Beiträge zur Homotopietheorie.

Autor(en): **Hopf, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **17 (1944-1945)**

PDF erstellt am: **27.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16345

Beiträge zur Homotopietheorie

Von Heinz Hopf, Zürich

Diese Beiträge setzen die Untersuchung der Zusammenhänge fort, die zwischen den Homotopiegruppen von Hurewicz, der Fundamentalgruppe und den Homologiegruppen bestehen; derartige Untersuchungen sind bereits in den grundlegenden Arbeiten von Hurewicz [1], in einer Arbeit von Eilenberg [2] und in zwei Arbeiten von mir [3, 4] angestellt worden[1]); Begriffe, Methoden und Sätze aus diesen Arbeiten werden im folgenden benutzt.

Die Ergebnisse sind in den Abschnitten 2.1, 2.2, 3.5, 4.3, 4.9, 5.4, 5.5 formuliert; die Erklärung der in diesen Sätzen vorkommenden Begriffe findet man in den Abschnitten 1.1 bis 1.5, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2. In den Abschnitten 2.7 und 5.6 ff. wird durch einige spezielle Beispiele gezeigt, in welchen Richtungen sich die allgemeinen Sätze anwenden lassen.

1. Definition der Gruppen Π_0^n, Γ^n, Δ^n

1.1. $\mathfrak{K}$ sei ein beliebiger zusammenhängender, simplizialer Komplex, endlich oder unendlich, und $\overline{\mathfrak{K}}$ das durch $\mathfrak{K}$ bestimmte Polyeder[2]). Die Homotopiegruppen von $\overline{\mathfrak{K}}$ nennen wir auch die Homotopiegruppen des Komplexes $\mathfrak{K}$ und bezeichnen sie mit $\Pi^n(\mathfrak{K})$ oder, wenn kein Mißverständnis möglich ist, kurz mit Π^n; $(n = 1, 2, \ldots)$.

Die Definition dieser Gruppen ist bekannt ([1], (I)). Es sei hier nur an folgendes erinnert: Die Elemente von Π^n sind die Äquivalenzklassen derjenigen Abbildungen[3]) einer Sphäre S^n in das Polyeder $\overline{\mathfrak{K}}$, welche einen festen Punkt $a \in S^n$, den „Pol", auf einen festen Eckpunkt o von $\mathfrak{K}$, den „Nullpunkt" abbilden; dabei gelten zwei Abbildungen f, g als äquivalent, wenn man sie unter Festhaltung des Bildes von a stetig ineinander deformieren kann.

1.2. Ein „stetiger Zyklus" $[f(z)]$ in $\overline{\mathfrak{K}}$ ist durch eine Abbildung f eines Polyeders $\bar{z}$ in das Polyeder $\overline{\mathfrak{K}}$ bestimmt, wobei z ein Zyklus ist

[1]) Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Terminologie immer wie in [5]. — Nur statt „algebraischer Komplex" sage ich jetzt „Kette".

[3]) Alle Abbildungen von Sphären und anderen Polyedern sollen stetig, alle Abbildungen von Komplexen simplizial sein.

([5], p. 332ff.). Ist speziell $z = S^n$ der Grundzyklus einer orientierten n-dimensionalen Sphäre, so nennen wir $[f(S^n)]$ eine „stetige (n-dimensionale) Sphäre“. Die Elemente der oben betrachteten Äquivalenzklassen sind also stetige Sphären.

Die stetigen Sphären $[f(S^n)]$, $[g(S^n)]$ heißen „homotop“ zueinander, wenn die Abbildungen f, g homotop sind, d. h. wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen, wobei im Gegensatz zu oben kein Pol a ausgezeichnet ist. Je zwei stetige Sphären aus einer Äquivalenzklasse sind homotop; daraus folgt: wenn eine stetige Sphäre aus der Äquivalenzklasse α zu einer stetigen Sphäre aus der Äquivalenzklasse α' homotop ist, so ist jede stetige Sphäre aus α zu jeder stetigen Sphäre aus α' homotop; in diesem Falle nennen wir die Elemente α, α' zueinander homotop. Die Gruppe Π^n zerfällt so in Homotopieklassen.

