x_i x_j)$.

Je dis qu'il divise $P(x_1 x_2)$ (et par conséquent $P(x_3 x_4)$).

Supposons le contraire et soit $P(x_i x_j)$ le polynôme divisible par $x_1 x_2 - x_3 x_4$. Il suffit d'envisager les trois cas suivants:

- 1) $i = 1, j = 3$,
- 2) $i = 1, j > 4$, par exemple $j = 5$, pour fixer les idées,
- 3) i et $j > 4$.

Dans le premier cas $P(x_i x_j)$ est divisible par tous les binômes qu'on obtient de $x_1 x_2 - x_3 x_4$ en appliquant les substitutions du groupe symétrique des $n - 2$ indéterminés $x_2, x_4, x_5, \dots, x_n$.

Le nombre total des diviseurs de $P(x_i x_j)$ est donc dans ce cas $= (n - 2)(n - 3)$. Or, le degré $2(n - 2)(n - 3)$ du produit de ces binômes étant supérieur, pour $n > 4$, à celui de $P(x_i x_j)$, égal à $n(n - 3)$, on aboutit à un résultat absurde.

Dans le second cas, le nombre des binômes divisant $P(x_i x_j)$ est $(n - 2)(n - 3)(n - 4)$; le degré du produit des binômes $= 2(n - 2)(n - 3)(n - 4)$, supérieur à $n(n - 3)$, pour $n > 4$, résultat absurde.

Dans le troisième cas, le nombre des binômes divisant $P(x_i x_j)$ est $\frac{(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)}{8}$ et le degré du produit est supérieur

à $n(n - 3)$ pour $n > 6$. Donc D_n est divisible par $x_1 x_2 - x_3 x_4$ et par conséquent par le produit Π_n , et l'on voit que la propriété en question est vraie pour tout $n \geq 4$, puisqu'elle est vraie pour $n = 4, 5$ et 6 .

Deuxième partie. Posons

$$D_n = \Phi \cdot \Pi_n . \tag{19}$$

Nous venons de voir que Φ fait partie de X_n . Il reste à montrer que

$$\Phi = (x_1 x_2)^{n-3} .$$

Or, supposons que le théorème 2 soit vrai pour D_{n-1} , donc $D_{n-1} = (x_1 x_2)^{n-4} \Pi_{n-1}$, et faisons $x_n = 0$ dans (19).

Comme

$$D_n \underset{(x_n=0)}{=} \Phi \underset{(x_n=0)}{\cdot} (x_1 x_2)^{n-3} \Pi_{n-1} = \Phi \underset{(x_n=0)}{\cdot} x_1 x_2 D_{n-1}$$

et qu'en vertu de (13)

$$D_n \underset{(x_n=0)}{=} (x_1 x_2)^{n-2} D_{n-1}$$

il vient

$$\Phi \underset{(x_n=0)}{=} (x_1 x_2)^{n-3} .$$

Donc $\Phi = (x_1 x_2)^{n-3} + x_n \cdot \varphi$, φ faisant partie de X_n .

Soit $c_n x_n^k$ le terme de degré max. en x_n dans $x_n \varphi$. Si $c_n \neq 0$, D_n va contenir des termes en x_n^{n-3+k} , puisque le dernier terme de $\Pi_n = (x_3 x_4 \dots x_n)^{n-3}$ (abstraction faite du signe). Or, l'ensemble des termes en x_n^{n-3} dans Π_n s'écrit $(x_3 \dots x_n)^{n-3} + \gamma$, γ s'annulant avec $x_1 x_2$.

Mais, en vertu de la propriété 2 du § 3,

$$c_n x_n^k \{ (x_3 x_4 \dots x_n)^{n-3} + \gamma \} = 0 .$$

Si donc $c_n \neq 0$,

$$(x_3 \dots x_n)^{n-3} + \gamma = 0$$

identiquement. Or, pour $x_1 = 0$, γ s'annule et par conséquent $(x_3 \dots x_n)^{n-3} = 0$, conclusion absurde.

On a donc bien $c_n = 0$, $\Phi = (x_1 x_2)^{n-3}$, et le théorème 2 est établi.

