Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex.

Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex

Von Beno Eckmann, Lausanne

1. Es handelt sich um Verallgemeinerungen der folgenden bekannten und elementaren Aufgabe über diskrete Funktionen.

A) Man betrachtet in einem endlichen Ausschnitt aus dem Quadratgitter der Ebene eine reelle Funktion f der Eckpunkte. Jeder Eckpunkt hat vier oder weniger Nachbarpunkte; die Punkte mit vier Nachbaren sind innere Punkte, die übrigen Randpunkte des betrachteten Ausschnittes. In den Randpunkten gibt man die Werte von f vor; in den innern Punkten soll man die Funktion so bestimmen, daß ihr Wert gleich dem arithmetischen Mittel der vier Nachbarwerte ist. Mit Hilfe elementarer Sätze der linearen Algebra zeigt man leicht, daß dies immer möglich ist, und zwar auf eine einzige Art.

B) Wir ersetzen nun das Quadratgitter durch einen beliebigen endlichen Streckenkomplex K. Unter den Nachbaren eines Eckpunktes versteht man die Endpunkte der von ihm ausgehenden Kanten. In gewissen Eckpunkten von K — ihre Gesamtheit heiße R — seien die Werte einer Funktion f der Eckpunkte beliebig vorgegeben; in den übrigen Eckpunkten — ihre Gesamtheit heiße Q — soll man f so bestimmen, daß in jedem Eckpunkt aus Q der Wert gleich dem arithmetischen Mittel der Nachbarwerte ist. Dabei braucht R nicht etwa aus „Randpunkten" von K zu bestehen (in vielen Fällen hat es in K gar keinen Sinn, von solchen zu sprechen); es handelt sich einfach um willkürlich ausgewählte Punkte von K. — A) ist offenbar ein Spezialfall von B).

Wir werden zeigen, daß auch *diese Aufgabe B) immer eine Lösung besitzt; diese Lösung ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn die Eckpunktmenge R, in welcher die Werte von f vorgegeben werden, aus jeder Komponente des Streckenkomplexes K mindestens einen Eckpunkt enthält.* Dies wird sich im folgenden als Spezialfall eines allgemeineren Resultates ergeben.

C) Man kann nämlich ein ähnliches Problem in einem endlichen Zellenkomplex K beliebiger Dimension stellen. Man betrachtet darin eine reelle Funktion f der p-dimensionalen Zellen (die man für $p > 0$ beliebig, aber fest orientiert hat). Diese Zellen seien irgendwie in zwei Klassen R und Q

aufgeteilt; man gibt die Werte von f für die Zellen von R beliebig vor und soll sie für die Zellen von Q so bestimmen, daß in diesen eine gewisse Mittelwertseigenschaft bezüglich der Nachbarzellen vorhanden ist.

Auch hier existiert immer eine Lösung, und sie ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn R im Zellenkomplex K bestimmte geometrische Bedingungen erfüllt. Dies zu beweisen ist der Zweck der vorliegenden Zeilen; wir haben dabei noch die in Frage stehende Mittelwertseigenschaft zu präzisieren und die richtigen geometrischen Bedingungen für R anzugeben.

Unsere Fragestellung gehört offenbar in den Rahmen der *kombinatorischen Topologie* und, weil sich die Mittelwertsforderung durch lineare Gleichungen ausdrückt, der *linearen Algebra;* die Methode, mit der wir sie behandeln, läuft im wesentlichen auf eine orthogonale Projektion in Vektorräumen hinaus. Die Darstellung wird besonders kurz und übersichtlich, wenn man den Formalismus der *Homologie- und Cohomologietheorie mit reellen Koeffizienten* benützt.

2. Im § 1 stellen wir die wichtigsten Elemente und Formeln dieser Theorie, in einer für uns geeigneten Form, zusammen. Im Mittelpunkt stehen dabei die Zerlegungssätze von Whitney[1]) und de Rham[1]). — In einem Anhang besprechen wir eine Aufgabe, die direkt nichts mit den eingangs genannten zu tun hat, aber in denselben Gedankenkreis gehört und als einfaches Beispiel für unsere Methode der orthogonalen Projektion dienen kann: die Bestimmung der elektrischen Stromverteilung in einem Leiternetz auf Grund der Kirchhoffschen Regeln; wir halten uns dabei im wesentlichen an die von H. Weyl[2]) gegebene Lösung.

Im § 2 geben wir der Aufgabe B) eine Form, die sich ohne weiteres im Sinne von C) auf höhere Dimensionen übertragen läßt, und formulieren gleichzeitig eine ähnliche, zu C) duale Aufgabe. Dann beweisen wir für beide die Existenz von Lösungen und bestimmen die geometrischen Bedingungen, die für die Eindeutigkeit der Lösungen notwendig und hinreichend sind.

Die Idee, die genannten elementaren Aufgaben mit kombinatorisch-topologischen Methoden zu behandeln und zu verallgemeinern, verdanke ich einer Anregung von Herrn Prof. H. Hopf.

---

[1]) *H. Whitney*, On products in a complex, Annals of Mathematics 39 (1938), 397—432, besonders S. 430. — *G. de Rham*, Sur une décomposition des chaînes d'un complexe, C. R. des séances de la Soc. Math. Suisse 1941 (Enseign. math. XXXIX, 1944), 7—8.

[2]) *H. Weyl*, Repartitiön de corriente en una red conductora, Revista matemática Hispano-Americana 5 (1923), 153—164.

§ 1.

3. K sei ein endlicher n-dimensionaler Zellenkomplex[3]). Seine Eckpunkte oder 0-dimensionalen Zellen bezeichnen wir mit x_i^0 $(i = 1, \ldots, \alpha^0)$ und für $p = 1, 2, \ldots, n$ seine p-dimensionalen, beliebig (aber fest) orientierten Zellen mit x_i^p $(i = 1, \ldots, \alpha^p)$.

