

# Expression du produit de deux indéterminées en fonction de la somme.

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **15 (1942-1943)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14879>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Expression du produit de deux indéterminées en fonction de la somme

PAR D. MIRIMANOFF, Genève

## Introduction

Nous avons fait connaître récemment<sup>1)</sup> un procédé permettant de former les expressions les plus simples de la somme  $p = x_1 + x_2$  en fonction du produit  $q = x_1 x_2$ , ainsi que celles de  $p$  et  $q$  en fonction de  $G = q + cp$ ,  $c$  étant une constante. Nous nous occuperons maintenant des problèmes inverses (expressions de  $q$  en fonction de  $p$  et expressions de  $G$  en fonction de  $p$  et en fonction de  $q$ ). Pour les résoudre, il suffit de savoir former, outre les expressions déjà indiquées, celles de  $q$  en fonction de  $p$  (premier problème inverse). En remplaçant, en effet, dans  $G = q + cp$ , le produit  $q$  par ces expressions, on en tire celles de  $G$  en fonction de  $p$ . On en tire de même celles de  $G$  en fonction de  $q$ , en remplaçant  $p$  par les expressions indiquées dans mon premier article. Nous pouvons donc nous borner à la recherche des expressions les plus simples de  $q$  en fonction de  $p$ . Nous ferons voir qu'on peut obtenir la solution de ce problème en partant soit des polynômes  $R_i$  (première méthode), soit de l'expression de  $q$  en fonction de  $G$  (deuxième méthode).

Chose curieuse: tandis que l'expression réduite de  $p$  en fonction de  $q$  n'avait été obtenue, dans mon premier article, que par l'intermédiaire de certaines expressions moins simples (expressions canoniques), nous verrons que chacune de nos méthodes fournit directement la solution réduite, c'est-à-dire l'expression la plus simple de  $q$  en fonction de  $p$ .

Désignons par  $\mathfrak{P}$  le domaine d'intégrité  $F[p]$  (ensemble de tous les polynômes en  $p$  dont les coefficients font partie de  $F$ ). Je montrerai qu'on peut établir les trois théorèmes suivants:

*Théorème 1.* Il existe, pour tout  $n \geq 3$ , une expression de  $q$  en fonction de  $p$ , sous forme d'un quotient de deux polynômes  $\mathfrak{N}_n$  et  $\mathfrak{D}_n$  faisant partie de  $\mathfrak{P}$ , dans laquelle le dénominateur  $\mathfrak{D}_n$  est du degré  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  par rapport à  $p$  et par rapport à l'ensemble  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

*Théorème 2.* Dans cette expression, le dénominateur  $\mathfrak{D}_n$  est égal, pour  $n \geq 4$ , à

$$\prod_{i,j} (x_1 + x_2 - x_i - x_j) ,$$

---

<sup>1)</sup> C. M. H., t. 14, p. 1 et 310.

le produit  $\Pi$  étant étendu à toutes les combinaisons  $x_i, x_j$  deux à deux des  $n - 2$  indéterminées  $x_3, x_4, \dots, x_n$ .

*Théorème 3.* Il n'existe pas d'expression de  $q$  en fonction de  $p$ , sous forme d'un quotient de deux polynômes de  $\mathfrak{B}$ , dans laquelle le degré du dénominateur par rapport aux  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soit inférieur à  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ .

Le degré  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  est donc le plus petit possible.

### Première méthode

#### § 1. Structure des polynômes $R_i$ .

Au lieu de former les polynômes  $R_i$ , pour  $i > 2$ , à partir de  $R_1$  et  $R_2$ , à l'aide de la relation de récurrence

$$R_i = -qR_{i-2} + pR_{i-1} \quad (1)$$

il est plus simple de les définir directement par la formule

$$R_i = \left( \frac{f(x_1)}{x_1^{i-1}} - \frac{f(x_2)}{x_2^{i-1}} \right) \times \frac{q^{i-1}}{x_1 - x_2}, \quad (2)$$

que je regrette de n'avoir pas indiquée dans mon premier article. Les deux définitions sont équivalentes. Pour le voir, il suffit de montrer que l'expression (2) coïncide avec celle du § 1 de l'article cité pour  $i = 1$  et  $i = 2$  et que les  $R_i$  définis par (2) vérifient la relation (1).