§ 5. Propriétés principales des $N_n(\alpha_i)$

A. Nous avons vu que $N_n(\alpha_i)$ est un polynôme faisant partie du domaine Q , pour $i = 1, 2, \dots, n - 3$. Pour $i = 0$, $\alpha_0 = 1$, le polynôme N_n se confond avec D_n ,

$$N_n(\alpha_0) = D_n .$$

Si pour $i > n - 3$, on entend par $N_n(\alpha_i)$ le produit $\alpha_i D_n$, on aura, en vertu de (3), pour tout $n > 0$, la relation suivante

$$p N_n(\alpha_i) = N_n(\alpha_{i+1}) + q N_n(\alpha_{i-1}) , \quad (20)$$

qui se réduit à

$$p N_n(\alpha_0) = N_n(\alpha_1) , \quad (21)$$

pour $i = 0$. De plus, en vertu du théorème 2,

$$N_n(\alpha_i) = \alpha_i D_n = q^{n-3} \alpha_i \Pi_n . \quad (22)$$

Je ferai remarquer encore que $N_n(\alpha_{n-2})$ n'est plus un polynôme du domaine Q . En effet, en vertu de la relation $R_2 = 0$ on a en multipliant par D_n ,

$$q\{N_n(\alpha_{n-2}) - f_1(N_n(\alpha_{n-3}) + \dots + (-1)^{n-2}f_{n-2}D_n\} = (-1)^n f_n D_n .$$

Si donc $N_n(\alpha_{n-2})$ était un polynôme du domaine Q , $f_n D_n$ serait divisible par q et le quotient serait aussi un polynôme de Q , conclusion absurde, puisque le dernier terme de $f_n D_n$ est, abstraction faite du signe, f_n^{n-2} . Cette propriété nous sera utile dans la dernière partie de notre travail.

B. Nous pouvons maintenant généraliser la formule (13). Il suffit à cet effet, de faire $x_n = 0$ dans la formule (22), ce qui donne

$$N_n(\alpha_i) \underset{(x_n=0)}{=} \alpha_i \underset{(x_n=0)}{D_n} = \alpha_i q^{n-2} D_{n-1} = q^{n-2} N_{n-1}(\alpha_i) , \quad (23)$$

qu'on pourrait du reste déduire directement du tableau des équations canoniques.

La formule (23) donne l'expression des premiers termes de $N_n(\alpha_i)$, lorsqu'on connaît les premiers termes de $N_{n-1}(\alpha_i)$.

Il en résulte, par exemple, que les deux premiers termes de $N_n(\alpha_1)$ s'écrivent toujours

$$f_1 q^{\frac{n(n-3)}{2}} - f_3 q^{\frac{n(n-3)}{2} - 1} ,$$

puisque

$$N_4(\alpha_1) = f_1 q^2 - f_3 q .$$

Ce procédé s'applique à tous les premiers termes de $N_n(\alpha_i)$ dont les coefficients ont un degré inférieur à n .

C. Dans la formule (22) remplaçons $x_k (k = 1, 2, \dots, n)$ par $\frac{1}{x_k}$. En désignant par φ^* ce que devient alors une fonction φ de X_n , on aura

$$q^* = \frac{1}{q} ; \quad f_i^* = \frac{f_{n-i}}{f_n} ; \quad \alpha_i^* = \frac{\alpha_i}{q^i} ;$$

$$\Pi_n^* = (-1)^m \frac{\Pi_n}{f_n^{n-3} q^{m-n+3}} , \quad (24)$$

en posant

$$m = \frac{(n-2)(n-3)}{2} , \quad \text{d'où} \quad m - n + 3 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} .$$

Par conséquent

$$N_n(\alpha_i) = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} f_n^{n-3} q^{\frac{n(n-3)}{2} + i} N_n^*(\alpha_i). \quad (25)$$

En particulier

$$D_n = N_n(\alpha_0) = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} f_n^{n-3} q^{\frac{n(n-3)}{2}} D_n^*. \quad (26)$$

Le second membre de ces formules reproduit le polynôme $N_n(\alpha_i)$, mais les termes se présentent dans l'ordre inverse: le premier terme de $N_n(\alpha_i)$ fournit le dernier, le second l'avant-dernier, etc., ce qui permet de calculer les derniers termes à partir des premiers.

