

# Über flächenläufige Bewegungsvorgänge.

Autor(en): **Blaschke, Wilhelm**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **17 (1944-1945)**

PDF erstellt am: **27.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16343>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über flächenläufige Bewegungsvorgänge

VON WILHELM BLASCHKE, Hamburg

## 1. *E. Studys Übertragungsprinzip.*

Es sei  $\{\mathfrak{o}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  ein Cartesisches Achsenkreuz,  $\mathfrak{o}$  sein Ursprung,  $\mathbf{e}_j$  die paarweis rechtwinkligen Einheitsvektoren auf den Achsen. Wir betrachten zwei Vektoren

$$\begin{aligned}\mathfrak{x} &= \overset{\rightarrow}{\mathfrak{o}\mathfrak{x}} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3, \\ \mathfrak{y} &= \overset{\rightarrow}{\mathfrak{o}\mathfrak{y}} = \mathbf{e}_1 y_1 + \mathbf{e}_2 y_2 + \mathbf{e}_3 y_3\end{aligned}\tag{1}$$

gleichzeitig als Vertreter ihrer Endpunkte. Diese sollen die Entfernung Eins haben:

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}) \cdot (\mathfrak{y} - \mathfrak{x}) = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = 1.\tag{2}$$

Wir führen den „*Richtungsvektor*“

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}\tag{3}$$

ein und den „*Momentenvektor*“ um den Ursprung, nämlich

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = \mathbf{e}_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \mathbf{e}_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + \mathbf{e}_3(x_1 y_2 - x_2 y_1).\tag{4}$$

Darin bedeutet  $\times$  das „*Vektorprodukt*“.

Zwischen  $\mathfrak{g}$ ,  $\bar{\mathfrak{g}}$  bestehen die Beziehungen für ihre Skalarprodukte

$$\mathfrak{g}\mathfrak{g} = 1, \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}} = 0.\tag{5}$$

Umgekehrt gehört zu jedem Vektorpaar, das diese Bedingungen erfüllt, eine gerichtete Gerade („*Achse*“)  $\mathfrak{G}$  unseres Euklidischen  $R_3$ .

Die Bedingung dafür, daß  $\mathfrak{x}$  auf  $\mathfrak{G}$  liegt, lautet

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{g}.\tag{6}$$

Aus reellen Zahlen  $a, \bar{a}$  bauen wir „*duale*“ auf mittels der dualen Einheit  $\varepsilon$ :

$$A = a + \varepsilon \bar{a},\tag{7}$$

die der Rechenregel genügt

$$\varepsilon^2 = 1.\tag{8}$$

Sonst sollen die gewöhnlichen Rechenregeln ihre Gültigkeit behalten, nur kann ein Produkt Null sein, ohne daß ein Faktor verschwindet. Es gibt nämlich die „Nullteiler“  $\varepsilon \bar{a}$ . Entsprechend bilden wir aus dem reellen Vektorpaar  $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$  den dualen Vektor

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g} + \varepsilon \bar{\mathfrak{g}} . \quad (9)$$

Dann lassen sich die Bedingungen (5) in die einzige zusammenfassen

$$\mathfrak{G} \mathfrak{G} = 1 . \quad (10)$$

Damit sind die dualen Einheitsvektoren oder die „Punkte auf der dualen Einheitskugel“ eineindeutig den (reellen, eigentlichen) Achsen des Euklidischen  $R_3$  zugeordnet.

Das Skalarprodukt zweier solcher Vektoren  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$  gibt ausführlich

$$\mathfrak{G} \mathfrak{G}' = \mathfrak{g} \mathfrak{g}' + \varepsilon (\bar{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}' + \mathfrak{g} \bar{\mathfrak{g}}') . \quad (11)$$

Darin ist der Dualteil

$$\bar{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}' + \mathfrak{g} \bar{\mathfrak{g}}' = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & x_1' & x_2' & x_3' \\ 1 & y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} \quad (12)$$

gleich dem sechsfachen Vierflächinhalt über den 4 Ecken  $\mathfrak{x}, \eta; \mathfrak{x}', \eta'$ . Nennt man  $\varphi$  den Winkel und  $\bar{\varphi}$  den kürzesten Abstand der Geraden  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ , so wird bei geeigneter Vorzeichenwahl demnach

$$\mathfrak{G} \mathfrak{G}' = \cos \Phi \quad (13)$$

mit

$$\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}, \quad \cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi .$$

Darin wird eine analytische Funktion einer dualen Veränderlichen durch ihre Potenzreihe erklärt. Insbesondere bedeutet das Verschwinden des Skalarprodukts

$$\mathfrak{G} \mathfrak{G}' = 0 \quad (14)$$

*rechtwinkliges Schneiden* der Geraden  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ .

Wir setzen jetzt

$$\mathfrak{G} = \mathbf{e}_1 G_1 + \mathbf{e}_2 G_2 + \mathbf{e}_3 G_3 \quad (15)$$

und betrachten die Geradenzuordnung  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^*$ , die einer eigentlichen orthogonalen Substitution

$$G_j^* = \Sigma C_{jk} G_k \quad (16)$$

mit dualen  $C_{jk}$  entspricht. Sie stellen eine stetige Gruppe  $G_6$  mit 3 dualen, also 6 reellen wesentlichen Parametern dar, bei der das Skalarprodukt (13) erhalten bleibt. Die entsprechenden Geradenabbildungen des  $R_3$  sind wegen (13), (14) die *Bewegungen* des  $R_3$ . Das ist der Grundgedanke von E. Studys „Übertragungsprinzip“ aus seiner „Geometrie der Dynamen“, Leipzig 1903.

2. *Flächenläufige Bewegungsvorgänge.* Betrachten wir nun ein Tripel paarweis rechtwinkliger Achsen  $\mathfrak{A}_j$ ;  $j = 1, 2, 3$ , die sich in einem Punkt  $\mathfrak{p}$  schneiden. Dieses „bewegte“ Achsenkreuz soll von zwei reellen Parametern  $u, v$  abhängen. Dann ist uns durch diese Achsen

$$\mathfrak{A}_j(u, v); \quad \mathfrak{A}_j \mathfrak{A}_k = \delta_{jk}$$

ein zweigliedriger oder „flächenläufiger“ Bewegungsvorgang eines starren Körpers  $\mathfrak{K}(u, v)$  gegeben, den wir uns an den  $\mathfrak{A}_j$  befestigt denken. Dann können wir die vollständigen Differentiale  $d\mathfrak{A}_j$  unserer Vektoren aus den  $\mathfrak{A}_j$  selbst zusammensetzen und finden so

$$d\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 \Omega_3 - \mathfrak{A}_3 \Omega_2, \quad d\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 \Omega_1 - \mathfrak{A}_1 \Omega_3, \quad d\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 \Omega_2 - \mathfrak{A}_2 \Omega_1. \quad (1)$$

Darin bedeuten die  $\Omega_j$

$$\Omega_j = \omega_j + \varepsilon \bar{\omega}_j \quad (2)$$

duale Pfaffsche Formen in  $u, v$ .

Ausführlich sehen die Gleichungen (1) so aus

$$\begin{aligned} da_1 &= a_2 \omega_3 - a_3 \omega_2, & d\bar{a}_1 &= a_2 \bar{\omega}_3 - a_3 \bar{\omega}_2 + \bar{a}_2 \omega_3 - \bar{a}_3 \omega_2, \\ da_2 &= a_3 \omega_2 - a_1 \omega_3, & d\bar{a}_2 &= a_3 \bar{\omega}_1 - a_1 \bar{\omega}_3 + \bar{a}_3 \omega_1 - \bar{a}_1 \omega_3, \\ da_3 &= a_1 \omega_2 - a_2 \omega_1, & d\bar{a}_3 &= a_1 \bar{\omega}_2 - a_2 \bar{\omega}_1 + \bar{a}_1 \omega_2 - \bar{a}_2 \omega_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Für den Schnittpunkt  $\mathfrak{p}$  der  $\mathfrak{A}_j$  gilt nach (1, 6)

$$\bar{a}_j = \mathfrak{p} \times a_j. \quad (4)$$

Setzen wir für den Augenblick

$$d\mathfrak{p} = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3, \quad (5)$$

so folgt aus (4) durch Ableitung  $\sigma_j = \bar{\omega}_j$ .

Somit tritt an Stelle von (5)

$$d\mathfrak{p} = a_1 \bar{\omega}_1 + a_2 \bar{\omega}_2 + a_3 \bar{\omega}_3. \quad (6)$$

3. *Normalgeraden.* Betrachten wir jetzt eine mit dem Achsenkreuz der  $\mathfrak{U}_j$  starr verbundene Gerade  $\mathfrak{G}$  mit festen  $G_j$ :

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 G_1 + \mathfrak{U}_2 G_2 + \mathfrak{U}_3 G_3 . \quad (7)$$

Durch Ableitung folgt mittels (2, 1)

$$d\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1(G_3 \Omega_2 - G_2 \Omega_3) + \mathfrak{U}_2(G_1 \Omega_3 - G_3 \Omega_1) + \mathfrak{U}_3(G_2 \Omega_1 - G_1 \Omega_2). \quad (8)$$