On déduit de (2) l'expression suivante de  $R_i$

$$R_i = q^{i-1} (\alpha_{n-i} - f_1 \alpha_{n-i-1} + \dots + (-1)^{n-i} f_{n-i}) + (-1)^{n-i+1} f_{n-i+2} q^{i-2} + (-1)^{n-i+2} f_{n-i+3} q^{i-3} \alpha_1 + \dots + (-1)^{n-1} f_n \alpha_{i-2} \quad (3)$$

qui nous sera très utile.

#### § 2. Expression des polynômes $\alpha_i$ en fonction de $p$ et $q$ .

Pour tout  $i \geq 1$ ,  $\alpha_i$  est un polynôme en  $p$  et  $q$  dont le degré par rapport à  $p$  est égal à  $i$ , mais dont le degré par rapport à  $q$  est  $E\left(\frac{i}{2}\right)^2$ .

---

<sup>2)</sup>  $E(x)$ , pour  $x \geq 0$ , est la partie entière de  $x$  (Legendre).

On a, quel que soit  $i \geq 1$ ,

$$\alpha_i = \gamma_0^{(i)} p^i - \gamma_1^{(i)} p^{i-2} q + \gamma_2^{(i)} p^{i-4} q^2 - \dots \quad (4)$$

les coefficients  $\gamma_0^{(i)} = 1, \gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}, \dots$  étant les nombres du triangle arithmétique de Pascal d'ordre  $i$  rangés le long de la bissectrice de l'angle droit. On a, en effet,

$$\gamma_k^{(i)} = \binom{i-k}{k} . \quad (5)$$

Pour le voir, il suffit de montrer que la formule (5) est vraie pour  $i$ , si elle est vraie pour  $i-1$  et  $i-2$ . J'ometts la démonstration, qui est élémentaire.

Voici les expressions des  $\alpha_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, 6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p; \quad \alpha_2 = p^2 - q; \quad \alpha_3 = p^3 - 2pq; \quad \alpha_4 = p^4 - 3p^2q + q^2; \\ \alpha_5 &= p^5 - 4p^3q + 3pq^2; \quad \alpha_6 = p^6 - 5p^4q + 6p^2q^2 - q^3 \text{ } ^3) . \end{aligned} \quad (6)$$

### § 3. Choix des inconnues et indication de la méthode.

Soit d'abord  $n = 3$ .

En remplaçant dans

$$R_1 = \alpha_2 - f_1 \alpha_1 + f_2 = 0$$

les polynômes  $\alpha_2$  et  $\alpha_1$  par leurs expressions (6), il vient

$$p^2 - q - f_1 p + f_2 = 0 ,$$

par suite

$$q = \frac{p^2 - f_1 p + f_2}{p^0} .$$

Supposons maintenant  $n \geq 4$ .

Les coefficients des  $\alpha$  dans  $R_i$  étant des polynômes en  $q$ , qui est l'inconnue dont il s'agit précisément d'obtenir l'expression, la méthode dont nous nous sommes servi dans notre premier travail, n'est plus applicable. Mais remplaçons, dans  $R_i$ , les  $\alpha$  par leurs expressions (4);  $R_i$  devient un polynôme en  $p$  et  $q$ , et il résulte alors des formules (3) et (4) que la puissance la plus élevée de  $q$  dans  $R_i$  est fournie par son premier terme  $q^{i-1} \alpha_{n-i}$ ; son exposant étant égal à  $i-1 + E\left(\frac{n-i}{2}\right)$ , on voit que le

---

<sup>3)</sup> Cf. *P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, zweiter Teil (additive Zahlentheorie), Chap. 2.*

degré de  $R_i$  par rapport à  $q$  est une fonction croissante ou plutôt non décroissante de  $i$ . Or le degré de  $R_{n-3}$  par rapport à  $q$  est égal à son indice  $n - 3$ , puisque  $n - 3 = 1 + E\left(\frac{n - n + 3}{2}\right) = n - 3$ . Si donc l'on égale à 0 les  $n - 3$  polynômes  $R_i$ , on obtiendra un système de  $n - 3$  équations linéaires à  $n - 3$  inconnues  $q, q^2, \dots, q^{n-3}$ . Ce système nous fournira en particulier l'expression cherchée de  $q$  en fonction de  $p$ .