Application. Nous avons vu que les premiers termes de $N_n(\alpha_1)$ s'écrivent

$$f_1 q^{\frac{n(n-3)}{2}} - f_3 q^{\frac{n(n-3)}{2} - 1}.$$

Il résulte alors de la formule (25) que les deux derniers termes s'écrivent

$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} (-f_{n-3} f_n^{n-4} q^2 + f_{n-1} f_n^{n-4} q).$$

D. *Théorème.* Pour tout $i \leq n - 3$, le degré de $N_n(\alpha_i)$ par rapport à q est égal à $\frac{n(n-3)}{2}$.

Démonstration. Supposons que cette propriété soit vraie pour les polynômes $N_{n-1}(\alpha_i)$ à $n - 1$ indéterminées ($i \leq n - 4$). Je dis qu'elle sera vraie pour $N_n(\alpha_i)$.

Envisageons d'abord les polynômes $N_n(\alpha_i)$ et $N_{n-1}(\alpha_i)$ de même indice $i \leq n - 4$. Comme, en vertu de (22), le degré total de $N_{n-1}(\alpha_i)$ par rapport à l'ensemble des indéterminées x_1, x_2, \dots, x_{n-1} est égal à $i + (n - 1)(n - 4)$, le coefficient du premier terme de $N_{n-1}(\alpha_i)$ est une fonction symétrique dont le degré, en vertu de notre hypothèse, est égal à i . Or i étant inférieur à n , le coefficient c_i du premier terme de $N_n(\alpha_i)$ s'obtient, en vertu de (23) (propriété B), de celui de $N_{n-1}(\alpha_i)$ en remplaçant les f_i par f_i . Par conséquent son degré est aussi égal à i et le premier terme de $N_n(\alpha_i)$ s'écrit

$$c_i q^{\frac{n(n-3)}{2}}.$$

Notre théorème est donc établi pour $i \leq n - 4$. Il reste à l'établir pour $i = n - 3$.

Partons, à cet effet, de l'équation $R_3 = 0$ qui, multipliée par D_n et divisée par q^2 , s'écrit

$$N_n(\alpha_{n-3}) - f_1 N_n(\alpha_{n-4}) + f_2 N_n(\alpha_{n-5}) - \dots + (-1)^{n-4} f_{n-4} N_n(\alpha_1) + (-1)^{n-3} f_{n-3} D_n + P = 0,$$

en posant

$$P = (-1)^{n-1} \frac{f_n N_n(\alpha_1) - f_{n-1} q D_n}{q^2}. \quad (27)$$

Il résulte des expressions des derniers termes de D_n et de $N_n(\alpha_1)$ (égal. (7) et propriété C) que le numérateur de ce quotient est divisible par q^2 et que P est un polynôme en q du degré $\frac{n(n-3)}{2} - 2$ faisant partie du domaine Q .

Le premier membre de (27) est donc un polynôme du domaine Q dont le degré par rapport à q est en tout cas inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$, puisque son degré par rapport aux x_1, x_2, \dots, x_n est, en vertu de (22), égal à $(n+1)(n-3) < n(n-1)$.

Comme la fonction q vérifie une équation dont le degré est $\frac{n(n-1)}{2}$, les coefficients de tous les termes du polynôme, après la réduction des termes semblables, doivent être nuls. Il en résulte que le degré du premier terme de $N_n(\alpha_{n-3})$ par rapport à q ne saurait être supérieur à $\frac{n(n-3)}{2}$, puisque les degrés de tous les termes qui suivent sont $\leq \frac{n(n-3)}{2}$. Mais ce degré n'est pas non plus inférieur à $\frac{n(n-3)}{2}$, puisque les équations canoniques fournissent pour $N_n(\alpha_{n-3})$, à côté d'autres produits du degré $\frac{n(n-3)}{2}$, le produit $\pm f_{n-3} q^{\frac{n(n-3)}{2}}$, qui ne saurait tomber, après la réduction des termes semblables. Donc le degré du premier terme de $N_n(\alpha_{n-3})$ est bien $\frac{n(n-3)}{2}$, si la propriété D est vraie pour N_{n-1} . Or, elle est vraie pour N_4 , elle est donc vraie pour tout n et le théorème D est établi.

