Sulla formula di Cauchy n-dimensionale e sopra un teorema di Hartogs nella teoria delle funzioni di n variabili complesse

Di Enzo Martinelli, Roma

Introduzione

1. In un lavoro già apparso[1]) ho dato due diverse dimostrazioni del seguente teorema di Hartogs: „Una funzione analitica $f(z_1, \ldots, z_n)$ delle variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$, la quale sia regolare ed univocamente definita sul contorno irriducibile Γ_{2n-1} di un dominio univalente e limitato D_{2n} dello spazio euclideo S_{2n} rappresentativo delle n-ple $z_1, \ldots, z_n$, può sempre prolungarsi analiticamente in modo regolare ed univoco in tutto D_{2n}."

Ritorno ora sulla seconda dimostrazione estendendola alle condizioni generali di validità del teorema, mentre nel lavoro citato essa era limitata al caso in cui fosse $n = 2$ e il dominio D convesso[2]). Ho già segnalato l'interesse della dimostrazione, proveniente dal carattere topologico di questa, che pone in evidenza perché il teorema vale per $n > 1$ e non vale per $n = 1$.

Mi si presenta qui l'occasione di ritornare altresì sulla formula integrale di Cauchy n-dimensionale, nella sua forma generale[3]), di cui l'attuale dimostrazione del teorema d'Hartogs è un'applicazione. Comincio perciò col richiamare tale formula, aggiungendo sull'argomento alcune considerazioni complementari che mi sembrano di qualche utilità (nn. 3,4).

Formula di Cauchy n-dimensionale

2. Sia $f(z_1, \ldots, z_n)$ una funzione analitica regolare uniforme in un dominio D_{2n} dello $S_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

[1]) Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs, Comm. Math. Helvetici, vol. 15 (1943), pag. 340.

[2]) Nelle condizioni generali D_{2n} può essere non convesso ed anche avere connessioni (delle varie dimensioni) non semplici.

[3]) Cfr. la mia nota: La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse, Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXV, s. 6ª, gennaio 1937, pag. 33; e quella di *B. Segre:* Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n-pli, nella teoria delle funzioni di n variabili complesse, Atti del 1º Congresso dell'Unione Mat. Ital., aprile 1937, pag. 174. Chiamo n-dimensionale la formula di cui trattasi (in relazione alla dimensione del ciclo d'integrazione che in essa appare), per distinguerla da una formula $(2n - 1)$-dimensionale che ho altrove stabilito, e che deve anch'essa considerarsi come estensione della formula elementare di Cauchy.

Si riguarderà lo S_{2n} orientato dagli assi coordinati orientati positivamente ed ordinati nel modo indicato.

Consideriamo gli n spazi caratteristici $(2n - 2)$-dimensionali, uscenti da un punto $O(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, *interno* a D_{2n}, di equazioni rispettive:

$$z_1 = \zeta_1\,;\quad z_2 = \zeta_2\,;\quad \ldots\quad ;\ z_n = \zeta_n\,.$$

Il complesso degli n spazi caratteristici, i quali hanno in comune il solo punto O da cui sono individuati, indichiamo con $T_{2n-2}(O)$.

Se V_n è un n-ciclo orientato di D_{2n}, *non incontrante* $T_{2n-2}(O)$, ha luogo a considerarsi un carattere topologico intero $N(V_n, O)$, dipendente dalla posizione di V_n rispetto a $T_{2n-2}(O)$, che può precisarsi così. Si consideri l'n-edro *solido* rettangolo $K_n(O)$ individuato ed orientato da n semirette orientate uscenti da O e parallele ordinatamente ai piani caratteristici $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n$ (per es. parallele ed equiverse agli n semiassi positivi $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Il contorno orientato $H_{n-1}(O)$ di $K_n(O)$ appartiene a $T_{2n-2}(O)$, onde non incontra V_n. L'intero N è l'ordinario *indice d'allacciamento* di H_{n-1} e V_n in S_{2n} [4]; vale a dire N risulta l'indice di Kronecker, $[K_n, V_n]$, dell'n-edro K_n con V_n.