Eine *reelle p-dimensionale Kette* (p sei eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n$) ist eine Linearform

$$A^p = \sum_{i=1}^{\alpha^p} a_i\, x_i^p$$

mit reellen Koeffizienten a_i in den x_i^p, die hier als Unbestimmte aufgefaßt werden. Wir betrachten A^p auch als Vektor $(a_1, \ldots, a_{\alpha^p})$ eines reellen Vektorraumes $\mathfrak{B}^p$ vom Rang α^p; die additive Gruppe aller p-dimensionalen Ketten bzw. die Vektorgruppe dieses Raumes bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathfrak{B}^p$.

Man kann mit diesem Begriff der Kette zweierlei zum Ausdruck bringen. Entweder deutet man sie als *geometrisches Gebilde*, das aus (orientierten) Zellen besteht, jede mit einer bestimmten reellen Vielfachheit genommen (wobei man für $p \geqslant 1$ unter $-x_i^p$ die andere Orientierung von x_i^p versteht und es dasselbe bedeutet, daß x_i^p mit dem Koeffizienten a_i wie daß $-x_i^p$ mit dem Koeffizienten $-a_i$ auftritt). Oder man deutet sie als *Funktion* f der p-dimensionalen Zellen, welche auf x_i^p den Wert $f(x_i^p) = a_i$ annimmt (oder auf $-x_i^p$ den Wert $-a_i$, also eine „ungerade" Funktion). Man beachte, daß dies lediglich zwei Möglichkeiten sind, den rein algebraischen Begriff der Kette „anschaulich" zu interpretieren; wir werden sie nach Bedarf heranziehen, ohne daß dies am Operieren mit den Ketten etwas ändert.

4. p sei eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Der Rand rx_i^p der Zelle x_i^p ist eine $(p-1)$-dimensionale Kette, die aus den Randzellen von x_i^p mit der durch x_i^p induzierten Orientierung „besteht", d. h. in welcher diese Randzellen mit dem Koeffizienten $+1$ auftreten, die übrigen $(p-1)$-dimensionalen Zellen mit dem Koeffizienten 0 (der Rand rx_i^1 einer 1-dimensionalen Zelle, d. h. einer gerichteten Kante x_i^1 ist die 0-dimensionale Kette $x_j^0 - x_l^0$, wenn x_l^0 der Anfangs- und x_j^0 der Endpunkt dieser Kante ist); sie ist also von der Form

$$r\, x_i^p = \sum_{k=1}^{\alpha^{p-1}} \eta_{ik}^p\, x_k^{p-1}\,. \tag{1}$$

---

[3]) Vgl. *P. Alexandroff* und *H. Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), Kap. III und VI. — Oder *H. Seifert* und *W. Threlfall*, Lehrbuch der Topologie (Leipzig und Berlin 1934), § 67.

Die Zahlen η^p_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, \alpha^p;\ k = 1, 2, \ldots, \alpha^{p-1})$, die $= +1, -1$ oder 0 sind, heißen *Inzidenzzahlen* des Komplexes K. Mit ihrer Hilfe definiert man auch den *Corand* ϱx^{p-1}_k der Zelle x^{p-1}_k als p-dimensionale Kette

$$\varrho x^{p-1}_k = \sum_{i=1}^{\alpha^p} \eta^p_{ik}\, x^p_i\ ; \tag{2}$$

sie „besteht" aus denjenigen orientierten p-dimensionalen Zellen, auf deren Rand x^{p-1}_k mit dem Koeffizienten $+1$ auftritt. Wir bezeichnen gelegentlich ϱx^{p-1}_k auch als *Büschel* von x^{p-1}_k.

Definiert man den Rand der Kette $A^p = \sum\limits_i a_i x^p_i$ und den Corand der Kette $B^{p-1} = \sum\limits_k b_k x^{p-1}_k$ linear durch die Ausdrücke

$$rA^p = \sum_{i=1}^{\alpha^p} a_i\, r\, x^p_i = \sum_{k=1}^{\alpha^{p-1}} \Big(\sum_{i=1}^{\alpha^p} \eta^p_{ik}\, a_i \Big)\, x^{p-1}_k ,$$

$$\varrho B^{p-1} = \sum_{k=1}^{\alpha^{p-1}} b_k\, \varrho\, x^{p-1}_k = \sum_{i=1}^{\alpha^p} \Big(\sum_{k=1}^{\alpha^{p-1}} \eta^p_{ik}\, b_k \Big)\, x^p_i ,$$

dann ist r eine lineare Abbildung von $\mathfrak{B}^p$ in $\mathfrak{B}^{p-1}$, ϱ die dazu *duale*[4]) lineare Abbildung von $\mathfrak{B}^{p-1}$ in $\mathfrak{B}^p$. Die Ränder der p-dimensionalen Ketten bilden einen linearen Teilraum $\mathfrak{R}^{p-1} = r\mathfrak{B}^p$ von $\mathfrak{B}^{p-1}$, die Coränder der $(p-1)$-dimensionalen Ketten einen Teilraum $\overline{\mathfrak{R}}^p = \varrho\mathfrak{B}^{p-1}$ von $\mathfrak{B}^p$. Die Ketten, deren Rand (Corand) $= 0$ ist, heißen *Zyklen* (*Cozyklen*); sie bilden einen linearen Teilraum $\mathfrak{Z}^p$ von $\mathfrak{B}^p$ ($\overline{\mathfrak{Z}}^{p-1}$ von $\mathfrak{B}^{p-1}$), den Kern der linearen Abbildung r (bzw. ϱ).

Für die Dimensionen 0 und n ergänzt man diese Festsetzungen in der folgenden naheliegenden und trivialen Weise: Für $p < 0$ und $p > n$ bedeute $\mathfrak{B}^p$ die Nullgruppe; als Rand einer 0-dimensionalen und als Corand einer n-dimensionalen Kette definiert man die Kette 0. Dann ist $\mathfrak{Z}^0 = \mathfrak{B}^0$ und $\overline{\mathfrak{Z}}^n = \mathfrak{B}^n$, ferner $\overline{\mathfrak{R}}^0 = \varrho\mathfrak{B}^{-1} = 0$ und $\mathfrak{R}^n = r\mathfrak{B}^{n+1} = 0$.