E. *Théorème.* Pour tout $i \leq n-3$, le polynôme $N_n(\alpha_i)$ est divisible par q^i , dans le domaine Q .

En effet, en vertu de la relation (25) (propriété C) le dernier terme du polynôme $N_n(\alpha_i)$ s'écrit

$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n-3)}{2} + i} f_n^{n-3} c_i^* q^{\frac{-n(n-3)}{2}} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} f_n^{n-3} q^i c_i^* .$$

Or, le degré de c_i étant égal à i , la puissance de f_n qui figure au dénominateur de c_i^* n'est pas supérieure à f_n^i (nous verrons plus loin qu'elle est égale à f_n^i).

Donc $f_n^{n-3} c_i^*$ fait partie de F_n , et l'on voit que $N_n(\alpha_i)$ est bien divisible par q^i . De plus, le coefficient du dernier terme, que je désignerai par d_i , est

$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} f_n^{n-3} c_i^* .$$

Cette propriété nous sera très utile.

F. Structure des coefficients du premier et du dernier terme de $N_n(\alpha_i)$.

Les propriétés que nous venons d'établir permettent de calculer les coefficients c_i et d_i du premier et du dernier terme de $N_n(\alpha_i)$. En effet, en vertu de (27), on a la relation suivante

$$c_{n-3} - f_1 c_{n-4} + f_2 c_{n-5} - \dots + (-1)^{n-4} f_{n-4} c_1 = (-1)^{n-2} f_{n-3} . \quad (28)$$

Soient maintenant $c'_{n-4}, c'_{n-5}, \dots$ les coefficients des premiers termes de $N_{n-1}(\alpha_{n-4}), N_{n-1}(\alpha_{n-5}), \dots$; f_1, f_2, \dots, f_{n-1} les fonctions symétriques

élémentaires des $n-1$ indéterminées x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . On aura de même la relation

$$c'_{n-4} - \underset{(n-1)}{f_1} c'_{n-5} + \dots + (-1)^{n-5} \underset{(n-1)}{f_{n-5}} c'_1 = (-1)^{n-3} \underset{(n-1)}{f_{n-4}} . \quad (29)$$

Cette relation étant une identité en f_1, f_2, \dots , elle a encore lieu si l'on remplace les f_i par les f_i ⁵⁾. Mais alors les c'_i se transforment en c_i , puisque les c_i s'expriment de la même manière en fonction des f que les c'_i en fonction des f_i , et l'on aura

$$c_{n-4} - f_1 c_{n-5} + \dots + (-1)^{n-5} f_{n-5} c_1 = (-1)^{n-3} f_{n-4} .$$

⁵⁾ Ce raisonnement est analogue à celui dont se sert Gauss dans sa deuxième démonstration du théorème fondamental, lorsqu'il remplace les f_i par des indéterminées et ces dernières par les coefficients de l'équation donnée.

En appliquant le même raisonnement aux N_{n-2} , on aura une relation analogue entre c_{n-5}, \dots, c_1 , etc.

On obtiendra ainsi un système de $n - 3$ équations linéaires entre $n - 3$ inconnues $c_{n-3}, c_{n-4}, \dots, c_1$, qui s'écrit

$$\begin{aligned}
 c_{n-3} - f_1 c_{n-4} + f_2 c_{n-5} - \dots + (-1)^{n-4} f_{n-4} c_1 &= (-1)^{n-2} f_{n-3} \\
 c_{n-4} - f_1 c_{n-5} + \dots + (-1)^{n-5} f_{n-5} c_1 &= (-1)^{n-3} f_{n-4} \\
 \dots & \\
 c_2 - f_1 c_1 &= -f_2 \\
 c_1 &= f_1 .
 \end{aligned} \tag{30}$$

On en tire

$$c_i = \begin{vmatrix} f_1 & -f_2 & \dots & (-1)^{i-1} f_i \\ -1 & f_1 & \dots & (-1)^{i-2} f_{i-1} \\ 0 & -1 & \dots & (-1)^{i-3} f_{i-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & f_1 \end{vmatrix}$$

d'où

$$c_1 = f_1 ; c_2 = f_1^2 - f_2 ; c_3 = f_1^3 - 2f_1 f_2 + f_3 \text{ etc.}$$

En général

$$c_i = f_1^i + \varepsilon . \tag{31}$$

ε étant un ensemble de termes dans lesquels figurent aussi des facteurs f_k à indice $k > 1$. Par conséquent f_1^i est le seul terme dont le degré par rapport aux f_1, f_2, \dots soit égal à i .

