Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 17 (1944-1945)

Artikel: Über die Schranken für die absoluten Beträge der Wurzeln von Polynomen.

Autor: Batschelet, Eduard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16333

Über die Schranken für die absoluten Beträge der Wurzeln von Polynomen

Von Eduard Batschelet, Basel

1. Anknüpfend an die Untersuchungen von Herrn *Ostrowski* über das Graeffesche Verfahren[1]) habe ich in zwei Arbeiten[2]) das sich hierbei ergebende Problem weiterverfolgt, *welchen Schwankungen die absoluten Beträge der Wurzeln eines Polynoms*

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n \tag{1}$$

unterworfen sind, wenn man die Argumente der Koeffizienten $A_\nu (0 \leqq \nu \leqq n)$ *beliebig variiert.* In der vorliegenden Arbeit werden wir die bis jetzt erhaltenen Ergebnisse erweitern.

Die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eines jeden Polynoms der Gestalt (1) mögen nach fallenden absoluten Beträgen geordnet sein. Es gelte also

$$|x_1| \geqq |x_2| \geqq \ldots \geqq |x_n| . \tag{2}$$

Ferner sei $k (1 \leqq k \leqq n)$ ein fest gewählter Index. Wir nennen dann x_k auch die k-te Wurzel des Polynoms. Für die Koeffizienten des Polynoms setzen wir

$$|A_\nu| = \alpha_\nu , \quad \arg A_\nu = \varphi_\nu , \quad \nu = 0, 1, \ldots, n .$$

Variieren wir nun die Argumente φ_ν beliebig, halten aber die absoluten Beträge α_ν fest, so schwankt der absolute Betrag von x_k in einem Intervall, dessen genaue, obere Schranke mit Z_k und dessen genaue untere Schranke mit ζ_k bezeichnet sein sollen. Die *relative Breite* dieses Intervalls wollen wir durch den Quotienten

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{Z_k}{\zeta_k} \tag{3}$$

messen.

Herr *Ostrowski* hat gezeigt, daß unabhängig von der Wahl des Polynoms

$$\gamma_n^{(k)} \leqq \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) k (n - k + 1) \tag{4}$$

---

[1]) *Ostrowski* (1). Siehe Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) *Batschelet* (1) und (2).

gilt[3]). *Die Frage, ob $\gamma_n^{(k)}$ für eine geeignete Wahl des Polynoms die Schranke rechter Hand erreicht, wenn auch nur der Größenordnung nach, blieb dabei allerdings offen.* Wir werden im folgenden zeigen, daß dies für die Größenordnung zutrifft. Bezeichnen wir nämlich mit $c_n^{(k)}$ das Maximum aller $\gamma_n^{(k)}$, das für festes k und für spezielle Polynome n-ten Grades aus Stetigkeitsgründen erreicht wird, so werden wir die Ungleichung

$$c_n^{(k)} > k(n - k + 1) \tag{5}$$

beweisen.

Für den Fall, wo n eine ungerade Zahl und $k = \frac{n+1}{2}$ ist, habe ich an anderer Stelle[4]) die in (5) als Spezialfall enthaltene Ungleichung

$$c_n^{(k)} > \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

bereits hergeleitet.

2. Dem Beweis der Ungleichung (5) schicken wir einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. *Es sei k eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und*

$$k' = n - k + 1 \tag{6}$$

gesetzt. Dann gibt es stets zwei Polynome n-ten Grades

$$\begin{aligned} f(x) &= A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_0 \,, \\ g(x) &= B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \cdots + B_0 \,, \end{aligned} \tag{7}$$

welche den folgenden Bedingungen genügen:

a) $A_\nu, B_\nu (\nu = 0, 1, \ldots, n)$ *sind reell,*

b) $|A_\nu| = |B_\nu|, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n$,

c) $f(x)$ *besitzt eine k-fache Wurzel* $\tau > 0$ *und* $g(x)$ *eine k'-fache Wurzel* $\sigma > 0$ *derart, daß*

$$\frac{\tau}{\sigma} > k \cdot k' \tag{8}$$

gilt.