Il est préférable du reste de changer les signes des polynômes  $R_i$  et de les ordonner ensuite suivant les puissances croissantes de  $q$ . L'utilité de cette transformation élémentaire apparaîtra plus tard.

En désignant par  $\mathfrak{D}_n$  le déterminant des coefficients de  $q, q^2, \dots, q^{n-3}$  et par  $\mathfrak{N}_n$  le déterminant de Cramer correspondant à l'inconnue  $q$ , l'expression cherchée de  $q$  s'écrira

$$q = \frac{\mathfrak{N}_n}{\mathfrak{D}_n}, \quad (7)$$

$\mathfrak{D}_n$  et  $\mathfrak{N}_n$  étant deux polynômes en  $p$  faisant partie de  $\mathfrak{B}$ .

*Exemples.*

Soit d'abord  $n = 4$ .

On n'a qu'une seule équation  $-R_1 = 0$ , qui s'écrit

$$-\alpha_3 + f_1\alpha_2 - f_2\alpha_1 + f_3 = 0$$

et en remplaçant les  $\alpha_i$  par leurs expressions (6)

$$-p^3 + f_1 p^2 - f_2 p + f_3 + q(2p - f_1) = 0$$

d'où

$$q = \frac{p^3 - f_1 p^2 + f_2 p - f_3}{2p - f_1}.$$

On voit donc que

$$\mathfrak{D}_4 = 2p - f_1; \quad \mathfrak{N}_4 = p^3 - f_1 p^2 + f_2 p - f_3.$$

Soit maintenant  $n = 5$ .

Le nombre des équations est égal à 2. Or,

$$-R_1 = -p^4 + f_1 p^3 - f_2 p^2 + f_3 p - f_4 + (3p^2 - 2f_1 p + f_2)q - q^2$$

$$-R_2 = -f_5 - (p^3 - f_1 p^2 + f_2 p - f_3)q + (2p - f_1)q^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_5 &= \begin{vmatrix} 3p^2 - 2f_1 p + f_2 & -1 \\ -p^3 + f_1 p^2 - f_2 p + f_3 & 2p - f_1 \end{vmatrix} \\ &= 5p^3 - 6f_1 p^2 + (2f_1^2 + f_2)p - f_1 f_2 + f_3 \end{aligned}$$

et

$$\mathfrak{N}_5 = \begin{vmatrix} p^4 - f_1 p^3 + f_2 p^2 - f_3 p + f_4 & -1 \\ f_5 & 2p - f_1 \end{vmatrix}$$

$$= 2p^5 - 3f_1 p^4 + (f_1^2 + 2f_2)p^3 - (f_1 f_2 + 2f_3)p^2 + (f_1 f_3 + 2f_4)p - f_1 f_4 + f_5.$$

§ 4. Démonstration du théorème 1.

La première partie de ce théorème étant déjà établie, il reste à montrer que le degré de  $\mathfrak{D}_n$  par rapport à  $p$  et par rapport à l'ensemble  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est égal à  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ .

Egalons à zéro  $f_1, f_2, \dots, f_n$  dans  $\mathfrak{D}_n$ . Nous montrerons que  $\mathfrak{D}_n$  se réduit à

$$a_n p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}},$$

$a_n$  étant un nombre entier positif et que par conséquent le degré de  $\mathfrak{D}_n$  par rapport à  $p$  est bien égal à  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ . Or,  $\mathfrak{D}_n$  étant une fonction homogène par rapport à  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et le degré de  $p$  dans  $X_n$  étant égal à 1, nous en concluons que le degré de  $\mathfrak{D}_n$  par rapport à  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est aussi égal à  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  et le théorème 1 sera établi.

Mais, pour  $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$ ,  $-R_i$  se réduit, en vertu de (3), à son premier terme  $-q^{i-1}\alpha_{n-i}$ , qui s'écrit

$$-p^{n-i} q^{i-1} + \gamma_1^{(n-i)} p^{n-i-2} q^i - \gamma_2^{(n-i)} p^{n-i-4} q^{i+1} + \dots$$

et par suite

$$\begin{aligned} -R_1 &= -p^{n-1} + \binom{n-2}{1} p^{n-3} q - \binom{n-3}{2} p^{n-5} q^2 + \dots \\ -R_2 &= -p^{n-2} q + \binom{n-3}{1} p^{n-4} q^2 - \dots \\ &\dots\dots\dots \\ -R_{n-4} &= -p^4 q^{n-5} + 3p^2 q^{n-4} - q^{n-3} \\ -R_{n-3} &= -p^3 q^{n-4} + 2p q^{n-3} \end{aligned}$$