Quelles sont maintenant les propriétés correspondantes du coefficient d_i du dernier terme de $N_n(\alpha_i)$?

Nous avons vu (propriété E) que

$$d_i = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} f_n^{n-3} c_i^* .$$

Mais, en vertu de (31).

$$c_i^* = \frac{f_{n-1}^i}{f_n^i} + \varepsilon^* ,$$

et le dénominateur de ε^* est une puissance de f_n égale à f_n^k , l'exposant k étant inférieur à i .

Par conséquent

$$d_i = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} (f_{n-1}^i \cdot f_n^{n-3-i} + f_n^{n-2-i} S) , \tag{32}$$

S étant une fonction symétrique faisant partie de F_n .

En particulier

$$d_{n-3} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} (f_{n-1}^{n-3} + f_n S) .$$

C'est sur cette dernière propriété que repose notre démonstration du théorème 4.

§ 6. Démonstration du théorème 3

Multiplions $N_n(\alpha_i)$ par p .

Pour $i = 0$, on a, en vertu de (21),

$$pN_n(\alpha_0) = N_n(\alpha_1)$$

et comme $N_n(\alpha_0) = D_n$, il vient

$$p = \frac{N_n(\alpha_1)}{D_n}$$

et l'on retrouve l'expression canonique de p .

Mais, pour $i = 1, 2, \dots, n - 4$,

$$p \cdot N_n(\alpha_i) = N_n(\alpha_{i+1}) + qN_n(\alpha_{i-1}) , \quad (20)$$

d'où

$$p = \frac{N_n(\alpha_{i+1}) + qN_n(\alpha_{i-1})}{N_n(\alpha_i)} . \quad (33)$$

Or, en vertu de la propriété E , le numérateur et le dénominateur sont divisibles par q^i . Après la suppression de ce facteur, on obtient une expression nouvelle pour p , dans laquelle le degré du dénominateur est $n(n - 3) - i < n(n - 3)$. Le minimum est atteint pour $i = n - 4$. Le degré du dénominateur est alors

$$n(n - 3) - (n - 4) = (n - 2)^2$$

et le théorème 3 est démontré.

Envisageons, par exemple, le cas de $n = 5$. L'expression réduite s'obtient de

$$p = \frac{N_5(\alpha_2) + qN_5(\alpha_0)}{N_5(\alpha_1)}$$

en divisant haut et bas par q .

En remplaçant les $N_5(\alpha_i)$ par leurs expressions (14), (15) et (16), on obtient

$$p = \frac{q^5 + (f_1^2 - f_2) q^4 - f_1 f_3 q^3 + f_2 f_4 q^2 + (f_3 f_5 - f_4^2) q - f_5^2}{f_1 q^4 - f_3 q^3 + f_2 f_5 q - f_4 f_5}.$$

Mais alors la question suivante se pose :

Existe-t-il des expressions de p en fonction de q , dans lesquelles le degré du dénominateur est inférieur à $(n - 2)^2$, par rapport aux indéterminées x_1, x_2, \dots, x_n ?

La réponse est négative, comme nous allons le montrer dans la dernière partie de notre travail.

§ 7. Démonstration du théorème 4

Le raisonnement dont nous sommes servi (§ 4) pour démontrer que D_n peut toujours être mis sous la forme

$$\Phi \cdot \Pi_n,$$

Φ étant une fonction de X_n , s'applique encore à tout polynôme en q du domaine Q dont le degré en x_1, x_2, \dots, x_n ne dépasse pas $n(n - 3)$ et dont le produit par $p = x_1 + x_2$ est un polynôme faisant également partie de Q .