Es kann vorkommen, daß jede Homotopieklasse von Π^n nur ein einziges Element enthält, daß also zwei verschiedene Elemente von Π^n niemals zueinander homotop sind. In diesem Falle heißt $\mathfrak{K}$ „einfach“ in der Dimension n. Dies ist speziell dann der Fall, und zwar für alle n, wenn $\mathfrak{K}$ einfach zusammenhängend, d. h. wenn die Fundamentalgruppe $\Pi^1 = 0$ ist [2].

1.3. Unter Π_0^n verstehen wir die Untergruppe von Π^n, die von allen Differenzen $\alpha - \alpha'$ erzeugt wird, wobei α, α' beliebige zueinander homotope Elemente von Π^n sind; sie besteht aus allen Summen $\Sigma(\alpha_i - \alpha_i')$, wobei immer α_i und α_i' homotop sind.

Wenn $\mathfrak{K}$ in der Dimension n einfach, also insbesondere wenn $\mathfrak{K}$ einfach zusammenhängend ist, ist $\Pi_0^n = 0$.

1.4. Jeder stetige Zyklus in $\overline{\mathfrak{K}}$ gehört zu einer bestimmten Homologieklasse von $\mathfrak{K}$ ([5], p. 334). Homotope stetige Zyklen gehören zu derselben Homologieklasse; hieraus folgt erstens, daß jedem Element $\alpha \in \Pi^n$ eine bestimmte Homologieklasse $h\alpha$ zugeordnet ist, und zweitens: sind α, α' homotope Elemente von Π^n, so ist $h\alpha = h\alpha'$.

Aus den Definitionen der Addition in Π^n und in der Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^n$ von $\mathfrak{K}$ ergibt sich, daß h eine homomorphe Abbildung von Π^n in $\mathfrak{B}^n$ ist. Der Kern dieses Homomorphismus, also das Urbild des Nullelementes von $\mathfrak{B}^n$, ist eine Untergruppe von Π^n, die wir Γ^n nennen; sie besteht also aus denjenigen Elementen von Π^n, die die Eigenschaft haben, daß die in ihnen enthaltenen stetigen Sphären homolog 0 sind. (Wenn $\mathfrak{K}$ n-dimensional ist, so darf man hierbei statt „homolog 0“ auch „gleich 0“, im Sinne der Addition von Ketten, sagen.) Wir werden die in Γ^n enthaltenen Elemente von Π^n selbst „homolog 0“ nennen.

1.5. Wenn α, α' zueinander homotop sind, so ist, wie in 1.4 festgestellt wurde, $h\alpha = h\alpha'$, also $h(\alpha - \alpha') = 0$, d. h. $\alpha - \alpha'$ homolog 0, und folglich sind alle Elemente der Gruppe Π_0^n homolog 0; man kann sagen, daß das diejenigen Elemente von Π^n sind, welche bereits auf Grund ihrer Homotopieeigenschaften „trivialerweise" homolog 0 sind.

Es ist also $\Pi_0^n \subset \Gamma^n$, und mithin ist die Faktorgruppe $\Delta^n = \Gamma^n / \Pi_0^n$ erklärt. Diese Gruppen Δ^n werden den Hauptgegenstand unserer Untersuchung bilden; in ihrer Struktur äußern sich die Existenz und Eigenschaften solcher Elemente von Π^n, welche homolog 0 sind, für welche dies aber nicht „trivial" — in dem soeben besprochenen Sinne — ist.

Wenn $\mathfrak{K}$ in der Dimension n einfach, also insbesondere wenn $\mathfrak{K}$ einfach zusammenhängend ist, ist $\Delta^n = \Gamma^n$.