et  $\mathfrak{D}_n$  se réduit à

$$\begin{vmatrix} \binom{n-2}{1} p^{n-3} & -\binom{n-3}{2} p^{n-5} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -p^{n-2} & \binom{n-3}{1} p^{n-4} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & -p^{n-3} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & -p^4 & 3p^2 & -1 \\ & & & & -p^3 & & 2p \end{vmatrix}$$

que je désignerai par  $\mathfrak{D}_n(0)$ .

Or, le degré du terme principal de  $\mathcal{D}_n(0)$  par rapport à  $p$  tant égal à la somme

$$(n-3) + (n-4) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n-2)(n-3)}{2},$$

il en résulte que

$$\mathcal{D}_n(0) = a_n p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}, \quad (8)$$

$a_n$  étant un nombre entier.

Mais rien jusqu'à présent ne nous permet d'affirmer que  $a_n$  n'est pas nul. Je ferai voir que  $a_n$  est positif.

Supposons que les  $a_i$  soient différents de 0 pour  $i < n$ . Je dis que cette hypothèse entraîne  $a_i > 0$  pour  $i \leq n$ . Commençons par faire remarquer que les sous-déterminants principaux tirés de  $\mathcal{D}_n(0)$  en supprimant 1, 2, ...,  $n-4$  premières lignes et premières colonnes sont égaux respectivement à  $\mathcal{D}_{n-1}(0)$ ,  $\mathcal{D}_{n-2}(0)$ , ...,  $\mathcal{D}_1(0) = 2$ .

Multiplions les éléments de la 1<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup>, ...,  $(n-4)$ <sup>e</sup> colonne par  $a_{n-1}$ ,  $a_{n-2}$ , ...,  $a_4 = 2$ , ce qui a pour effet de multiplier  $\mathcal{D}_n(0)$  par le produit  $a_{n-1} \cdot a_{n-2} \dots a_4 \neq 0$ .

Effectuons ensuite les opérations suivantes, qui ne changent pas la valeur du déterminant :

1) ajoutons aux éléments de la  $(n-4)$ <sup>e</sup> (avant dernière) colonne les éléments correspondants de la  $(n-3)$ <sup>e</sup> (dernière) colonne multipliés par  $p^2$ ,

2) ajoutons aux éléments de la  $(n-5)$ <sup>e</sup> colonne les éléments correspondants de la  $(n-4)$ <sup>e</sup> colonne ainsi transformée après les avoir multipliés par  $p^2$ ,

3) appliquons la même opération aux éléments de la  $(n-6)$ <sup>e</sup>,  $(n-7)$ <sup>e</sup>, ... 1<sup>e</sup> colonne et soient

$$\varepsilon_n p^{n-3}, \quad \varepsilon_{n-1} p^{n-4}, \quad \dots, \quad \varepsilon_4 p = 2p$$

les éléments rangés le long de la diagonale principale dans l'expression finale du déterminant.

Comme la valeur de ce déterminant est fournie par son terme principal, nous obtenons la relation

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_n \mathcal{D}_n(0) = \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_4 p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$$

et par suite, en vertu de (8)

$$a_n a_{n-1} \dots a_4 = \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_4.$$

Je dis que  $a_i = \varepsilon_i$ .

En effet  $a_4 = \varepsilon_4 = 2$ . Donc en faisant  $n = 5$ , il vient  $a_5 = \varepsilon_5$ , etc.

Or,

$$\varepsilon_i = \binom{i-2}{1} a_{i-1} - \binom{i-3}{2} a_{i-2} + \dots .$$

Nous obtenons donc les relations

$$\begin{aligned} a_n - \binom{n-2}{1} a_{n-1} + \binom{n-3}{2} a_{n-2} - \dots &= 0 \\ a_{n-1} - \binom{n-3}{1} a_{n-2} + \dots &= 0 \\ a_{n-2} - \dots &= 0 \\ \dots & \\ a_6 - 4a_5 + 3a_4 &= 0 \\ a_5 - 3a_4 + 1 &= 0 \\ a_4 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Il est préférable, en introduisant  $a_3 = 1$ , d'écrire les deux dernières équations de la manière suivante