Es sind also in natürlicher Weise in den Vektorräumen $\mathfrak{B}^p$ $(p = 0, 1, \ldots, n)$ je vier lineare Teilräume $\mathfrak{R}^p$, $\overline{\mathfrak{R}}^p$, $\mathfrak{Z}^p$ und $\overline{\mathfrak{Z}}^p$ ausgezeichnet; für sie gelten die Inklusionen

$$\mathfrak{R}^p \subset \mathfrak{Z}^p \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{R}}^p \subset \overline{\mathfrak{Z}}^p .$$

---

[4]) Ist die lineare Abbildung l des Vektorraumes $\mathfrak{B}_1$ in den Vektorraum $\mathfrak{B}_2$ bezüglich bestimmter Basen durch die Matrix L gegeben, so versteht man unter der zu l dualen Abbildung λ die bezüglich derselben Basen durch die *transponierte* Matrix L' gegebene Abbildung von $\mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{B}_1$.

Denn für jede Zelle x_i^p ist bekanntlich[3]) $r r x_i^p = 0$; rr und somit auch die dazu duale lineare Abbildung $\varrho\varrho$ bilden also alle Ketten auf 0 ab: Jeder Rand ist ein Zyklus und jeder Corand ein Cozyklus. — In Nr. 5 werden wir weitere Beziehungen zwischen diesen Teilräumen aufstellen.

Zwei Ketten A^p und B^p heißen zueinander homolog, wenn ihre Differenz ein Rand, cohomolog, wenn ihre Differenz ein Corand ist. Man kann $\mathfrak{V}^p$ in Homologieklassen (Klassen untereinander homologer Ketten) und ebenso in Cohomologieklassen zerlegen; das sind die Restklassen der Vektorgruppe $\mathfrak{V}^p$ nach der Untergruppe $\mathfrak{R}^p$ bzw. $\overline{\mathfrak{R}}^p$. Unter der p-ten Homologiegruppe des Komplexes versteht man die Restklassengruppe von $\mathfrak{Z}^p$ nach $\mathfrak{R}^p$, unter der p-ten Cohomologiegruppe diejenige von $\overline{\mathfrak{Z}}^p$ nach $\overline{\mathfrak{R}}^p$.

5. Im Vektorraum $\mathfrak{V}^p (p = 0, 1, \ldots, n)$ sei das *skalare Produkt* der Ketten $A^p = \sum_i a_i x_i^p$ und $A'^p = \sum_i a'_i x_i^p$ durch

$$A^p \cdot A'^p = \sum_{i=1}^{\alpha^p} a_i a'_i \tag{3}$$

definiert; zwei Ketten, deren skalares Produkt 0 ist, heißen *orthogonal*.

Es gilt nun

$$\varrho x_k^{p-1} \cdot x_i^p = \sum_{j=1}^{\alpha^p} \eta_{jk}^p x_j^p \cdot x_i^p = \eta_{ik}^p$$

und

$$x_k^{p-1} \cdot r x_i^p = \sum_{l=1}^{\alpha^{p-1}} x_k^{p-1} \cdot \eta_{il}^p x_l^{p-1} = \eta_{ik}^p ,$$

also

$$\varrho x_k^{p-1} \cdot x_i^p = x_k^{p-1} \cdot r x_i^p$$

und für zwei beliebige Ketten A^p und B^{p-1}

$$\varrho B^{p-1} \cdot A^p = B^{p-1} \cdot r A^p . \tag{4}$$

Offenbar ließe sich durch diese Formel ϱ definieren, wenn r durch (1) gegeben ist, und ebenso r, wenn ϱ durch (2) gegeben ist.

Aus (4) entnimmt man nun leicht wichtige Beziehungen zwischen den vier Teilräumen $\mathfrak{R}^p$, $\overline{\mathfrak{R}}^p$, $\mathfrak{Z}^p$ und $\overline{\mathfrak{Z}}^p$ von $\mathfrak{V}^p$. Ist nämlich A^p ein Zyklus, dann ist

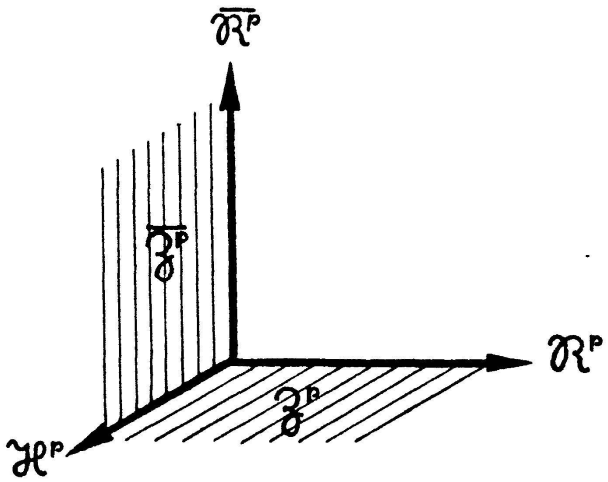
$$\varrho B^{p-1} \cdot A^p = B^{p-1} \cdot r A^p = 0 ;$$

und wenn für alle Coränder ϱB^{p-1}

$$\varrho B^{p-1} \cdot A^p = 0$$

ist, so muß $B^{p-1} \cdot rA^p = 0$ sein für alle B^{p-1}, also $rA^p = 0$, d. h. A^p ist ein Zyklus. *Eine Kette A^p ist also genau dann ein Zyklus, wenn sie zu allen Corändern ϱB^{p-1} orthogonal ist.* $\mathfrak{Z}^p$ ist somit in $\mathfrak{V}^p$ der totale zu $\overline{\mathfrak{R}}^p$ orthogonale Teilraum. Eine solche Beziehung zwischen linearen Teilräumen eines Vektorraumes ist bekanntlich symmetrisch (jedenfalls bei dem hier zugrunde gelegten Skalarprodukt). *Eine Kette C^p ist also genau dann ein Corand, wenn sie zu allen Zyklen A^p orthogonal ist.* — Dieselben Beziehungen bestehen natürlich zwischen *Cozyklen und Rändern.*