Ciò posto, la *formula di Cauchy generale n-dimensionale* è la seguente:

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n N} \int_{V_n} \frac{f(z_1, \ldots, z_n)\, d(z_1, \ldots, z_n)}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)}\,. \tag{1}$$

Condizioni necessarie[5]) *e sufficienti per la validità della* (1) *sono:*

I. $\qquad V_n \subset D_{2n} - T_{2n-2}(O)\,;$

II. $\qquad V_n \sim 0 \quad in \quad (D_{2n} - T_{2n-2}(O)) + O\,;$

III. $\qquad Allacc\ (H_{n-1}(O), V_n) = N \neq 0\,.$

Dall'ultima condizione, $N \neq 0$, si può prescindere, portando a numeratore l'indice N nella (1); ma, quando sia $N = 0$, la formula che si ottiene non serve ad esprimere il valore della f in O mediante i valori su V_n.

---

[4]) Per il concetto e le proprietà che occorrono dell'indice d'allacciamento, cfr. p. es. *Alexandroff-Hopf*, Topologie, t. I (Berlin, Springer 1935), Cap. IX. B. Segre, nel lavoro cit., chiama N indice d'allacciamento di V_n con T_{2n-2}; la differenza di segno che ivi appare nella definizione di N, rispetto all'attuale esposizione, dipende dalla diversa orientazione che qui si assume per lo S_{2n}.

[5]) La necessità delle condizioni deve intendersi in relazione alla validità della (1) per una *arbitraria* $f(z_1, \ldots, z_n)$ regolare in D_{2n}; chè, per particolari $f(z_1, \ldots, z_n)$ (p. es. per la funzione identicamente nulla), la (1) può valere comunque si prenda V_n.

Per $n = 1$, T_{2n-2} e H_{n-1} si riducono ambedue al solo punto O, e K_n ad una semiretta uscente da O sul piano d'Argand-Gauss xy. L'indice N non è, allora, altro che il numero delle volte (computato con conveniente segno) che la curva d'integrazione, cui si riduce V_n, avvolge il punto O.

3. Si costruisce ovviamente qualche ciclo d'integrazione V_n, che soddisfaccia alle condizioni occorrenti per la validità della (1). Si consideri p. es. l'n-toro circolare τ_n con centro in O e raggi $r_1, \ldots, r_n$, di equazioni:

$$|z_1 - \zeta_1| = r_1, \ldots, |z_n - \zeta_n| = r_n .$$

L'n-toro è tracciato sulla ipersuperficie sferica Ω_{2n-1} di centro O e raggio $r = \sqrt{r_1^2 + \cdots + r_n^2}$; onde, supposti $r_1, \ldots, r_n$ abbastanza piccoli, Ω_{2n-1} e con essa τ_n risultano interni a D_{2n}. È allora $\tau_n \sim 0$ in $(D_{2n} - T_{2n-2}) + O$ (come si riconosce costruendo la varietà conica congiungente O con τ_n, la quale è circondata da τ_n ed appartiene a $(D_{2n} - T_{2n-2}) + O)$; ed inoltre è $N(\tau_n, O) = [K_n, \tau_n] = 1$. Dunque τ_n può assumersi nella (1) come ciclo di integrazione V_n, ponendo ivi $N = 1$.