$$\begin{aligned} a_5 - 3a_4 + a_3 &= 0 \\ a_4 - 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$

et de compléter ensuite le système par l'adjonction des deux égalités

$$\begin{aligned} a_3 - 1 &= 0 \\ 1 &= 1 . \end{aligned}$$

Dans les équations de notre système ainsi complété, que j'appellerai le système  $S_1$ , les coefficients de  $a_i, a_{i-1}, \dots$ , abstraction faite de leurs signes, sont les nombres du triangle arithmétique de Pascal d'ordre  $i - 1$  rangés le long de la bissectrice de l'angle droit, pour tous les  $i$  compris au sens large entre 3 et  $n$ .

Je ferai voir que les  $a_i$  vérifiant le système  $S_1$ , et en particulier le coefficient  $a_n$ , sont positifs.

A partir de  $S_1$  formons un système nouveau  $S_2$  de la manière suivante: remplaçons la première équation de  $S_1$  par la somme de toutes les équations de ce système, la deuxième par la somme de celles qui suivent la première, etc.

En vertu de la relation

$$1 - \binom{i}{1} + \binom{i}{2} - \dots + (-1)^k \binom{i}{k} = (-1)^k \binom{i-1}{k}, \quad (9)$$

pour tout  $k \leq i$ ,



les coefficients de la première équation de  $S_2$  sont ceux de la seconde de  $S_1$ , les coefficients de la seconde équation de  $S_2$  sont ceux de la troisième de  $S_1$ , etc. Le nombre des équations diminue d'une unité et leurs seconds membres sont tous égaux à 1, donc positifs. Les dernières équations de  $S_2$  s'écrivent

$$\begin{aligned} a_5 - 2a_4 &= 1 \\ a_4 - a_3 &= 1 \\ a_3 &= 1 . \end{aligned}$$

Appliquons la même transformation à  $S_2$ . On obtiendra un système de  $n - 3$  équations dont les seconds membres sont  $n - 2, n - 3, \dots, 2$ ; la dernière s'écrira  $a_4 = 2$ .

En appliquant toujours la même opération, on formera  $S_4, S_5, \dots, S_{n-1}$ . Le système  $S_{n-2}$  s'écrit

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= g_1 \\ a_{n-1} &= g_2 , \end{aligned}$$

$g_1$  et  $g_2$  étant deux nombres positifs. Enfin

$$a_n = g_1 + g_2 .$$

Donc  $a_n > 0$ , et comme  $n$  est un nombre quelconque  $\geq 3$ , cette inégalité a lieu pour tout  $n \geq 3$  et le théorème 1 est établi.

*Exemples.*

Soit  $n = 4$ .

Les systèmes  $S_1, S_2, S_3$  s'écrivent

$$\begin{aligned} a_4 - 2a_3 &= 0 \\ a_3 - 1 &= 0 \\ 1 &= 1 \end{aligned} \tag{S_1}$$

$$\begin{aligned} a_4 - a_3 &= 1 \\ a_3 &= 1 \end{aligned} \tag{S_2}$$

$$a_4 = 2 \tag{S_3}$$

Soit maintenant  $n = 5$ .

Les systèmes  $S_1, S_2, S_3, S_4$  s'écrivent

$$\begin{aligned} a_5 - 3a_4 + a_3 &= 0 \\ a_4 - 2a_3 &= 0 \\ a_3 - 1 &= 0 \\ 1 &= 1 \end{aligned} \tag{S_1}$$

$$\begin{aligned} a_5 - 2a_4 &= 1 \\ a_4 - a_3 &= 1 \\ a_3 &= 1 \end{aligned} \tag{S_2}$$

$$\begin{aligned} a_5 - a_4 &= 3 \\ a_4 &= 2 \end{aligned} \tag{S_3}$$

$$a_5 = 5 \tag{S_4}$$

Voici les valeurs des  $a_n$  pour  $n \leq 10$ :  $a_3 = 1$ ;  $a_4 = 2$ ;  $a_5 = 5$ ;  $a_6 = 14$ ;  $a_7 = 42$ ;  $a_8 = 132$ ;  $a_9 = 429$ ;  $a_{10} = 1430$ .

Il résulte de la loi de formation des systèmes  $S_1, S_2, \dots$  que  $a_n$  croît rapidement avec  $n$ .