$\mathfrak{Z}^p$ und $\overline{\mathfrak{R}}^p$, und ebenso $\overline{\mathfrak{Z}}^p$ und $\mathfrak{R}^p$ sind also im Vektorraum $\mathfrak{V}^p$ totale zueinander orthogonale Teilräume. Folgendes Schema stellt diese Verhältnisse dar (unter der Annahme, daß $\mathfrak{V}^p$ 3-dimensional ist, und daß $\mathfrak{R}^p$ und $\overline{\mathfrak{R}}^p$ 1-dimensional sind):



Eine Kette, deren Rand und deren Corand 0 ist, heißt *harmonisch.* Die p-dimensionalen harmonischen Ketten bilden einen Teilraum $\mathfrak{H}^p$ von $\mathfrak{V}^p$, den Durchschnitt von $\mathfrak{Z}^p$ und $\overline{\mathfrak{Z}}^p$; der totale zu $\mathfrak{H}^p$ orthogonale Raum ist aufgespannt durch $\mathfrak{R}^p$ und $\overline{\mathfrak{R}}^p$; $\mathfrak{H}^p$ und $\mathfrak{R}^p$ spannen den Raum $\mathfrak{Z}^p$ auf, $\mathfrak{H}^p$ und $\overline{\mathfrak{R}}^p$ den Raum $\overline{\mathfrak{Z}}^p$. Der Rang von $\mathfrak{H}^p$ ist die p-te Bettische Zahl des Komplexes K; er ist gleich dem Rang der p-ten Homologie- oder der p-ten Cohomologiegruppe von K, da beide zu $\mathfrak{H}^p$ isomorph sind.

6. Wir deuten gelegentlich in dem in Nr. 3 erläuterten Sinne im skalaren Produkt $A^p \cdot A'^p$ die eine der beiden Ketten als Funktion f der p-dimensionalen Zellen x_i^p, die andere als geometrisches Gebilde (Integrationsbereich), das skalare Produkt $A^p \cdot A'^p$ als *Wert* (*oder Integral*) *der Funktion f auf diesem Bereich.* Dann kann man die grundlegende Formel (4) auch so aussprechen: ϱB^{p-1} ist diejenige Funktion, welche auf jeder Zelle x_i^p den Wert annimmt, welchen B^{p-1} auf dem Rand von x_i^p hat. Oder auch: rA^p ist diejenige Funktion, welche auf jeder Zelle

x_k^{p-1} den Wert annimmt, welchen A^p auf dem Büschel von x_k^{p-1} hat. Und die Orthogonalitätsbeziehung zwischen $\mathfrak{Z}^p$ und $\mathfrak{R}^p$ ($\overline{\mathfrak{Z}}^p$ und $\mathfrak{R}^p$) können wir so formulieren: *Die Zyklen sind dadurch charakterisiert, daß ihr Wert auf allen Büscheln* 0 *ist, die Cozyklen dadurch, daß ihr Wert auf allen Rändern* 0 *ist; die Zyklen sind quellenfreie, die Cozyklen wirbelfreie Funktionen.* Ähnlich lassen sich die Ränder und Coränder charakterisieren: sie haben auf allen Cozyklen bzw. Zyklen den Wert 0. *Die harmonischen Ketten sind quellen- und wirbelfrei.*

7. Aus den Orthogonalitätsbeziehungen, die für die ausgezeichneten Teilräume in $\mathfrak{B}^p$ bestehen, ergeben sich unmittelbar folgende Zerlegungssätze[1]) für Ketten.

Jede beliebige Kette A^p läßt sich auf eine und nur eine Art zerlegen in die Summe eines Zyklus Z^p und eines Corandes, oder in die Summe eines Cozyklus C^p und eines Randes, oder in die Summe einer harmonischen Kette H^p, eines Corandes und eines Randes:

$$\begin{aligned} A^p &= Z^p + \varrho D^{p-1} \\ &= C^p + r E^{p+1} \\ &= H^p + \varrho D^{p-1} + r E^{p+1}\,. \end{aligned}$$

Noch anders formuliert: Zu jeder Kette A^p gehört ein wohlbestimmter Zyklus Z^p derart, daß $A^p - Z^p$ zu $\mathfrak{Z}^p$ orthogonal ist; Z^p ist also die *Orthogonalprojektion von A^p in $\mathfrak{Z}^p$*. Ebenso gibt es eine wohlbestimmte Orthogonalprojektion C^p von A^p in $\overline{\mathfrak{Z}}^p$ und H^p von A^p in $\mathfrak{H}^p$, und ganz allgemein eine Orthogonalprojektion A_0^p von A^p in irgendeinen linearen Teilraum $\mathfrak{L}^p$ von $\mathfrak{B}^p$.

8. Einige Bemerkungen.

a) Es ist leicht zu sehen, daß in den zwischen den ausgezeichneten Teilräumen von $\mathfrak{B}^p$ bestehenden Beziehungen viele wichtige Sätze der kombinatorischen Topologie stecken (wenigstens ihr algebraischer Teil).

b) Man kann in den Vektorräumen $\mathfrak{B}^p$ das skalare Produkt zweier Ketten $A^p = \sum\limits_i a_i x_i^p$ und $A'^p = \sum\limits_i a'_i x_i^p$ statt durch (3) mit Hilfe einer beliebigen positiv definitiven quadratischen Form $\sum\limits_{ij} w_{ij} u_i u_j$ durch

$$A^p \cdot A'^p = \sum_{i,j=1}^{\alpha^p} w_{ij}\, a_i\, a'_j \tag{5}$$

definieren und, wenn die Randbildung r immer durch (1) mit den Inzidenzzahlen η_{ik}^p gegeben ist, den Corand ϱ so festsetzen, daß die Formel

(4) gilt. An allen übrigen Betrachtungen, insbesondere an der Existenz und der Eindeutigkeit der orthogonalen Projektion, ändert sich dann nichts.

c) Wir betrachten gelegentlich *Teilketten* folgender Art. K^p sei das p-dimensionale Gerüst von K, d. h. die Menge aller p-dimensionalen Zellen[5]) von K. R sei ein Teil von K^p, d. h. bestehe aus einigen, beliebig ausgewählten p-dimensionalen Zellen[5]). Wir sagen, eine Kette A^p liege in R

$$A^p \subset R\,,$$

wenn in A^p höchstens Koeffizienten von Zellen aus R von 0 verschieden sind. Die Zellen x_i^p aus R spannen einen linearen Teilraum $\mathfrak{B}_R^p$ von $\mathfrak{B}^p$ auf; daß A^p in R liegt, ist gleichbedeutend damit, daß der Vektor A^p zu $\mathfrak{B}_R^p$ gehört ($A^p \in \mathfrak{B}_R^p$). Die Ränder und die Coränder der Ketten aus R bilden lineare Teilräume $r\,\mathfrak{B}_R^p$ von $\mathfrak{R}^{p-1}$ bzw. $\varrho\,\mathfrak{B}_R^p$ von $\overline{\mathfrak{R}}^{p+1}$.