Supposto D_{2n} univalente e limitato, è talora utile, per le applicazioni della (1), di poter assumere come varietà d'integrazione un ciclo tracciato sul contorno Γ_{2n-1} di D_{2n}. Quando D_{2n} è convesso, la possibilità di costruire un ciclo soddisfacente, oltre che alle I, II, III del n. 2, a questa ulteriore condizione, è immediata: bastando considerare il ciclo ottenuto per proiezione biunivoca da O su Γ_{2n-1} di un n-toro come τ_n. Vogliamo qui stabilire in generale che:

Esiste sempre qualche ciclo, W_n, *adatto alla* (1), *tracciato sul contorno* Γ_{2n-1} *del dominio* D_{2n} *ove è definita la* $f(z_1, \ldots, z_n)$, *sia* D_{2n} *convesso o no e* Γ_{2n-1} *irriducibile o riducibile.*

Consideriamo all'uopo la varietà conica indefinita $(n+1)$-dimensionale, C_{n+1}, che proietta da O l'n-toro τ_n. È noto[6]) che, comunque sia l'intersezione effettiva di C_{n+1} e Γ_{2n-1}, si può sempre far corrispondere al simbolo d'intersezione virtuale (C_{n+1}, Γ_{2n-1}) in D_{2n} un ciclo W_n, di dimensione n, eventualmente riducibile, tracciato su Γ_{2n-1} [7]) (e definito a meno di un'omologia *nell'intorno* dell'intersezione effettiva). Dico che W_n soddisfa alle condizioni topologiche occorrenti per la validità della (1).

[6]) Cfr. *Lefschetz,* Topology (New York 1930), cap. IV.

[7]) Giacché, qualunque reticolazione di D_{2n} si presupponga onde costruire W_n al modo di Lefschetz, il ciclo Γ_{2n-1}, da intersecarsi con C_{n+1}, costituisce sempre un ciclo subordinato alla reticolazione, in quanto è il contorno di D_{2n}.

Intanto è chiaro che W_n soddisfa alla I del n. 2, perché, appartenendo all'intorno dell'intersezione effettiva di C_{n+1} e Γ_{2n-1}, esso non ha punti comuni con T_{2n-2}, come non ne ha τ_n e quindi C_{n+1} (fuori di O). Mostriamo inoltre che $W_n \sim \tau_n$ in $D_{2n} - T_{2n-2}$: dal che seguirà che $N(W_n, O) = N(\tau_n, O) = 1$ (condizione III), e che $W_n \sim 0$ in $(D_{2n} - T_{2n-2}) + O$ come τ_n (condizione II). A tal fine, indichiamo con E_{2n} la $2n$-sfera contornata dall'ipersuperficie sferica Ω_{2n-1} ove è tracciato τ_n. Risulta:

$$(C_{n+1}, D_{2n}-E_{2n}) \to (C_{n+1}, \Gamma_{2n-1}-\Omega_{2n-1}) = (C_{n+1}, \Gamma_{2n-1}) - (C_{n+1}, \Omega_{2n-1}) = W_n - \tau_n;$$

e poiché $(C_{n+1}, D_{2n} - E_{2n}) \subset D_{2n} - T_{2n-2}$, segue

$$W_n - \tau_n \sim 0 \quad \text{in} \quad D_{2n} - T_{2n-2}.$$

Si poteva giungere alla conclusione desiderata che W_n è adatto alla (1), anche osservando — una volta stabilita l'ultima relazione scritta — che l'integrale a secondo membro della (1), in base al teorema di Cauchy-Poincaré, assume lo stesso valore esteso sia a W_n che a τ_n, giacché i due cicli risultano omologhi nel campo di olomorfia della funzione integranda.

Osservazione. — La costruzione indicata del ciclo W_n su Γ_{2n-1} può evidentemente generalizzarsi. Anziché dall'n-toro circolare τ_n (che è prodotto topologico di n circonferenze situate nei piani d'Argand-Gauss $z_1, \ldots, z_n$ e con centro in $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$), si può invero partire da un n-toro prodotto di n circuiti in quei piani, avvolgenti i punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ e abbastanza prossimi ad essi. Se tutti i circuiti avvolgono semplicemente i punti indicati, l'indice N che compete al ciclo W_n^* che si viene ad ottenere su Γ_{2n-1} vale ancora 1; altrimenti può avere valore diverso.