---

[3]) *Ostrowski* (1), p. 145. Die Ungleichung ist sofort aus (25, 3) im „Corollaire au théorème IX" zu entnehmen.

[4]) *Batschelet* (2), Ungleichung (14).

Beweis: Man setze $f(x)$ und $g(x)$ in der Gestalt

$$f(x) = (x+t)^k \cdot \sum_{\nu=0}^{k'-1} a_\nu x^\nu ,$$

$$g(x) = (x+s)^{k'} \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} b_\nu x^\nu$$

an, wobei a_ν und b_ν als reelle Zahlen und t, s als negative Zahlen zu bestimmen sind. $-t$ ist dann eine k-fache positive Wurzel von $f(x)$ und $-s$ eine k'-fache positive Wurzel von $g(x)$.

Unter Benützung der abkürzenden Bezeichnungen

$$\begin{aligned} T_\mu &= \binom{k}{\mu} t^\mu , \quad \mu = 0, \ldots, k , \\ S_\mu &= \binom{k'}{\mu} s^\mu , \quad \mu = 0, \ldots, k' , \end{aligned} \tag{9}$$

erhält man für $f(x)$ und $g(x)$, wenn man diese Polynome nach Potenzen von x ordnet:

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{k} T_\mu x^{k-\mu} \cdot \sum_{\nu=0}^{k'-1} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k'-1} \sum_{\mu=0}^{k} T_\mu a_\nu x^{k-\mu+\nu} ,$$

$$g(x) = \sum_{\mu=0}^{k'} S_\mu x^{k'-\mu} \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} b_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{k'} S_\mu b_\nu x^{k'-\mu+\nu} .$$

Man führe noch in $f(x)$ und in $g(x)$ die neuen Summationsindizes $\lambda = k - \mu + \nu$, resp. $\lambda = k' - \mu + \nu$ ein. Dadurch erhalten $f(x)$ und $g(x)$ die Gestalt

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} \left(\sum_{\mu=0}^{k} T_\mu a_{\lambda+\mu-k} \right) x^\lambda ,$$

$$g(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} \left(\sum_{\mu=0}^{k'} S_\mu b_{\lambda+\mu-k'} \right) x^\lambda .$$

Dabei sind sämtliche a_ν und b_ν gleich 0 zu setzen, wenn ν nicht die Werte $0, \ldots, k'-1$, resp. die Werte $0, \ldots, k-1$ annimmt. Durch Koeffizientenvergleich mit (7) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} A_\lambda &= \sum_{\mu=0}^{k} T_\mu a_{\lambda+\mu-k} \\ B_\lambda &= \sum_{\mu=0}^{k'} S_\mu b_{\lambda+\mu-k'} \end{aligned} \right\} \quad \lambda = 0, 1 \ldots, n . \tag{10}$$

Um jetzt die Bedingung b) des Hilfssatzes zu erfüllen, setze man für $\lambda = 0, 1, \ldots, n$ $|A_\lambda| = |B_\lambda|$ oder $A_\lambda + \xi_\lambda B_\lambda = 0$, wo $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ Zahlen bezeichnen, die nur der Werte $+1$ oder -1 fähig sind. Die Bestimmung des Vorzeichens eines jeden ξ_λ können wir uns noch vorbehalten. Damit gewinnen wir aus (10) die Gleichungen

$$\sum_{\mu=0}^{k} T_\mu \, a_{\lambda+\mu-k} + \xi_\lambda \cdot \sum_{\mu=0}^{k'} S_\mu \, b_{\lambda+\mu-k'} = 0 \ , \quad \lambda = 0, 1, \ldots, n \ . \tag{11}$$