9. Anhang. *Stromverteilung in einem Leiternetz.*

K sei ein endlicher Streckenkomplex, Schema eines elektrischen Leiternetzes; die (gerichteten) Kanten x_i^1 entsprechen den Drähten. $w_i > 0$ sei der Ohmsche Widerstand von x_i^1, e_i die auf x_i^1 eingeführte elektromotorische Kraft (eingeprägte Spannung), gemessen im Sinne von x_i^1, s_i die Stromstärke auf x_i^1, positiv genommen, wenn der Strom in der Richtung von x_i^1 fließt. Wir ordnen der Stromverteilung die Kette

$$S^1 = \sum_{i=1}^{\alpha^1} s_i\, x_i^1$$

zu, den eingeprägten Spannungen die Kette

$$E^1 = \sum_{i=1}^{\alpha^1} e_i'\, x_i^1\,,$$

wo $e_i' = \dfrac{e_i}{w_i}$ gesetzt ist. In $\mathfrak{B}^1$ sei das skalare Produkt zweier Ketten A^1 und A'^1 durch

$$A^1 \cdot A'^1 = \sum_{i=1}^{\alpha^1} w_i\, a_i\, a_i' \tag{6}$$

definiert (vgl. Nr. 8b).

Für die Stromverteilung sind nun die *Kirchhoffschen Regeln* maßgebend. Die *erste* verlangt, daß in jedem Eckpunkt x_k^0 die algebraische

---

[5]) Wird K^p (oder R) als Komplex betrachtet, so muß man auch die Seiten dieser Zellen dazu rechnen.

Summe der gegen den Punkt fließenden Ströme 0 sei; das bedeutet, daß S^1 auf allen Büscheln ϱx_k^0 den Wert 0 hat, d. h. daß S^1 *ein Zyklus ist.* Die *zweite* besagt, daß auf jedem einfach geschlossenen, in bestimmtem Sinn durchlaufenen Polygon in K die Summe der eingeprägten Spannungen gleich der Summe der Ohmschen Potentialabfälle ist. Wir ordnen einem solchen Polygon die Kette

$$P^1 = \sum_{i=1}^{\alpha^1} p_i \, x_i^1$$

zu, wo p_i nur dann $\neq 0$ ist, wenn x_i^1 dem Polygon angehört, und zwar $p_i = +1$ oder -1, je nachdem der Durchlaufungssinn mit der Orientierung von x_i^1 übereinstimmt oder nicht; $\sum\limits_i p_i s_i w_i$ ist dann die Summe der Potentialabfälle auf dem Polygon, $\sum\limits_i p_i e_i$ die Summe der eingeprägten Spannungen, beide gemessen im Sinne des Polygons, und es soll

$$\sum_{i=1}^{\alpha^1} p_i \, e_i = \sum_{i=1}^{\alpha^1} p_i \, s_i \, w_i$$

sein, oder auch

$$\sum_{i=1}^{\alpha^1} w_i \, p_i (e_i' - s_i) = 0 \; ,$$

also

$$P^1 \cdot (E^1 - S^1) = 0$$

für jedes Polygon P^1. Nun läßt sich aber bekanntlich[6]) der Raum $\mathfrak{Z}^1$ der Zyklen ganz von Polygonen P^1 aufspannen. Die Aufgabe, bei gegebenen Stromquellen und Widerständen den Strom so zu bestimmen, daß er den beiden Kirchhoffschen Regeln genügt, kann man also so formulieren:

Die Kette E^1 der eingeprägten Spannungen ist gegeben; man sucht einen Zyklus S^1 derart, daß $E^1 - S^1$ zum Raum $\mathfrak{Z}^1$ der Zyklen orthogonal ist.

Diese Aufgabe besitzt aber immer eine und nur eine Lösung: S^1 *ist die Orthogonalprojektion von* E^1 *in* $\mathfrak{Z}^1$. Die Kirchhoffschen Bedingungen sind also verträglich, und sie genügen, um die Stromintensitäten in den einzelnen Drähten zu berechnen. Dieses Resultat wurde erstmals von H. Weyl[2]) vollständig bewiesen. —

Der Übergang von E^1 zu S^1 ist also eine orthogonale Projektion im Vektorraum $\mathfrak{V}^1$, somit eine lineare Abbildung

---

[6]) Jeder 1-dimensionale Zyklus ist Linearkombination mit reellen Koeffizienten von Polygonen. Vgl. *D. König*, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Leipzig 1936), S. 123, Satz 1.

$$s_i = \sum_{j=1}^{\alpha_1} u_{ij}\, e_j' = \sum_{j=1}^{\alpha^1} v_{ij}\, e_j\,, \qquad i = 1,\ldots,\alpha^1\,,$$

(mit $v_{ij} = \frac{u_{ij}}{w_j}$), und wenn man die Matrix u_{ij} oder v_{ij} kennt, so hat man eine *explizite* Lösung der Kirchhoffschen Aufgabe; man findet diese Matrix leicht in bekannter Weise mit Hilfe einer Basis des zu $\mathfrak{Z}^1$ totalen orthogonalen Raumes $\overline{\mathfrak{R}}^1$. Wir wollen hier nur auf eine besondere Eigenschaft dieser Matrix hinweisen.