4. Per $n = 1$ il processo del n. 3 per determinare un ciclo d'integrazione W_1 sul contorno del dominio D_2 (il quale sia p. es. connesso), conduce a considerare come ciclo W_1 l'intero contorno Γ_1 (eventualmente riducibile) di D_2; ciclo che risulta così indipendente dalla posizione del punto O, e quindi atto a definire, mediante la (1), il valore di f in un punto qualunque interno a D_2 [8]). Per $n > 1$, invece, il ciclo W_n costruito su Γ_{2n-1} non è

[8]) Che l'intero contorno Γ_1 di D_2 costituisca un ciclo W_1 adatto alla (1) risulta, naturalmente, in modo diretto anche dalle condizioni topologiche I, II, III (n. 2), cui deve soddisfare W_1. Invero, il contorno Γ_1 di D_2 sarà in generale composto di più cicli irriducibili $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_1^{(2)}, \ldots, \Gamma_1^{(s)}$, dei quali sia p. es. $\Gamma_1^{(1)}$ il contorno esterno. Allora l'indice d'allacciamento di $\Gamma_1^{(1)}$ con O vale 1, mentre valgono zero gli analoghi indici relativi a $\Gamma_1^{(2)}, \ldots, \Gamma_1^{(s)}$. Ne segue che l'indice d'allacciamento di $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)} + \cdots + \Gamma_1^{(s)}$ è 1; e tale indice non dipende dalla posizione di O (ciò che è confermato dal fatto che due punti qualunque interni al dominio connesso D_2 sono sempre tra loro omologhi in $S_2 - \Gamma_1$). Inoltre risulta $\Gamma_1 \sim 0$ in $(D_2 - O) + O = D_2$, poiché $D_2 \to \Gamma_1$.

indipendente dalla posizione di O, nè può essere altrimenti poiché, in generale, le condizioni topologiche I, II, III (n. 2) cui deve soddisfare W_n variano al variare di O.

È opportuno però sottolineare il fatto che:

a) *Se V_n è un ciclo adatto per il punto O, esso è altresì adatto per tutti i punti di un intorno abbastanza ristretto di O.*

Infatti, se è O' abbastanza prossimo ad O, risulta $T_{2n-2}(O')$ abbastanza prossimo a $T_{2n-2}(O)$, in guisa che V_n, non incontrando $T_{2n-2}(O)$, non incontra neppure $T_{2n-2}(O')$. Dunque V_n soddisfa alla I del n. 2 in relazione ad O', come vi soddisfa in relazione ad O. Si ha poi

$$\mathit{Allacc}\,(H_{n-1}(O'),\ V_n) = \mathit{Allacc}\,(H_{n-1}(O),\ V_n),$$

poiché $H_{n-1}(O') \sim H_{n-1}(O)$ in $S_{2n} - V_n$; onde anche la III è soddisfatta in relazione ad O' come ad O, ed inoltre l'intero N è il medesimo nei due casi. Infine, per mostrare che V_n soddisfa anche alla II in relazione ad O' come ad O, si ricordi (n. 3) che $V_n \sim \tau_n$ in $D_{2n} - T_{2n-2}(O)$, per cui esiste una varietà $(n+1)$-dimensionale B_{n+1} [9]), non incontrante $T_{2n-2}(O)$, tale che $B_{n+1} \to V_n - \tau_n$. Ora, per O' prossimo ad O, B_{n+1} non incontra neppure $T_{2n-2}(O')$, e quindi è altresì $V_n \sim \tau_n$ in $D_{2n} - T_{2n-2}(O')$. D'altra parte, costruendo la varietà congiungente O' con τ_n, si prova che $\tau_n \sim 0$ in $(D_{2n} - T_{2n-2}(O')) + O'$, tenuto conto che τ_n non incontra $T_{2n-2}(O')$. Ne segue che $V_n \sim 0$ in $(D_{2n} - T_{2n-2}(O')) + O'$.