1.6. Die Gruppe Π^1 ist die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{K}$. Sie ist, im Gegensatz zu Π^n, $n > 1$, im allgemeinen nicht kommutativ, und man schreibt sie, im Gegensatz zu Π^n, $n > 1$, nicht additiv, sondern multiplikativ. Zwei Elemente $\alpha, \alpha' \in \Pi^1$ sind dann und nur dann homotop, wenn sie ähnlich sind, d. h. wenn ein $\beta \in \Pi^1$ existiert, sodaß $\alpha' = \beta\alpha\beta^{-1}$ ist ([6], p. 176); an die Stelle der oben betrachteten Differenzen $\alpha - \alpha'$ treten also die Kommutatoren $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, und Π_0^1 ist die Kommutatorgruppe von Π^1. Andererseits sind die Elemente der Kommutatorgruppe von Π^1 dadurch charakterisiert, daß die sie repräsentierenden geschlossenen Wege, als stetige Zyklen aufgefaßt, homolog 0 sind ([6], p. 173); folglich ist auch Γ^1 die Kommutatorgruppe von Π^1. Es ist also $\Pi_0^1 = \Gamma^1$ und damit $\Delta^1 = 0$. — Die Gruppen Δ^n verdienen also nur für $n > 1$ Interesse.

1.7. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Homotopie zwischen zwei Elementen $\alpha, \alpha' \in \Pi^n$ nach Eilenberg [2] auch folgendermaßen charakterisiert werden kann (diese Charakterisierung wird nur einmal, in 2.6, explizit eine Rolle spielen): Den Elementen x der Fundamentalgruppe Π^1 sind in natürlicher Weise Automorphismen A_x der Gruppe Π^n zugeordnet; Π^n ist also als „Gruppe mit Operatoren" aufzufassen, wobei Π^1 der Operatorenbereich ist. Es gilt der Satz: „Die Elemente $\alpha, \alpha' \in \Pi^n$ sind dann und nur dann homotop, wenn es ein $x \in \Pi^1$ gibt, sodaß $\alpha' = A_x\alpha$ ist" ([2], §§ 9,11). — (Für $n = 1$ sind die A_x die inneren Automorphismen von Π^1.)

Hieraus folgt, daß durch die Struktur von Π^n als Gruppe mit Operatoren in dem soeben erklärten Sinne die Gruppe Π_0^n vollständig bestimmt ist.

2. Der Zusammenhang zwischen den Gruppen $\Delta^n(\mathfrak{K}^n)$ und der Fundamentalgruppe

2.1. $\mathfrak{K}$ heißt „asphärisch" in der Dimension n, wenn $\Pi^n(\mathfrak{K}) = 0$ ist, d. h. wenn jede stetige n-dimensionale Sphäre in $\overline{\mathfrak{K}}$ auf einen Punkt zusammengezogen werden kann ([1], (IV)).

Wir betrachten N-dimensionale Komplexe $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^N$ und werden zeigen:

Es sei $N \geqslant 2$, und $\mathfrak{K}^N$ sei asphärisch in den Dimensionen n mit $1 < n < N$. Dann ist die Struktur der Gruppe $\Delta^N(\mathfrak{K}^N)$ durch die Struktur der Fundamentalgruppe $\Pi^1(\mathfrak{K}^N)$ bestimmt.

Die Voraussetzung über $\mathfrak{K}^N$ ist inhaltlos, wenn $N = 2$ ist; daher enthält dieser Satz den folgenden:

Für jeden zweidimensionalen Komplex $\mathfrak{K}^2$ ist die Struktur der Gruppe $\Delta^2(\mathfrak{K}^2)$ durch die Struktur der Fundamentalgruppe $\Pi^1(\mathfrak{K}^2)$ bestimmt.

2.2. Diese Sätze lassen sich noch präzisieren. Jeder abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ sind durch einen algebraischen Prozeß, den ich früher dargestellt habe, Abelsche Gruppen $\mathfrak{G}^1, \mathfrak{G}^2, \ldots$ zugeordnet, die „zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Bettischen Gruppen" ([4], § 1)[4]). Welche Eigenschaften dieser Gruppen wir hier brauchen, wird unten in 2.4 gesagt werden. Es gilt

Satz I. *Es sei $N \geqslant 2$, und $\mathfrak{K}^N$ sei ein N-dimensionaler Komplex, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ besitzt und asphärisch in den Dimensionen n mit $1 < n < N$ ist. Dann ist $\Delta^N(\mathfrak{K}^N) \cong \mathfrak{G}^{N+1}$.* [5])