### § 5. Démonstration du théorème 2.

En raisonnant comme dans le § 4 de mon premier article, on démontre que le dénominateur  $\mathfrak{D}_n$  est divisible par  $\Pi_n = \prod_{i,j} (x_1 + x_2 - x_i - x_j)$ . Le degré de  $\mathfrak{D}_n$  dans  $X_n$  étant égal à celui du produit  $\Pi_n$ , on en conclut que

$$\mathfrak{D}_n = k \Pi_n$$

$k$  étant un nombre rationnel.

Je dis que  $k = 1$ .

En effet, égalons  $x_2, x_3, \dots, x_n$  à 0.

—  $R_i$  se réduit à  $-q^{i-1}(\alpha_{n-i} - f_1 \alpha_{n-i-1})$ , c'est-à-dire à  $q^i \alpha_{n-i-2}$ , puisque  $f_1 = x_i = p$ .

Le déterminant  $\mathfrak{D}_n$  se réduit donc à

$$\begin{vmatrix} p^{n-3} & -\gamma_1^{(n-3)} p^{n-5} & \dots \\ 0 & p^{n-4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots p \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire à

$$p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} = x_1^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}.$$

Or, le produit  $\Pi_n$  se réduit aussi à  $x_1^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$ , d'où  $k = 1$  et le théorème 2 est démontré.

### § 6. Démonstration du théorème 3.

Elle est immédiate. En effet, un dénominateur  $\mathfrak{D}_n$  dont le degré est inférieur à  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  ne saurait être divisible par  $\Pi_n$ .

## Deuxième méthode

### § 7. Expression de $q$ en fonction de $q'$ .

Partons de l'expression canonique de  $p$  en fonction de  $G$  ou plutôt de  $q' = G + c^2 = q + pc + c^2$ .

Je rappelle qu'on obtient cette expression en remplaçant dans celle de  $p$  en fonction de  $q$ , la somme  $p$ , le produit  $q$  et les  $f_i$  par la somme  $p'$ , le produit  $q'$  et les  $f'_i$  relatifs aux indéterminées  $x'_i$  liées aux  $x_i$  par les relations

$$x'_i = x_i + c .$$

De l'expression ainsi obtenue

$$p' = \frac{N'_n}{D'_n}$$

on tire

$$p = \frac{N'_n}{D'_n} - 2c . \quad (10)$$

Or,

$$q = q' - pc - c^2 .$$

Par suite

$$q = q' + c^2 - \frac{N'_n c}{D'_n} = \frac{(q' + c^2) D'_n - N'_n c}{D'_n} . \quad (11)$$

C'est à partir de cette formule que nous obtiendrons l'expression cherchée de  $q$  en fonction de  $p$ .

### § 8. Degrés du numérateur et du dénominateur de (11) par rapport à $c$ .

Je dis que le numérateur et le dénominateur de (11) sont tous les deux du degré  $\frac{(n+2)(n-3)}{2}$  par rapport à  $c$ .

*Démonstration.* Il est évident d'abord que le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur. Si, en effet, il lui était inférieur ou supérieur, on obtiendrait, en faisant  $c = \infty$ ,  $q = 0$  ou  $q = \infty$ , conclusions absurdes. Il suffit donc de déterminer le degré de  $D'_n$ .

Or, d'après le théorème 2 de mon premier article,  $D'_n$  a pour expression

$$\begin{aligned} & (x'_1 x'_2)^{n-3} \prod_{i,j} (x'_1 x'_2 - x'_i x'_j) \\ = & \{ (x_1 + c) (x_2 + c) \}^{n-3} \prod_{i,j} \{ x_1 x_2 - x_i x_j + (x_1 + x_2 - x_i - x_j) c \} . \quad (12) \end{aligned}$$

Comme le degré du premier facteur est égal à  $2(n-3)$  et celui du second à  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ , on voit que le degré de  $D'_n$  est bien égal à  $\frac{(n+2)(n-3)}{2}$ , que je désignerai par  $m$ .