Supposons donc qu'il existe une expression de p dans laquelle le dénominateur soit d'un degré inférieur à $(n - 2)^2$. En vertu de notre remarque il serait de la forme

$$\Phi \cdot \Pi_n,$$

Φ étant une fonction de X_n d'un degré inférieur à $n - 2$.

Comme $\Phi \cdot \Pi_n$ et Π_n sont des fonctions symétriques de x_1, x_2 et des x_3, x_4, \dots, x_n , il en est de même de Φ ; par conséquent Φ est un polynôme en p et q dont les coefficients sont des fonctions symétriques entières et à coefficients entiers des $n - 2$ indéterminées x_3, x_4, \dots, x_n . Mais toute fonction symétrique de cette espèce est un polynôme en p et q à coefficients appartenant à F_n .

Or, les puissances de p sont des fonctions linéaires des α_i à coefficients appartenant à Q . On peut donc toujours mettre Φ sous la forme d'une fonction linéaire des α_i à coefficients faisant partie de Q .

Soient $s_m, s_m^{(1)}, s_m^{(2)}, \dots$ des fonctions symétriques du domaine F_n dont le degré ne dépasse pas m .

En vertu de notre hypothèse, Φ est une somme de termes de la forme $s_m^{(k)} q^k \alpha_i$, les indices k, i, m vérifiant les relations $2k + i \leq n - 3$, $m \leq n - 3 - 2k - i$.

Groupons ensemble les termes dans lesquels les indices k, i ont même somme $k + i$. On aura $n - 2$ groupes $g_{n-3}, g_{n-4}, \dots, g_1, g_0$, les valeurs correspondantes de $k + i$ étant $n - 3, n - 4, \dots, 1, 0$.

Ces groupes s'écriront

$$\begin{aligned} g_{n-3} &= s_0 \alpha_{n-3} , \\ g_{n-4} &= s_1 \alpha_{n-4} + s_0^{(1)} q \alpha_{n-5} , \\ g_{n-5} &= s_2 \alpha_{n-5} + s_1^{(1)} q \alpha_{n-6} + s_0^{(2)} q^2 \alpha_{n-7} , \\ &\dots\dots\dots \\ g_1 &= s_{n-4} \alpha_1 + s_{n-5}^{(n)} q \\ g_0 &= s_{n-3} , \end{aligned}$$

et l'on aura

$$\Phi = g_{n-3} + g_{n-4} + \dots + g_0 . \tag{34}$$

Je dis que tous les g_k sont nuls. La démonstration comprendra trois parties: dans la première je montrerai que $g_{n-3} = 0$, dans la seconde que $g_0 = 0$, dans la troisième que $g_k = 0$, quel que soit k .

1) En vertu de nos hypothèses $\Phi \cdot \Pi_n$ est un polynôme $P(q)$ faisant partie de Q , de même que le numérateur $p \cdot \Phi \cdot \Pi_n = p \cdot P(q)$.

Multiplions $P(q)$ par q^{n-3} . Le produit est un polynôme du domaine Q divisible par q^{n-3} .

Or

$$\begin{aligned} q^{n-3}P(q) &= s_0 N_n(\alpha_{n-3}) + (s_1 N_n(\alpha_{n-4}) + s_0^{(1)} q N_n(\alpha_{n-5})) \\ &\quad + \dots + (s_{n-4} N_n(\alpha_1) + s_{n-5}^{(1)} q D_n) + s_{n-3} D_n \\ &= P_{n-3} + P_{n-4} + \dots + P_0 , \end{aligned} \tag{35}$$

en posant

$$P_k = g_k q^{n-3} \Pi_n . \tag{36}$$

Or, le produit de $q^{n-3}P(q)$ par p étant encore un polynôme du domaine Q , il en résulte que

$$s_0 N(\alpha_{n-2}) + s_0 q N(\alpha_{n-4}) + \dots \text{ } ^6 \tag{37}$$

est un polynôme de Q , conclusion absurde, si $s_0 \neq 0$, le premier terme

⁶) En vertu de (20), $pN_n(\alpha_{n-3}) = N_n(\alpha_{n-2}) + qN_n(\alpha_{n-4})$.

$s_0 N(\alpha_{n-2})$ n'étant pas un polynôme en q (§ 5, A), tandis que tous les autres le sont.