Für das vom dualen Punkt  $\mathfrak{G}$  auf der Einheitskugel beschriebene duale Flächenelement folgt

$$G_1[\Omega_2 \Omega_3] + G_2[\Omega_3 \Omega_1] + G_3[\Omega_1 \Omega_2] . \quad (9)$$

Daraus für seinen Realteil

$$g_1[\omega_2 \omega_3] + g_2[\omega_3 \omega_1] + g_3[\omega_1 \omega_2] \quad (10)$$

und den Dualteil

$$\bar{g}_1[\omega_2 \omega_3] + g_1([\bar{\omega}_2 \omega_3] + [\omega_2 \bar{\omega}_3]) + \dots . \quad (11)$$

Darin bedeuten die Punkte Reih-um-Vertauschung der Marken 1, 2, 3. Setzen wir den Dualteil gleich Null, so erhalten wir die lineare Gleichung in den Linienzeigern  $g_j, \bar{g}_j$

$$\sum_j (\bar{c}_j g_j + c_j \bar{g}_j) = 0 \quad (12)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= [\omega_2 \omega_3], & c_1 &= [\bar{\omega}_2 \omega_3] + [\omega_2 \bar{\omega}_3], \\ \bar{c}_2 &= [\omega_3 \omega_1], & c_2 &= [\bar{\omega}_3 \omega_1] + [\omega_3 \bar{\omega}_1], \\ \bar{c}_3 &= [\omega_1 \omega_2], & c_3 &= [\bar{\omega}_1 \omega_2] + [\omega_1 \bar{\omega}_2]. \end{aligned} \quad (13)$$

Unter den eckigen Klammern in (9) — (13) verstehen wir dabei alternierende Produkte der Pfaffschen Formen:

$$[adu + b dv, a' du + b' dv] = (ab' - ba') [du, dv] . \quad (14)$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Bedingung (12) folgende einfache geometrische Bedeutung hat:  $\mathfrak{G}$  beschreibt im allgemeinen eine zweigliedrige Schar von Geraden und die Realität des zugehörigen dualen Flächenelements besagt, daß die sogenannten „Brennebenen“ durch die Gerade  $\mathfrak{G}$  in ihrer Schar (Tangentenebenen an die Brennflächen) zueinander rechtwinklig sind. Anders ausgedrückt: Es gibt eine „Normalen-

schar“ (Geraden, die eine Fläche rechtwinklig schneiden), die unsere Schar in  $\mathfrak{G}$  in erster Ordnung berührt. Wir sprechen dann von einer „Normalgeraden“ in ihrer Schar. Besteht eine Schar nur aus Normalgeraden, so ist sie eine Normalenschar. Die lineare Gleichung (12) stellt im allgemeinen einen „linearen Komplex“ oder ein „Gewinde“ von Geraden dar, das A. RIBAUCCOUR (Paris C. R. 1876, S. 1347) in die Kinetik eingeführt hat. Damit ist gezeigt: *Für eine reguläre<sup>1)</sup> Stelle  $u, v$  eines zweigliedrigen Bewegungsvorganges  $\mathfrak{R}(u, v)$  bilden die mit  $\mathfrak{R}$  starr verbundenen Geraden  $\mathfrak{G}$ , die Normalgeraden ihrer Scharen beschreiben, das Gewinde (13).*

Für eine reguläre Stelle<sup>1)</sup> von  $\mathfrak{R}(u, v)$  können alle  $c_j, \bar{c}_j$  nur dann verschwinden, wenn  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$  ist, so daß die unendlich kleinen Bewegungen  $\mathfrak{R}(u, v) \rightarrow \mathfrak{R}(u + du, v + dv)$  alle Schiebungen sind. Ein ähnliches Ergebnis gilt auch, wenn man anstelle der „Normalgeraden“ die „isotropen Geraden“ treten läßt, bei denen die Lote zu den Nachbargeraden der Schar ein Büschel bilden.<sup>2)</sup>

Wegen der hier benutzten Hilfsmittel aus der Liniengeometrie vergleiche man auch das letzte Kapitel des ersten Bandes meiner „Vorlesungen über Differentialgeometrie“.

---

<sup>1)</sup> d. h. es soll zwischen den  $\Omega_j$  zwei linear unabhängige geben.

<sup>2)</sup> Vgl. W. Blaschke, Archiv für Math. u. Phys. (3) 17 (1911), S. 194—195.

(Eingegangen den 30. Oktober 1944.)