Die Matrix einer orthogonalen Projektion ist bekanntlich immer symmetrisch, wenn man sich auf eine orthogonale und normierte Basis von $\mathfrak{B}_1$ bezieht. Wegen unserer Wahl des skalaren Produkts (6) bilden die x_i^1 keine solche Basis, wohl aber die Vektoren

$$\bar{x}_i^1 = \frac{x_i^1}{\sqrt{w_i}}\,, \qquad i = 1,\ldots,\alpha^1\,.$$

In dieser Basis haben S^1 und E^1 die Komponenten $\bar{s}_i = \sqrt{w_i}\, s_i$ und $\bar{e}_i = \sqrt{w_i}\, e_i' = \frac{e_i}{\sqrt{w_i}}$, und es ist

$$\bar{s}_i = \sum_{j=1}^{\alpha^1} \bar{u}_{ij}\, \bar{e}_j\,, \qquad i = 1,\ldots,\alpha^1$$

mit symmetrischer Matrix $\bar{u}_{ij} = \bar{u}_{ji}$. Also wird

$$\sqrt{w_i}\, s_i = \sum_{j=1}^{\alpha^1} \bar{u}_{ij} \frac{e_j}{\sqrt{w_j}}\,,$$

$$s_i = \sum_{j=1}^{\alpha^1} \frac{\bar{u}_{ij}}{\sqrt{w_i w_j}}\, e_j = \sum_{j=1}^{\alpha^1} v_{ij}\, e_j\,, \quad i = 1,\ldots,\alpha^1\,,$$

wobei $v_{ij} = v_{ji}$ ist. *In der expliziten Lösung* $s_i = \sum_j v_{ij} e_j$ *ist also* v_{ij} *eine symmetrische Matrix.* Darin kommt eine interessante Symmetrie zwischen Strom und Spannung zum Ausdruck: Führt man in x_j^1 die Spannung 1 ein und sonst überall 0, so ist die in x_i^1 auftretende Stromstärke gleich derjenigen, die in x_j^1 auftritt, wenn man in x_i^1 die Spannung 1 einführt und sonst überall 0.

§ 2.

10. Wir gehen nun zu der Behandlung von Randwertaufgaben über, wie sie in der Einleitung genannt wurden: man sucht in einem Komplex diskrete Funktionen (Ketten), welche gewisse Mittelwertseigenschaften haben und gleichzeitig Randbedingungen erfüllen.

Um an die Aufgabe B) aus Nr. 1 anzuknüpfen, betrachten wir einen Streckenkomplex K und teilen seine Eckpunkte in zwei Klassen R und Q ein. Wir suchen eine Funktion der Eckpunkte x_i^0, d. h. eine Kette $A^0 = \sum_i a_i x_i^0$, welche in den Eckpunkten aus R vorgegebene Werte hat und in denen von Q dem „Mittelwertsatz genügt"; letzteres besagt, daß etwa im Punkt x_1^0 mit den Nachbaren $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_l^0$

$$(l - 1)\, a_1 = a_2 + a_3 + \cdots + a_l$$

sein soll, oder

$$a_2 - a_1 + a_3 - a_1 + \cdots + a_l - a_1 = 0 \, .$$

Nun ist aber der Rand des Büschels von x_1^0

$$r \varrho x_1^0 = x_2^0 - x_1^0 + x_3^0 - x_1^0 + \cdots + x_l^0 - x_1^0 \, ,$$

und der Wert[7]) von A^0 auf $r \varrho x_1^0$

$$A^0 \cdot r \varrho x_1^0 = a_2 - a_1 + a_3 - a_1 + \cdots + a_l - a_1 \, .$$

Die Gültigkeit des Mittelwertsatzes in einem Punkte bedeutet also, *daß A^0 auf dem Rand des Büschels dieses Punktes den Wert 0 hat.* Die Werte der Kette A^0 sind also in R gegeben und sollen in Q so bestimmt werden, daß der Wert von A^0 auf dem Rand des Büschels eines jeden Punktes von Q gleich 0 ist. Gibt es eine solche Kette, und ist sie eindeutig bestimmt?

11. Wir wollen dieselbe Frage sogleich für eine beliebige Dimensionszahl stellen (Aufgabe C) aus Nr. 1) und werden sie in dieser allgemeinen Form beantworten.

K sei ein beliebiger n-dimensionaler Zellenkomplex, p eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n$. Die Zellen x_i^p des p-dimensionalen Gerüstes K^p seien irgendwie in zwei Klassen R und Q eingeteilt, wobei Q nicht leer sei.

C) *Die Werte einer p-dimensionalen Kette A^p seien in R vorgegeben und sollen in Q so bestimmt werden, daß der Wert von A^p auf dem Rand des Büschels einer jeden Zelle x_i^p von Q gleich 0 sei:*

$$A^p \cdot r \varrho x_i^p = 0 \, .$$

---

[7]) Das Skalarprodukt soll in diesem Paragraphen immer durch die Einheitsform (3) definiert sein. Man könnte alle Überlegungen mit sinngemäßen Änderungen auch mit einem andern Skalarprodukt durchführen.

Auf Grund von (4) kann man diese Forderung umformen und erhält

$$A^p \cdot r\varrho x_i^p = \varrho A^p \cdot \varrho x_i^p = r\varrho A^p \cdot x_i^p = 0$$

für alle Zellen x_i^p von Q. Wir spalten noch A^p auf in die Summe

$$A^p = B^p + C^p$$

einer (gegebenen) Kette $B^p \subset R$ und einer (gesuchten) Kette $C^p \subset Q$ und formulieren schließlich die Aufgabe kurz so:

$$\text{C)} \quad A^p = B^p \text{ in } R\,, \quad \text{und} \quad r\varrho A^p = 0 \text{ in } Q\,.$$

Eine naheliegende Variante dieser Aufgabe erhält man durch Vertauschung von r und ϱ, nämlich

$$\text{C}') \quad A^p = B^p \text{ in } R, \quad \text{und} \quad \varrho r A^p = 0 \text{ in } Q\,;$$

dies bedeutet, daß die Kette A^p, deren Werte in R vorgegeben sind, in *Q auf dem Büschel eines jeden Randes $\varrho r x_i^p$ den Wert 0 haben soll.*

Die aufgestellten Forderungen drücken Mittelwertseigenschaften aus; sie können aber auch so ausgelegt werden, daß gewisse von A^p abgeleitete Ketten *lokal* harmonisch (quellen- und wirbelfrei) sind. So gilt bei der Aufgabe C) für jede Zelle x_i^p von Q

$$r\varrho A^p \cdot x_i^p = 0\,,$$

also

$$\varrho A^p \cdot \varrho x_i^p = 0\,,$$

d. h. ϱA^p ist in Q quellenfrei; wirbelfrei ist ϱA^p ohnehin überall, da es ein Cozyklus ist. Analog ist bei C′) $r A^p$ in Q wirbelfrei (und überall quellenfrei).