Osserviamo ancora che, per $n > 1$, si presenta la circostanza (nuova rispetto al caso $n = 1$, e dipendente dal dislivello fra la dimensione n del ciclo W_n e la dimensione $2n - 1$ del ciclo Γ_{2n-1} contorno di D_{2n}) che, una volta fissato il punto O, un ciclo W_n adatto alla (1) e tracciato su Γ_{2n-1} non è univocamente determinato, ma è suscettibile di variare con larga arbitrarietà. Invero, si può intanto far variare il ciclo W_n ottenuto su Γ_{2n-1} con la costruzione indicata (n. 3), modificando i mutui rapporti dei raggi dell'n-toro τ_n; oppure si può deformare l'n-toro circolare τ_n in un n-toro prodotto di circuiti più generali, deformando in conseguenza il ciclo W_n che se ne ottiene (n. 3, Oss.). È evidente che, con siffate deformazioni, il ciclo W_n resta omologo a sè stesso in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$. In generale si può asserire che:

b) *Sopra Γ_{2n-1}, ogni ciclo ottenibile con una deformazione omologica qualunque in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$ da un ciclo W_n, tracciato su Γ_{2n-1} e adatto alla* (1) *in relazione ad un punto O, è ancora adatto alla* (1) *in relazione allo stesso punto O.*

[9]) Come varietà B_{n+1} può assumersi p. es. quella corrispondente all'intersezione virtuale $(C_{n+1}, D_{2n} - E_{2n})$ del n. 3.

Invero, variando W_n con un'omologia in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$, il ciclo continua a soddisfare alle condizioni topologiche I, II, III (n. 2) e non si altera il suo indice d'allacciamento con $H_{n-1}(O)$. La conclusione stessa può anche trarsi dal teorema di Cauchy-Poincaré in modo simile a quello indicato alla fine del n. 3.

Noteremo fin d'ora che è proprio da questa possibilità di variazione su Γ_{2n-1} del ciclo d'integrazione W_n, che dipende il teorema d'Hartogs.

Osservazione. — Si consideri su Γ_{2n-1} il ciclo d'integrazione $W_n(O)$ ottenuto, in corrispondenza al punto O, con la costruzione del n. 3. Esso, a norma di a), è adatto, oltre che per O, anche per tutti i punti O' di un intorno abbastanza ristretto di O. In relazione con la proprietà b), può chiedersi se accada più precisamente che, per ogni punto O' di un siffatto intorno, $W_n(O)$ sia un ciclo deducibile mediante una deformazione omologica in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O')$ dal ciclo $W_n(O')$ che si otterrebbe in relazione ad O' con la costruzione del n. 3. Così è di fatto, come ci si convince p. es. col ragionamento seguente. Una volta fissato l'n-toro circolare τ_n, che dà luogo a $W_n(O)$ (n. 3), si assuma come intorno del punto O un n-cilindro prodotto di n cerchi concentrici alle n circonferenze delle quali è prodotto τ_n, e con raggi inferiori ai raggi di queste. L'n-toro τ_n non ha allora alcun punto comune con $T_{2n-2}(O')$, essendo O' un punto qualunque dell'intorno; onde τ_n si presta per costruire, nel modo indicato al n. 3 (e Oss.) non soltanto il ciclo $W_n(O)$, ma anche cicli $W_n^*(O')$ adatti ai punti O'. Per ogni O', il ciclo $W_n(O')$ è omologo in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O')$ al ciclo $W_n(O')$, che ottiensi da un n-toro circolare con centro in O'. D'altronde, mentre un punto $\bar{O}$ varia nell'intorno fissato di O, passando dalla posizione O ad una determinata posizione O', il ciclo $W_n^*(\bar{O})$ varia passando dalla posizione $W_n(O)$ alla $W_n^*(O')$ senza mai incontrare $T_{2n-2}(O')$; per cui risulta

$$W_n(O) \sim W_n^*(O') \sim W_n(O') \quad \text{in} \quad \Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O') .$$