Speziell gilt also, analog wie in 2.1,

Satz I'. *Für jeden zweidimensionalen Komplex $\mathfrak{K}^2$ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ ist $\Delta^2(\mathfrak{K}^2) = \mathfrak{G}^3$.*

2.3. *Beweis von Satz I.* K sei der universelle Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^N$. Die Abbildung, die jedem Punkt $\overline{p} \in \overline{K}$ den von ihm überlagerten Punkt $p \in \overline{\mathfrak{K}}$ zuordnet, heisse U. Der Homomorphismus $\bar{h}$ sei für K ebenso erklärt, wie in 1.4 der Homomorphismus h für $\mathfrak{K}$.

Die nachstehenden Tatsachen a), b), c) sind aus der Theorie von Hurewicz bekannt:

a) U bildet für $n > 1$ die Gruppe $\Pi^n(K)$ isomorph auf die Gruppe $\Pi^n(\mathfrak{K})$ ab ([1], (I), Satz IV).

---

[4]) Der Koeffizientenbereich ist immer der Ring der ganzen Zahlen.

[5]) Durch diesen Satz wird die am Schluß von [4] angekündigte Beziehung hergestellt.

Hieraus folgt, daß auch K in den Dimensionen n mit $1 < n < N$ asphärisch ist; K ist aber einfach zusammenhängend, d. h. auch asphärisch in der Dimension 1. Daher gelten b) und c):

b) K ist in den Dimensionen n mit $1 \leqslant n < N$ azyklisch, d. h. die Bettischen Gruppen dieser Dimensionen sind Null ([1], (II), Satz II);

c) $\bar{h}$ bildet die Gruppe $\Pi^N(K)$ isomorph auf die Bettische Gruppe $B^N(K)$, also, da K N-dimensional ist, auf die Gruppe Z^N der N-dimensionalen Zyklen von K ab ([1], (II), Satz I).

2.4. Die Decktransformationen von K, welche $\mathfrak{K}$ erzeugen, bilden eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe. Sie bewirken Automorphismen der Gruppen Z^N und $\Pi^N(K)$ (cf. [2]).

Unter Z_0^N verstehen wir die Untergruppe von Z^N, die von allen Differenzen $z - Az$ erzeugt wird, wobei z alle Elemente von Z^N und A alle Decktransformationen durchläuft.

X_0^N sei die Gruppe derjenigen N-dimensionalen Ketten von K, welche durch U auf die Null abgebildet werden. Da $UAz = Uz$ für jede Decktransformation A und jede Kette z ist, ist $Z_0^N \subset X_0^N$.

Mithin ist die Faktorgruppe $(X_0^N \frown Z^N)/Z_0^N$ erklärt. Sie ist, da 2.3 b) gilt, nach einem früher bewiesenen Satz ([4], Satz IV) isomorph mit $\mathfrak{G}^{N+1}$.

2.5. Jede Abbildung eines Komplexes auf sich oder auf einen anderen Komplex ordnet der, gemäß 1.4 erklärten Homologieklasse eines Elementes einer Homotopiegruppe die Homologieklasse des Bildelementes zu. Angewandt auf die Abbildung U und auf die Decktransformationen A liefert diese Bemerkung die Regeln

$$U\bar{h} = hU\,, \qquad A\bar{h} = \bar{h}A\,.$$

2.6. Infolge 2.3 a) und c) ist $\bar{h}U^{-1} = H$ ein Isomorphismus von $\Pi^N(\mathfrak{K})$ auf Z^N.

Aus 2.5 folgt $h\alpha = UH\alpha$ für jedes $\alpha \in \Pi^N(\mathfrak{K})$. Da die Elemente α von $\Gamma^N(\mathfrak{K})$ durch $h\alpha = 0$ charakterisiert sind, sind also ihre Bilder $z = H\alpha$ durch $Uz = 0$, also durch $z \in X_0^N \frown Z^N$ charakterisiert. Es ist daher $H\Gamma^N(\mathfrak{K}) = X_0^N \frown Z^N$.