Dies ist ein System von $n + 1$ linearen, homogenen Gleichungen mit den $n + 1$ Unbekannten $a_0, \ldots a_{k'-1}, b_0, \ldots, b_{k-1}$. Eine nicht triviale Lösung existiert dann und nur dann, wenn die Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} T_k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \xi_0 S_{k'} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ T_{k-1} & T_k & 0 & \ldots & 0 & 0 & \xi_1 S_{k'-1} & \xi_1 S_{k'} & \ldots & 0 & 0 \\ T_{k-2} & T_{k-1} & T_k & \ldots & 0 & 0 & \xi_2 S_{k'-2} & \xi_2 S_{k'-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & T_0 & T_1 & 0 & 0 & \ldots & \xi_{n-1} S_0 & \xi_{n-1} S_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & T_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \xi_n S_0 \end{vmatrix} \tag{12}$$

k' Spalten $\qquad\qquad$ k Spalten

verschwindet. Die Determinante gleicht äußerlich einer *Sylvesterschen Resultante*, unterscheidet sich aber von einer solchen durch die Faktoren ξ_λ.

Man überzeuge sich, daß die Determinante (12) in den zwei Variabeln s und t *homogen* ist. Denn T_μ und S_μ sind nach ihrer Definition in (9) vom Grade μ in t, resp. s. Multipliziert man noch die erste Spalte von (12) mit $t^{k'-1}$, die zweite mit $t^{k'-2}$, usw., die k'-te mit t^0 und entsprechend die $(k' + 1)$-te Spalte mit s^{k-1}, die darauf folgende mit s^{k-2}, usw., die letzte mit s^0, so enthält die erste Zeile, wegen $k + k' = n + 1$, nur die Potenzen t^n und s^n, die zweite Zeile nur die Potenzen t^{n-1} und s^{n-1}, usw. Die letzte Zeile enthält in t und s konstante Elemente. Daraus folgt die behauptete Homogenität unmittelbar.

Setzt man noch

$$\gamma = \frac{t}{s}\,, \tag{13}$$

so muß die Determinante (12) nach Division durch eine geeignete Potenz von s ein Polynom in γ sein. Man erhält dieses Polynom aus (12) einfach dadurch, daß man $t = \gamma$ und $s = 1$ setzt. Es lautet

$$
\begin{vmatrix}
\gamma^k & 0 & \dots & 0 & 0 & \xi_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\binom{k}{1}\gamma^{k-1} & \gamma^k & \dots & 0 & 0 & \binom{k'}{1}\xi_1 & \xi_1 & \dots & 0 & 0 \\
\binom{k}{2}\gamma^{k-2} & \binom{k}{1}\gamma^{k-1} & \dots & 0 & 0 & \binom{k'}{2}\xi_2 & \binom{k'}{1}\xi_2 & \dots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & \dots & \binom{k}{1}\gamma^{k-1} & \gamma^k & \binom{k'}{k'-1}\xi_{k'-1} & \binom{k'}{k'-2}\xi_{k'-1} & \dots & & \\
 & & \dots & \binom{k}{2}\gamma^{k-2} & \binom{k}{1}\gamma^{k-1} & \xi_{k'} & \binom{k'}{k'-1}\xi_{k'} & \dots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \dots & \binom{k}{1}\gamma & \binom{k}{k-2}\gamma^2 & 0 & 0 & \dots & \binom{k'}{k'-1}\xi_{n-2} & \binom{k'}{k'-2}\xi_{n-2} \\
0 & 0 & \dots & 1 & \binom{k}{k-1}\gamma & 0 & 0 & \dots & \xi_{n-1} & \binom{k'}{k'-1}\xi_{n-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_n
\end{vmatrix} \tag{14}
$$