Dimostrazione del teorema d'Hartogs

5. Siano soddisfatte le ipotesi del teorema d'Hartogs (n. 1).

Si consideri la funzione $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, definita in ogni punto $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno al dominio D_{2n} dalla

$$g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{W_n(O)} \frac{f(z_1, \ldots, z_n)\ d(z_1, \ldots, z_n)}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)} , \tag{2}$$

dove il secondo membro abbia la forma stessa del secondo membro della formula di Cauchy, quale potrebbe scriversi per la funzione $f(z_1, \ldots, z_n)$

ove già si sapesse ch'essa è regolare in tutto D_{2n}. Si supporrà così, nella (2), che $W_n(O)$ sia un ciclo, dipendente dalla posizione del punto O, tracciato sul contorno irriducibile Γ_{2n-1} di D_{2n} e ottenuto con la costruzione del n. 3; ovvero sia un ciclo a quello omologo in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$ (n. 4, b). Il ciclo $W_n(O)$ soddisfa in tal modo alle condizioni topologiche I, II, III ($N = 1$) del n. 2, in relazione al dominio D_{2n}.

La funzione $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ resta univocamente definita dalla (2) nell'interno di D_{2n}, nonostante l'arbitrarietà indicata per $W_n(O)$, perché, con una deformazione omologica qualunque in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$, non s'altera il secondo membro della (2), come segue dal teorema di Cauchy-Poincaré tenuto conto che in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$ non cadono singolarità della funzione integranda.

Anzi, la $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ risulta analitica regolare nelle variabili $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Difatti, per tutti i punti O' appartenenti ad un intorno abbastanza ristretto di un determinato punto O interno a D_{2n}, può assumersi nella (2) come ciclo d'integrazione $W_n(O')$ un *medesimo* ciclo scelto tra i cicli $W_n(O)$ adatti per il punto O (n. 4a, e Oss.); e quindi $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ risulta analitica regolare di $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ in quell'intorno, siccome è tale in (2) la funzione integranda, per qualunque posizione del punto $(z_1, \ldots, z_n)$ sopra il fissato $W_n(O)$.

Ciò premesso, si sa che[10]), essendo $f(z_1, \ldots, z_n)$ per ipotesi analitica regolare ed univoca sopra Γ_{2n-1}, essa risulta in conseguenza univocamente definita e regolare in tutto uno strato $2n$-dimensionale Σ_{2n} comprendente Γ_{2n-1} all'interno, ed in particolare in uno strato Σ'_{2n} compreso tra Γ_{2n-1} e una ipersuperficie Γ'_{2n-1} interna e prossima a Γ_{2n-1}. È $\Sigma'_{2n} \subset D_{2n}$.

La $f(z_1, \ldots, z_n)$ può allora esprimersi, in ogni punto O interno a Σ'_{2n}, mediante la formula di Cauchy generale (con $N = 1$, se si vuole), il ciclo d'integrazione relativo essendo tracciato sul contorno $\Gamma_{2n-1} - \Gamma'_{2n-1}$ di Σ'_{2n}. Il secondo membro di tal formula non differisce dal secondo membro della (2) che al più per il ciclo d'integrazione. Quando di fatto accade che nelle due formule, in corrispondenza ad uno stesso punto O dello strato Σ'_{2n}, può assumersi il medesimo ciclo d'integrazione, ne segue che i valori della f e della g in O coincidono. Tale possibilità si verifica se il ciclo $W_n(O)$ che appare nella (2) e soddisfa alle condizioni topologiche I, II, III ($N = 1$) in relazione al dominio D_{2n}, soddisfa altresì alle condizioni stesse in relazione allo strato Σ'_{2n} (ovvero è omologo in $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$ ad un ciclo che vi soddisfa).