Donc $s_0 = 0$ et par conséquent $g_{n-3} = 0$, $P_{n-3} = 0$.

2) Il en résulte que

$$P_{n-4} + P_{n-5} + \cdots + P_0$$

est un polynôme de Q divisible par q^{n-3} .

Or, les polynômes $N_n(\alpha_i)$ d'indices $i > 0$ (et $< n - 2$) étant tous divisibles par q , il devrait en être de même du polynôme P_0 . Mais le polynôme P_0 est égal à $s_{n-3} D_n$ et D_n n'est pas divisible par q . Donc $s_{n-3} = 0$ et par conséquent $g_0 = 0$, $P_0 = 0$.

3) Je dis maintenant que P_{n-3-i} est nul, si les polynômes P_k d'indices $k < n - 3 - i$ sont nuls.

Commençons par faire remarquer que les polynômes P_k sont divisibles par q^k , en vertu du théorème du § 5, E, en particulier le polynôme

$$P_{n-3-i} = s_i N_n(\alpha_{n-3-i}) + s_{i-1}^{(1)} q N_n(\alpha_{n-4-i}) + \cdots$$

est divisible par q^{n-3-i} .

Or, la somme

$$P_{n-4} + P_{n-5} + \cdots + P_{n-3-i}$$

étant divisible par q^{n-3} et

$$P_{n-4} + P_{n-5} + \cdots + P_{n-2-i}$$

par q^{n-2-i} , il en résulte qu'en vertu de nos hypothèses, P_{n-3-i} est divisible par q^{n-2-i} . Donc le quotient

$$\frac{P_{n-3-i}}{q^{n-3-i}}$$

est divisible par q et par conséquent le dernier terme (terme en q^0) de ce quotient, qui s'écrit

$$s_i d_{n-3-i} + s_{i-1}^{(1)} d_{n-4-i} + s_{i-2}^{(2)} d_{n-5-i} + \cdots,$$

est identiquement nul.

Or,

$$d_{n-3-i} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} (f_{n-1}^{n-3-i} f_n^i + f_n^{i+1} S^{(1)}) , \quad (38)$$

$$d_{n-4-i} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} (f_{n-1}^{n-4-i} f_n^{i+1} + f_n^{i+2} S^{(2)}) , \text{ etc.}$$

$S^{(1)}$, $S^{(2)}$, etc. étant des fonctions symétriques du domaine F_n (§ 5, F).

Convenons maintenant de dire que l'ordre d'un produit des f_i est inférieur à celui d'un autre produit des f_i , si le facteur f_n y figure à une puissance plus petite. Il résulte alors des expressions (38) que l'ordre du premier terme $\pm f_{n-1}^{n-3-i} f_n^i$ de d_{n-3-i} est inférieur à ceux de tous les autres termes des d_k dont les indices sont $\leq n - 3 - i$. Comme le degré de s_i est inférieur à n , aucun de ces termes n'est semblable à $s_i f_{n-1}^{n-3-i} f_n^i$. Par conséquent $s_i f_{n-1}^{n-3-i} f_n^i$ ne sera pas supprimé, si $s_i \neq 0$, après la réduction des termes semblables. Il en résulte que $s_i = 0$.

Pour la même raison $s_{i-1}^{(1)}$, $s_{i-2}^{(2)}$, ... sont nuls. Donc

$$g_{n-3-i} = 0 \quad , \quad P_{n-3-i} = 0 \quad , \quad \text{si les } P_k \text{ d'indices } k < n - 3 - i$$

sont nuls. Et comme $P_0 = 0$, tous les P_k et tous les g_k sont aussi nuls. Le théorème 4 est donc démontré.

Remarque. La même méthode permet de montrer qu'abstraction faite d'un facteur faisant partie de C , il n'existe qu'une seule expression réduite dans laquelle le dénominateur est du degré $(n - 2)^2$ par rapport aux x_1, x_2, \dots, x_n (unicité de l'expression réduite).

Je tiens, en terminant, à adresser mes remerciements affectueux à Monsieur G. de Rahm pour les renseignements précieux qu'il m'a donnés au cours de ce travail.

(Reçu le 25 avril 1941.)