Man entwickle (14) nach fallenden Potenzen von γ. Man erhält dann

$$
\xi_{k'}\,\xi_{k'+1}\cdots\xi_n\cdot\gamma^{kk'}-\binom{k}{1}\binom{k'}{k'-1}\xi_{k'-1}\,\xi_{k'+}\cdots\xi_n\cdot\gamma^{kk'-1}+R(\gamma)=0\ , \tag{15}
$$

wo $R(\gamma)$ die Summe aller Glieder vom Grade $\leqq k\cdot k'-2$ bezeichnet. Man beachte, daß $R(\gamma)$ aus lauter Summanden besteht, die genau k verschiedene Faktoren ξ_λ besitzen. Außerdem kommen in den Summanden von $R(\gamma)$ diejenigen Produkte in den ξ_λ nicht mehr vor, welche zugleich Koeffizienten von $\gamma^{kk'}$ oder von $\gamma^{kk'-1}$ sind, wie man leicht aus der Struktur der Determinante (14) entnimmt. Es tritt also entweder ein ξ_λ mit $\lambda < k'-1$ hinzu, oder es fehlt ein ξ_λ mit $\lambda > k'$.

Durch Multiplikation mit $\xi_{k'}^{-1}\,\xi_{k'+1}^{-1}\dots\xi_n^{-1}$ erhält man aus dem Verschwinden von (15) die Gleichung

$$
\gamma^{kk'}-\xi_{k'}^{-1}\,\xi_{k'-1}\cdot kk'\cdot\gamma^{kk'-1}+R^*(\gamma)=0\ , \tag{16}
$$

wobei $R^*(\gamma)=\xi_{k'}^{-1}\,\xi_{k'+1}^{-1}\cdots\xi_n^{-1}\cdot R(\gamma)$ gesetzt ist.

Aus den vorigen Überlegungen folgt, daß jeder Summand von $R^*(\gamma)$ mit wenigstens zwei der Faktoren $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k'-1}, \xi_{k'}^{-1}, \xi_{k'+1}^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}$ behaftet ist. Keiner besitzt jedoch nur das Produkt $\xi_{k'}^{-1}\,\xi_{k'-1}$ allein.

Man wähle jetzt

$$
\xi_{k'}^{-1}=\xi_{k'-1}=1\ . \tag{17}
$$

Dann enthält jeder Summand von $R^*(\gamma)$ noch wenigstens einen der Faktoren $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k'-2}, \xi_{k'+1}^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}$, deren Vorzeichen noch wählbar ist. Anderseits kommt keiner dieser Faktoren in ein und demselben Summanden mehr als einmal vor. $R^*(\gamma)$ ist also in jedem dieser Faktoren *linear*. Daneben kann $R^*(\gamma)$ unmöglich identisch verschwinden, da sich bei der Entwicklung der Determinante ein von γ unabhängiges Glied $\neq 0$ ergibt. Nach einem Hilfssatz über multilineare Funktionen[5]) gelingt es dann stets, jedem einzelnen ξ_λ den Wert $+1$ oder -1 so beizulegen, daß für den festen Wert $\gamma = kk'$

$$R^*(\gamma) = R^*(kk') < 0 \tag{18}$$

wird.

Bei dieser Wahl der ξ_λ folgt weiter, daß die linke Seite von (16) für $\gamma = kk'$ negativ wird. Da das Glied höchsten Grades in t einen positiven Koeffizienten besitzt, *so muß* (16) *eine positive Wurzel*

$$\gamma_0 > kk' \tag{19}$$

besitzen.

Man bestimme endlich negative Werte für $t = t_0$ und $s = s_0$, welche der Bedingung (13) für $\gamma = \gamma_0$ genügen, etwa $t_0 = -\gamma_0$ und $s_0 = -1$. Aus (11) berechne man weiter die reellen Koeffizienten a_ν und b_ν. Damit hat man zwei Polynome $f(x)$ und $g(x)$ mit der k-fachen Wurzel $-t_0 = \gamma_0$, bzw. der k'-fachen Wurzel $-s_0 = 1$ gewonnen. Aus (19) folgt dann unmittelbar (8). Damit erfüllen $f(x)$ und $g(x)$ sämtliche Bedingungen des Hilfssatzes, womit der Beweis fertig ist.