Basta anzi stabilire la possibilità indicata per i punti O di un intorno $2n$-dimensionale contenuto in Σ'_{2n}, per concluderne che, coincidendo la $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ con la $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ in quell'intorno, le due funzioni coinci-

[10]) Cfr. p. es. il n. 4 della mia nota cit. da principio.

dono — in base al principio d'identità — nell'intero strato Σ'_{2n}, ed inoltre la $f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ si prolunga analiticamente nella $g(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ in tutto D_{2n}: ciò che prova il teorema d'Hartogs.

6. Allo scopo, si consideri un punto $O(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ interno a Σ'_{2n}, tale che uno almeno degli S_{2n-2} caratteristici per esso che compongono $T_{2n-2}(O)$, p. es. quello di equazione $z_1=\zeta_1$, non incontri Γ'_{2n-1}.

Ci si convince dell'esistenza di qualche punto O siffatto, per esempio nel modo seguente. Consideriamo l'iperpiano $x_1=\lambda$ di S_{2n}, che si sposta parallelamente a se stesso al variare del parametro reale λ da $-\infty$ a $+\infty$. Poichè D_{2n} è limitato e serrato, esiste un primo valore λ' di λ, in corrispondenza al quale l'iperpiano incontra D_{2n}. Tale iperpiano, $x_1=\lambda'$, ha in comune con D_{2n} soltanto punti del contorno Γ_{2n-1}, onde non può incontrare Γ'_{2n-1} che è costituito da punti interni a D_{2n}. Per ε positivo abbastanza piccolo, anche l'iperpiano $x=\lambda'+\varepsilon$ non incontra Γ'_{2n-1}, pur avendo in comune con D_{2n} punti interni, appartenenti allo strato Σ'_{2n}. Se $O(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ $(\zeta_1=\xi_1+i\eta_1,\ \xi_1=\lambda'+\varepsilon)$ è uno di questi punti, esso soddisfa alla condizione desiderata, poichè lo S_{2n-2} $z_1=\zeta_1$ è contenuto nell'iperpiano $x_1=\lambda'+\varepsilon$.

Ebbene, dico che il ciclo $W_n(O)$, tracciato su Γ_{2n-1}, che appare nella (2) in corrispondenza al punto O, è omologo in $\Gamma_{2n-1}-T_{2n-2}(O)$ ad un ciclo soddisfacente alle condizioni topologiche I, II, III $(N=1)$ del n. 2 in relazione allo strato Σ'_{2n}. Invero, possono rendersi così piccoli i rapporti $\frac{r_1}{r_2},\ldots,\frac{r_1}{r_n}$ dei raggi dell'n-toro τ_n, mediante il quale si costruisce $W_n(O)$, in guisa che la varietà conica C_{n+1} proiettante τ_n da O (n. 3), non abbia punti comuni con Γ'_{2n-1} (giacchè, quando quei rapporti tendono a zero, C_{n+1} tende a schiacciarsi sopra lo $S_{2n-2}\, z_1=\zeta_1$). In tali condizioni risulta allora:

$$W_n(O)=(C_{n+1},\Gamma_{2n-1})=(C_{n+1},\Gamma_{2n-1}-\Gamma'_{2n-1}),$$

e quindi il ciclo $W_n(O)$ coincide col ciclo stesso che si costruirebbe (nel modo indicato al n. 3) in relazione al punto O e allo strato Σ'_{2n}, sul contorno $\Gamma_{2n-1}-\Gamma'_{2n-1}$ dello strato.

Si è dunque provato così, come volevasi (n. 5), che l'identica formula può servire per esprimere il valore delle funzioni f e g nel punto O; e la conclusione stessa sussiste per tutti i punti di un intorno $2n$-dimensionale di O abbastanza ristretto, poichè essi soddisfanno alla condizione medesima, dichiarata al principio di questo n., cui soddisfa il punto O.

(Reçu le 2 mai 1944.)