12. Wir wenden uns zuerst der Aufgabe C) zu und behaupten zunächst, daß sie immer mindestens eine Lösung A^p besitzt.

Beweis. $\mathfrak{V}_R^p$ und $\mathfrak{V}_Q^p$ seien die Räume der p-dimensionalen Ketten aus R bzw. Q (vgl. Nr. 8c); sie sind zueinander orthogonal und spannen den ganzen Raum $\mathfrak{V}^p$ auf.

Die Kette $B^p \in \mathfrak{V}_R^p$ ist gegeben. Wir betrachten statt A^p die Kette $C^p \in \mathfrak{V}_Q^p$ als Unbekannte; sie hat die Bedingung

$$r\varrho(B^p + C^p) \in \mathfrak{B}^p_R$$

zu erfüllen, oder

$$r\varrho(B^p + C^p) \cdot D^p = 0$$

für alle $D^p \in \mathfrak{B}^p_Q$. Gleichbedeutend damit ist nach (4)

$$\varrho(B^p + C^p) \cdot \varrho D^p = 0$$

für alle $D^p \in \mathfrak{B}^p_Q$, d. h. $\varrho B^p + \varrho C^p$ soll zu $\varrho\mathfrak{B}^p_Q$ orthogonal sein, wobei ϱC^p selbst zu $\varrho\mathfrak{B}^p_Q$ gehört. Diese Bedingung läßt sich aber immer erfüllen, und sie bestimmt ϱC^p eindeutig: *ϱC^p ist die Orthogonalprojektion von $-\varrho B^p$ in den Raum $\varrho\mathfrak{B}^p_Q \subset \overline{\mathfrak{R}}^{p+1}$.*

Diese Orthogonalprojektion ist, da sie in $\varrho\mathfrak{B}^p_Q$ liegt, tatsächlich Corand mindestens einer Kette $C^p \in \mathfrak{B}^p_Q$. Es gibt also immer eine Lösung C^p (oder A^p); sie ist aber im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

13. Man ersieht aber aus dem eben Gesagten unmittelbar, daß die Lösung C^p (oder A^p) der Aufgabe C) genau dann eindeutig bestimmt ist, wenn der Bereich Q folgende Eigenschaft hat: Für zwei Ketten $C^p, C^p_1 \in \mathfrak{B}^p_Q$ folgt aus $\varrho C^p = \varrho C^p_1$ stets $C^p = C^p_1$. D. h. aus $C^p \in \mathfrak{B}^p_Q$, $\varrho C^p = 0$ folgt $C^p = 0$; *es gibt in Q außer* 0 *keinen Cozyklus.*

Genau gleich geht man bei der Aufgabe C′) vor. Sie bestimmt rC^p eindeutig als Orthogonalprojektion von $-rB^p$ in $r\mathfrak{B}^p_Q$; dadurch wird C^p (oder A^p) dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn es *in Q außer* 0 *keinen Zyklus gibt.*

Für die Eindeutigkeit sind also *geometrische Eigenschaften* des Bereiches Q maßgebend. Da R und Q komplementär sind, können wir sie auch als solche von R formulieren.

Im Falle C) lautet die Eigenschaft: der Durchschnitt von $\mathfrak{B}^p_Q$ mit $\overline{\mathfrak{Z}}^p$ ist 0

$$\mathfrak{B}^p_Q \cap \overline{\mathfrak{Z}}^p = 0 \ ;$$

das bedeutet, daß die totalen dazu orthogonalen Räume $\mathfrak{B}^p_R$ und $\mathfrak{R}^p$ den ganzen Raum $\mathfrak{B}^p$ aufspannen

$$\mathfrak{B}^p_R + \mathfrak{R}^p = \mathfrak{B}^p \ . \tag{7}$$

Im Falle C′):

$$\mathfrak{B}^p_Q \cap \mathfrak{Z}^p = 0$$

oder

$$\mathfrak{B}^p_R + \overline{\mathfrak{R}}^p = \mathfrak{B}^p \ . \tag{8}$$

Die Formel (7) besagt, daß jede p-dimensionale Kette, insbesondere jede Zelle x_i^p sich nur durch einen Rand von einer Kette aus R unterscheidet, also daß *jede Zelle x_i^p einer Kette aus R homolog ist;* (8) besagt, daß *jede Zelle x_i^p einer Kette aus R cohomolog ist.*

Die Lösung der Aufgabe C) bzw. C′) ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn jede Zelle x_i^p von K^p einer Kette aus R homolog bezw. cohomolog ist.

Anschaulich gesprochen muß also der Bereich R, in welchem die Werte vorgegeben werden, genügend groß sein: jede Zelle x_i^p soll sich mit einer Kette aus R „verbinden" lassen (d. h. mit dieser zusammen den Rand bzw. Corand einer Kette bilden).

14. Spezialfälle.

a) In der Dimension $p = n$ läßt sich wegen $\mathfrak{R}^n = 0$ die Bedingung (7) nur durch $R = K^n$ befriedigen, womit die Aufgabe C) ihren Sinn verliert. Aber auch ohne (7), d. h. unter Verzicht auf die Eindeutigkeit, ist sie in dieser Dimension trivial, da jede Kette A^n die Forderung $r_\varrho A^n = 0$ erfüllt. — Entsprechendes gilt für C′) in der Dimension $p = 0$.

b) Von Interesse ist dagegen C) für $p = 0$, wobei man natürlich die Dimension n von $K \geqslant 1$ voraussetzt. Läßt man in K die Zellen der Dimension > 1, die hier gar keine Rolle spielen, weg, so handelt die Aufgabe von einem Streckenkomplex und geht über in B).