§ 9. Posons

$$(q' + c^2) D'_n - N'_n c = \nu_0 + \nu_1 c + \nu_2 c^2 + \dots + \nu_m c^m$$

$$D'_n = \delta_0 + \delta_1 c + \delta_2 c^2 + \dots + \delta_m c^m$$

et faisons  $c = \infty$  dans (11). Il vient

$$q = \frac{\nu_m}{\delta_m} . \tag{13}$$

Or, on tire immédiatement de (12) les expressions de  $\delta_m$  et  $\nu_m$  dans  $X_n$ . En effet, en vertu de (12)

$$\delta_m = \prod_{i,j} (x_1 + x_2 - x_i - x_j) = \Pi_n$$

et par suite

$$\nu_m = x_1 x_2 \Pi_n .$$

Il reste à montrer que  $\delta_m$  et  $\nu_m$  calculés à partir de (11) sont des polynômes en  $p$ . Or, les coefficients  $\delta_i$  étant des polynômes en  $p$  et  $q$ , il suffit de faire voir que

$$\frac{\partial \delta_m}{\partial q} = 0 , \quad \frac{\partial \nu_m}{\partial q} = 0 .$$

La démonstration est immédiate. On a, en effet,

$$\frac{\partial D'_n}{\partial p} = \frac{\partial D'_n}{\partial q'} \quad \frac{\partial q'}{\partial p} = \frac{\partial D'_n}{\partial q'} c$$

$$\frac{\partial D'_n}{\partial q} = \frac{\partial D'_n}{\partial q'} \quad \frac{\partial q'}{\partial q} = \frac{\partial D'_n}{\partial q'}$$

d'où

$$\frac{\partial D'_n}{\partial p} = \frac{\partial D'_n}{\partial q} c$$

et par suite

$$\frac{\partial \delta_0}{\partial p} + \frac{\partial \delta_1}{\partial p} c + \dots + \frac{\partial \delta_m}{\partial p} c^m = \frac{\partial \delta_0}{\partial q} c + \frac{\partial \delta_1}{\partial q} c^2 + \dots + \frac{\partial \delta_m}{\partial q} c^{m+1} . \tag{14}$$

On a donc bien

$$\frac{\partial \delta_m}{\partial q} = 0$$

et comme le même raisonnement s'applique au numérateur de (11), on a aussi

$$\frac{\partial \nu_m}{\partial q} = 0$$

et par conséquent  $\delta_m$  et  $\nu_m$  sont bien des polynômes en  $p$ .

Je dis maintenant qu'on a identiquement

$$\delta_m = \mathfrak{D}_n \quad \text{et} \quad \nu_m = \mathfrak{N}_n .$$

En effet, les degrés de  $\delta_m$  et de  $\mathfrak{D}_n$  par rapport à  $p$  ne dépassent pas  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ , nombre inférieur au degré  $\frac{n(n-1)}{2}$  de l'équation vérifiée par  $p$ . La même remarque s'applique aux polynômes  $\nu_m$ ,  $\mathfrak{N}_n$ .

### § 10. Calcul de $q$ à partir de (11).

Pour obtenir l'expression de  $q$  à l'aide de la deuxième méthode, on peut, en vertu de la propriété qui vient d'être établie, faire  $q = 0$  dans (11). Il suffit alors de calculer les coefficients de  $c^m$  dans le numérateur et le dénominateur de (11) ainsi simplifiés.

Supposons  $n = 4$ .

En faisant  $q = 0$ ,  $N'_4$  et  $D'_4$  se réduisent respectivement à

$$(f_1 + 4c)(pc + c^2)^2 - (f_3 + 2f_2c + 3f_1c^2 + 4c^3)(pc + c^2)$$

et

$$(pc + c^2)^2 - (f_4 + f_3c + f_2c^2 + f_1c^3 + c^4) .$$

L'exposant  $m$  étant égal à 3,  $\nu_m$  et  $\delta_m$  sont les coefficients de  $c^3$  dans

$$(pc + 2c^2) D'_4 - c N'_4$$

et

$$D'_4$$

ainsi simplifiés, et l'on retrouve l'expression de  $q$  fournie par la première méthode

$$q = \frac{p^3 - f_1 p^2 + f_2 p - f_3}{2p - f_1} .$$

*Remarque.* En faisant  $c = 0$  dans (11), on obtient

$$q = \frac{\nu_0}{\delta_0}$$

ou

$$q \delta_0 - \nu_0 = 0 . \quad (15)$$

Or, en vertu de (14),  $\delta_0$  et  $\nu_0$  sont des polynômes en  $q$  et comme le degré du premier membre de (15) est inférieur à  $\frac{n(n-1)}{2}$ , cette égalité est une identité.