Nach einem Satz von Eilenberg ([2], §§ 9, 11) sind die Elemente $\alpha, \alpha' \in \Pi^N(\mathfrak{K})$ dann und nur dann homotop, wenn es eine Decktransformation A gibt, sodaß $U^{-1}\alpha' = AU^{-1}\alpha$ ist (cf. 1.7); diese Bedingung ist nach 2.3 c) gleichbedeutend mit $\bar{h}U^{-1}\alpha' = \bar{h}AU^{-1}\alpha$, also nach 2.5 mit $H\alpha' = AH\alpha$; die Differenzen $\alpha - \alpha'$, wobei α, α' homotop sind, gehen also bei H über in die Differenzen $z - Az$. Das bedeutet: $H\Pi_0^N(\mathfrak{K}) = Z_0^N$.

Mithin wird die Faktorgruppe $\Delta^N(\mathfrak{K}) = \Gamma^N/\Pi_0^N$ durch H auf die Faktorgruppe $(X_0^N \frown Z^N)/Z_0^N$ abgebildet. Hieraus und aus 2.4 ergibt sich Satz I.

2.7. *Bemerkungen zum Satz I'.* Zu jeder abzählbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ kann man bekanntlich zweidimensionale Komplexe $\mathfrak{K}^2$ konstruieren, deren Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ ist[6]). Man wird versuchen, einen solchen Komplex $\mathfrak{K}^2$ zu finden, der möglichst einfach ist, in dem Sinne, daß er möglichst wenig geschlossene zweidimensionale Gebilde enthält, wobei wir unter „geschlossenen Gebilden" sowohl Elemente der Bettischen Gruppe, also der Zyklengruppe, als auch Elemente der Homotopiegruppe verstehen werden. Nun wird aber im allgemeinen die Existenz solcher Gebilde in nicht zu geringer Anzahl durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ unvermeidlich gemacht; und zwar ist uns hierüber jetzt folgendes bekannt:

Erstens ist nach einem früheren Satz[7]): $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{G}^2$, wobei $\mathfrak{B}^2$ die Bettische, also die Zyklengruppe und $\mathfrak{S}^2$ die Gruppe derjenigen Zyklen ist, welche simpliziale Bilder einer Kugelfläche sind (cf. 3.2); wenn $\mathfrak{G}^2 \neq 0$ ist, ist also das Auftreten von Zyklen, die nicht homolog 0 sind, unvermeidlich. Zweitens ist nach unserem Satz I': $\Gamma^2/\Pi_0^2 \cong \mathfrak{G}^3$; wenn $\mathfrak{G}^3 \neq 0$ ist, so ist also auch das Auftreten von Kugelbildern unvermeidlich, welche nicht homotop 0, aber homolog 0 sind, sich also in der Gruppe $\mathfrak{B}^2$ nicht bemerkbar machen (die schwächere Tatsache, daß $\Pi^2 \neq 0$ sein muß, falls $\mathfrak{G}^3 \neq 0$ ist, ist in einem schon früher bewiesenen Satz ([4], 16.2) enthalten).

Ist z. B. $\mathfrak{G}$ die freie Abelsche Gruppe vom Range r, so ist $\mathfrak{G}^n$ die freie Abelsche Gruppe vom Range $\binom{r}{n}$, ([4], 10.2); folglich existieren dann in $\mathfrak{K}^2$ wenigstens $\binom{r}{2}$ Zyklen, die linear unabhängig (im Sinne der Addition von Ketten) sind, und zwar solche Zyklen, welche nicht Bilder von Kugeln sind; sowie wenigstens $\binom{r}{3}$ Kugelbilder, welche linear unabhängig im Sinne der Addition in der Homotopiegruppe Π^2 sind, und dies sogar, wenn man modulo Π_0^2 rechnet, und zwar solche Kugelbilder, welche homolog 0, aber nicht „trivialerweise" homolog 0 (im Sinne von 1.5) sind.

---

[6]) Nach der in [6], p. 180, Aufgabe 3, angedeuteten Methode kann man zunächst einen (i. a. unendlichen) Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ konstruieren; der Komplex $\mathfrak{K}^2$ seiner höchstens zweidimensionalen Simplexe hat dann auch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$.