3. Nach dieser Vorbereitung können wir leicht die Ungleichung (5) herleiten. Die im Hilfssatz genannten Polynome $f(x)$ und $g(x)$ gehen gemäß ihrer Eigenschaft b) auseinander hervor, wenn man die Argumente ihrer Koeffizienten in geeigneter Weise variiert. Wir haben bei dieser Variation das Verhalten der k-ten Wurzel zu untersuchen.

Sei $|x_k| = \tau_1$ für $f(x)$ und $|x_k| = \sigma_1$ für $g(x)$ gesetzt. Wir behaupten dann, es gelte

$$\tau_1 \geqq \tau\,, \quad \sigma_1 \leqq \sigma\,. \tag{20}$$

Wäre nämlich $\tau_1 < \tau$, so könnte τ_1 wegen (2) unmöglich der absolute Betrag der k-ten Wurzel sein, weil τ ja k-fache Wurzel ist. Wäre ferner $\sigma_1 > \sigma$, so müßte $g(x)$ wenigstens k Wurzeln besitzen, deren absoluter Betrag $> \sigma$ wäre. Anderseits ist σ eine k'-fache Wurzel. $g(x)$ hätte daher wenigstens $k + k'$ Wurzeln, was aber wegen (6) unmöglich ist.

[5]) *Batschelet* (2), Hilfssatz I. Er lautet: „*Es sei k eine positive ganze Zahl und $F(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ ein multilineares Polynom der Variabeln $\xi_1, \ldots, \xi_k$, das also in bezug auf jede Variable linear ist. Das konstante Glied sei gleich* 0, *die übrigen Koeffizienten aber irgendwelche reelle Zahlen, die nicht sämtlich verschwinden.*

Dann kann man jeder der Variabeln $\xi_1, \ldots, \xi_k$ die Werte $+1$ oder -1 so beilegen, daß $F(\xi_1, \ldots, \xi_k) < 0$ gilt." Der Beweis folgt leicht durch Induktion.

Aus (20) folgt nunmehr

$$\frac{\tau_1}{\sigma_1} \geqq \frac{\tau}{\sigma}$$

und aus (8) erst recht

$$\frac{\tau_1}{\sigma_1} > kk' = k(n - k + 1) \quad . \tag{21}$$

Nach der Definition von $c_n^{(k)}$ in Abschnitt 1 schließen wir daraus unmittelbar die zu beweisende Ungleichung (5).

4. Die Gleichung (16) liefert nach dem Beweis des Hilfssatzes offenbar besonders große Werte für $\gamma_n^{(k)}$, wenn man den Faktoren ξ_λ in geeigneter Weise die Werte $+ 1$ und $- 1$ beilegt. Für $k = 1$ oder $k = n$ habe ich auf anderem Wege gezeigt, daß die größte Wurzel der Gleichung (16) für $\xi_\lambda = (- 1)^\lambda$ sogar die maximalen Werte $c_n^{(k)}$ liefert. Man findet[6])

$$c_n^{(1)} = c_n^{(n)} = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} \quad .$$

Ob auch im allgemeinen Falle $c_n^{(k)}$ aus (16) bestimmt werden kann, bleibt eine offene Frage.

---

[6]) *Batschelet* (1), p. 169, Formel (6, 1).

(Eingegangen den 13. Juli 1944.)

LITERATUR:

A. Ostrowski, (1) Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurant, Acta math., t. 72 (1940), p. 100—257.

E. Batschelet, (1) Untersuchungen über die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer, insbesondere kubischer Gleichungen, Verh. d. Naturf. Ges. Basel, Bd. LV (1944), p. 158—179. — (2) Über die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Wird in den Acta math. erscheinen.