Pour  $n = 4$ , par exemple,

$$\nu_0 = q^3 - f_4 q ; \quad \delta_0 = q^2 - f_4 .$$

Une remarque analogue s'applique à la formule

$$p = \frac{N'_n}{D'_n} - 2c = \frac{N'_n - 2c D'_n}{D'_n} .$$

Elle se réduit à une identité, si l'on fait  $c = \infty$ . Pour  $n = 4$  elle se réduit à

$$p = \frac{2p^2 - f_1 p}{2p - f_1} .$$

*Corollaires.*

### § 11. Expressions de $p^k$ ( $k > 1$ ) en fonction de $q$ .

Ces expressions s'obtiennent immédiatement, si l'exposant  $k$  est  $\leq n - 3$ . En effet, le procédé indiqué dans mon premier travail permet d'obtenir les expressions de  $\alpha_k$  pour  $k \leq n - 3$ . Et comme

$$\alpha_k = p^k - \dots , \quad (16)$$

on en tire  $p^k$ .

Pour calculer  $p^k$ , lorsque l'exposant  $k$  est supérieur à  $n - 3$ , on peut procéder de la manière suivante:

Pour  $k = n - 2$  et  $k = n - 1$ , on calculera  $p^k$  à partir de  $R_2 = 0$  et  $R_1 = 0$ . On peut, en effet, tirer de ces équations  $\alpha_{n-2}$  et  $\alpha_{n-1}$  en fonction des  $\alpha_k$  d'indices  $k \leq n - 3$  et finalement  $p^{n-2}$  et  $p^{n-1}$  à l'aide de (16).

Si  $k > n - 1$ , on partira de la relation

$$\alpha_k - f_1 \alpha_{k-1} + f_2 \alpha_{k-2} - \dots + (-1)^n f_n \alpha_{k-n} = 0, \quad (17)$$

dont le premier membre est

$$f(x_1) x_1^{k-n+1} - f(x_2) x_2^{k-n+1}.$$

On en tirera de proche en proche  $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots$  et par suite, en vertu de (16),  $p^n, p^{n+1}, \dots$ .

## § 12. Expressions de $q^k$ ( $k > 1$ ) en fonction de $p$ .

Les procédés indiqués dans ce travail permettent d'obtenir ces expressions pour  $k \leq n - 3$ .

Si  $k$  est supérieur à  $n - 3$ , on envisagera  $\alpha_{2k}$  qui contient le terme  $(-1)^k q^k$  (puissance la plus élevée de  $q$  dans  $\alpha_{2k}$ ). Le calcul de  $q^k$  se ramène alors à celui de  $q^{k-1}, q^{k-2}, \dots$ .

## § 13. Expressions de $p^k, q^k$ et de $p^k q^l$ en fonction de $q' = G + c^2$ .

Comme  $p = p' - 2c$ , les expressions de  $p^k$  se calculent à partir de celles des puissances de  $p'$  inférieures ou égales à  $k$  qu'on obtient de celles du § 11, en remplaçant  $p$  et  $q$  par  $p'$  et  $q'$ .

Et comme  $q = q' - pc - c^2$ , pour calculer  $q^k$  on n'aura qu'à remplacer dans  $(q' - pc - c^2)^k$  les puissances de  $p$  par leurs expressions en fonction de  $q'$ .

Quant aux expressions de  $p^k q^l$ , on remplacera dans  $p^k q^l$  le facteur  $q^l$  par  $(q' - pc - c^2)^l$ .

En faisant  $q' = G + c^2$ , on obtiendra les expressions de  $p^k, q^k$  et de  $p^k q^l$  en fonction de  $G$ .

## § 14. Expressions d'une fonction symétrique entière de $x_1, x_2$ .

Soit  $S$  une fonction symétrique entière de deux indéterminées  $x_1, x_2$ .

On sait que  $S$  est un polynôme en  $p$  et  $q$  dont les coefficients font partie de  $F_n$ .

Le problème se ramène donc à ceux des paragraphes 11, 12 et 13.

On en tire aussi les expressions d'une fonction symétrique rationnelle de  $x_1, x_2$  à coefficients faisant partie de  $F_n$ .

(Reçu le 26 février 1942.)