[7]) [3]; sowie [4], 9.2; die Gruppe $\mathfrak{G}^2$ hieß in [3] $\mathfrak{G}_1^*$; wegen der Gleichheit $\mathfrak{G}^2 = \mathfrak{G}_1^*$ vgl. man [4], Nr. 12.

3. Homotopieränder; die Gruppen $\mathfrak{S}^n$

Die Theorie der N-dimensionalen Homotopieränder ist für den Fall $N = 1$ in [3], § 2, entwickelt worden. Die Beweise lassen sich ohne Mühe auf die Fälle $N > 1$ übertragen[8]); ich verzichte daher hier auf ihre Darstellung. Die Grundbegriffe werden in 3.1, 3.2, 3.3 erklärt; in 3.4 werden die früher bewiesenen Tatsachen formuliert.

$\mathfrak{K}$ ist wie bisher ein beliebiger Komplex, $\mathfrak{K}^N$ der Komplex seiner höchstens N-dimensionalen Simplexe, $N \geqslant 1$.

3.1. E^{N+1} sei ein orientiertes, simplizial untergeteiltes, $(N+1)$-dimensionales Element (d. h. topologisches Bild eines Simplexes), S^N seine Randsphäre, auf der ein Pol a ausgezeichnet sei. f sei eine simpliziale Abbildung von E^{N+1} in $\mathfrak{K}$, bei welcher $f(a) = o$ der Nullpunkt der Gruppe $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ ist. Hierdurch ist erstens die $(N+1)$-dimensionale Kette $C = f(E^{N+1})$ in $\mathfrak{K}$ gegeben und zweitens das durch die stetige Sphäre $[f(S^N)]$ bestimmte Element $\alpha \in \Pi^N(\mathfrak{K}^N)$. Wir nennen α „einen Homotopierand“ von C.

(Daß wir nicht die stetige Sphäre $[f(S^N)]$, sondern das Element α als Homotopierand von C bezeichnen, ist durch die folgende leicht beweisbare Tatsache gerechtfertigt: wenn $[g(S^N)]$ eine in $\overline{\mathfrak{K}}^N$ mit $[f(S^N)]$ homotope stetige Sphäre ist, so läßt sich die Abbildung g von S^N zu einer solchen Abbildung von E^{N+1} erweitern, daß auch $g(E^{N+1}) = C$ ist; cf. [3], Nr. 8, b.)

3.2. Ein $(N+1)$-dimensionaler Zyklus in $\mathfrak{K}$ heißt ein „sphärischer“ Zyklus — früher „Kugelbild“ genannt —, wenn er simpliziales Bild einer $(N+1)$-dimensionalen, orientierten Sphäre (genauer: des Grundzyklus einer solchen Sphäre) ist.

Man sieht leicht (cf. [3], Nachtrag, Nr. 1): Die sphärischen Zyklen bilden eine Gruppe; diese Gruppe heiße $\overline{\mathfrak{S}}^{N+1}$. Bezeichnen wir die Gruppe aller Zyklen mit $\mathfrak{Z}^{N+1}$, die Gruppe derjenigen Zyklen, welche in $\mathfrak{K}$ homolog 0 sind, mit $\mathfrak{H}^{N+1}$, so ist $\mathfrak{Z}^{N+1} \supset \overline{\mathfrak{S}}^{N+1} \supset \mathfrak{H}^{N+1}$. Aus $\overline{\mathfrak{S}}^{N+1} \supset \mathfrak{H}^{N+1}$ folgt, daß eine Homologieklasse entweder keinen sphärischen Zyklus oder nur sphärische Zyklen enthält; diejenigen Homologieklassen, deren Zyklen sphärisch sind, bilden die Untergruppe $\mathfrak{S}^{N+1} = \overline{\mathfrak{S}}^{N+1}/\mathfrak{H}^{N+1}$ der Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^{N+1}$. Es ist $\mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{S}^{N+1} \cong \mathfrak{Z}^{N+1}/\overline{\mathfrak{S}}^{N+1}$.