Wir wollen zeigen, daß in diesem Falle ($p = 0$, $n \geqslant 1$) die Formel (7)

$$\mathfrak{B}_R^0 + \mathfrak{R}^0 = \mathfrak{B}^0 \tag{7^0}$$

mit der folgenden Eigenschaft äquivalent ist:

Der Bereich R enthält aus jeder Komponente von K mindestens einen Eckpunkt. (Unter den Komponenten von K versteht man die größten Teilkomplexe von K, in denen sich je zwei Eckpunkte durch einen Kantenweg verbinden lassen; sie bestehen aus lauter verschiedenen Zellen.)

In der Tat folgt aus dieser Eigenschaft sofort $(7)^0$. Denn ist x_i^0 ein beliebiger Eckpunkt, so enthält nach Voraussetzung R aus seiner Komponente einen Eckpunkt x_j^0; es gibt einen Kantenweg, der von x_j^0 nach x_i^0 führt, und wir ordnen ihm die Kette W zu, in welcher die Kanten dieses Weges den Koeffizienten $+ 1$ oder $- 1$ haben (je nach der Orientierung), die übrigen Kanten den Koeffizienten 0. Dann ist

$$rW^1 = x_i^0 - x_j^0 .$$

Jeder Eckpunkt x_i^0 ist also einem Eckpunkt x_j^0 aus R homolog, d. h. $(7)^0$ ist erfüllt.

Es sei umgekehrt $(7)^0$ erfüllt. Dann ist jeder Eckpunkt x_i^0 aus Q einer Kette X^0 aus R homolog:

$$x_i^0 = X^0 + rY^1 .$$

K_1 sei die Komponente von K, die x_i^0 enthält. Y^1 läßt sich zerlegen in $Y_1^1 + Y_2^1$, wobei Y_1^1 höchstens Kanten aus K_1, Y_2^1 keine Kanten aus K_1 enthält. Analog zerfällt $X^0 \subset R$ in $X_1^0 + X_2^0$, und es ist

$$x_i^0 = X_1^0 + rY_1^1 .$$

Daraus ersieht man, daß $X_1^0 \neq 0$ ist; denn in einem 0-dimensionalen Rand $rY_1^1 = x_i^0 - X_1^0$ ist, wie man ganz leicht erkennt, die Summe der Koeffizienten $= 0$. Da $X_1^0 \neq 0$ in R und in K_1 liegt, enthält also R mindestens einen Punkt aus K_1, somit aus jeder Komponente von K.

Damit ist die in der Einleitung (Nr. 1) bezüglich der Aufgabe B) aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen.

c) p sei beliebig. *Wenn R leer ist*, also keine „Randwerte" vorgegeben werden, so lautet in C) die Forderung für die gesuchte Kette A^p

$$r\varrho A^p = 0 .$$

Da $\mathfrak{R}^{p+1}$ und $\mathfrak{Z}^{p+1}$ orthogonal sind, also kein Corand außer 0 gleichzeitig ein Zyklus ist, ist dies dann und nur dann erfüllt, wenn $\varrho A^p = 0$ ist: C) bedeutet in diesem Falle einfach, daß A^p ein Cozyklus ist. Eindeutigkeit ist natürlich im allgemeinen nicht vorhanden; die Lösungen bilden den ganzen Raum $\mathfrak{Z}^p$. — Analog bedeutet C′), wenn R leer ist, daß A^p ein Zyklus ist.

d) Wir betrachten in einem Streckenkomplex die Aufgabe C′) für $p = n = 1$; man sucht eine Kette A^1, die für jede Kante x_i^1 von Q auf $\varrho r x_i^1$ den Wert 0 hat ($\varrho r x_i^1$ besteht aus sämtlichen in den Endpunkten von x_i^1 angebrachten Kanten, außer x_i^1 selbst, alle gegen diese Endpunkte gerichtet; $A^1 \cdot \varrho r x_i^1$ stellt also den gesamten Fluß von A^1 in die Kante x_i^1 dar). Bezüglich der Eindeutigkeit wollen wir hier von der Bedingung

$$\mathfrak{B}_Q^1 \cap \mathfrak{Z}^1 = 0$$

ausgehen; die Kanten von Q sollen also einen Streckenkomplex bilden, in dem es keine 1-dimensionalen Zyklen gibt. Bekanntlich[8]) erhält man

[8]) Vgl. in dem unter [6]) zitierten Buch Kap. IV, § 3 (die erste Bettische Zahl heißt dort Zusammenhangszahl) und Kap. IX, § 3.

einen derartigen Teilkomplex von K immer durch Weglassen von b^1 geeigneten Kanten (wo b^1 die erste Bettische Zahl von K ist, oder der Rang von $\mathfrak{Z}^1$), aber nicht von weniger als b^1 Kanten. Eindeutigkeit der Lösung ist also immer dann vorhanden, wenn R ein solches System von b^1 geeigneten Kanten enthält, und sicher dann nicht, wenn R aus weniger als b^1 Kanten besteht.

Die letzte Bedingung gilt übrigens ganz allgemein: n und p seien beliebig, b^p sei die p-te Bettische Zahl von K; dafür, daß die Lösung von C) oder C′) eindeutig bestimmt ist, ist *notwendig, daß R mindestens aus b^p Zellen besteht.* Denn aus (7) oder aus (8) folgt sofort, daß der Rang von $\mathfrak{B}^p_R$ mindestens gleich demjenigen von $\mathfrak{H}^p$ (sogar von $\overline{\mathfrak{Z}}^p$ bzw. $\mathfrak{Z}^p$) ist; aber der Rang von $\mathfrak{B}^p_R$ ist gleich der Anzahl der in R enthaltenen p-dimensionalen Zellen.

e) Eine weitere notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösungen von C) erhält man aus (7) durch Randbildung: Der Rand jeder Zelle x^p_i muss ganz auf R liegen [5]). — Für $p = 0$ ist diese Bedingung inhaltslos.

(Eingegangen den 15. September 1944.