Übrigens kann man die Gruppe $\mathfrak{S}^{N+1}$ auch folgendermaßen definieren: h habe dieselbe Bedeutung wie in 1.4; dann ist $\mathfrak{S}^{N+1} = h\Pi^{N+1}(\mathfrak{K})$.

[8]) Für $N > 1$ tritt sogar gegenüber $N = 1$ eine Vereinfachung ein, da die in [3], Nr. 8, g), betrachtete Gruppe Φ jetzt Abelsch wird.

3.3. Diejenigen Elemente von $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$, welche in $\overline{\mathfrak{K}}$ homotop 0 sind, bilden eine Gruppe $\mathfrak{R}$. Unter $\mathfrak{R}_0$ verstehen wir die Untergruppe von $\mathfrak{R}$, die von allen Differenzen $\varrho - \varrho'$ erzeugt wird, wobei ϱ, ϱ' Elemente von $\mathfrak{R}$ sind, die zueinander homotop sind (in $\overline{\mathfrak{K}}^N$). Es ist $\mathfrak{R}_0 \subset \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$, also auch $\mathfrak{R}_0 \subset \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)$ und $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)$.

Bei unserer früheren Behandlung des Falles $N = 1$ hatte $\mathfrak{R}$ dieselbe Bedeutung wie jetzt; die Gruppe $\Pi^1(\mathfrak{K}^1)$ hieß $\mathfrak{F}$, $\Pi_0^1(\mathfrak{K}^1) = \Gamma^1(\mathfrak{K}^1)$ hieß $\mathfrak{C}$, und $\mathfrak{R}_0$ hieß $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$.

3.4. Es gelten die folgenden Sätze ([**3**], § 2):

Jeder Homotopierand ist Element von $\mathfrak{R}$; jedes Element von $\mathfrak{R}$ ist Homotopierand. Jede Kette C besitzt Homotopieränder (d. h. C läßt sich wie in 3.1 als Bild $f(E^{N+1})$ darstellen); die Homotopieränder von C bilden eine der Restklassen, in welche $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{R}_0$ zerfällt. Nennen wir diese Restklasse $T(C)$, so ist demnach T eine Abbildung der Gruppe $\mathfrak{L}^{N+1}$ aller $(N+1)$-dimensionalen Ketten von $\mathfrak{K}$ auf die Gruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0$. Diese Abbildung T ist ein Homomorphismus. Die Zyklen sind dadurch charakterisiert, daß ihre Homotopieränder in $\Gamma^N(\mathfrak{K}^N)$, und die sphärischen Zyklen dadurch, daß ihre Homotopieränder in $\mathfrak{R}_0$ enthalten sind; $\mathfrak{S}^{N+1}$ ist also der Kern des Homomorphismus T, und $\mathfrak{Z}^{N+1}$ ist bei T das Urbild der Gruppe $\mathfrak{R} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)/\mathfrak{R}_0$; folglich ist

$$\mathfrak{Z}^{N+1}/\mathfrak{S}^{N+1} \cong \mathfrak{R} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)/\mathfrak{R}_0$$

und daher (cf. 3.2) auch

$$\mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{S}^{N+1} \cong \mathfrak{R} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)/\mathfrak{R}_0 . \tag{1}$$

3.5. Soweit die früher für $N = 1$ ausführlich dargestellten Tatsachen. — Wir ziehen zunächst eine Folgerung aus (1), die mit folgendem Satz von Hurewicz zusammenhängt ([**1**], (II), Satz I): „Wenn ein Komplex asphärisch in den Dimensionen $1, 2, \ldots, n-1$ ist, so hat der Homomorphismus h (cf. 1.4) in der Dimension n die folgenden beiden Eigenschaften: a) er ist ein Isomorphismus, d. h. es ist $\Gamma^n = 0$; b) er ist eine Abbildung von Π^n *auf* $\mathfrak{B}^n$, d. h. jeder n-dimensionale Zyklus ist sphärisch (cf. 3.2).

Wir behaupten nun, daß die Aussage b) gültig bleibt, wenn man den Komplex nur in den Dimensionen $1, \ldots, n-2$ als asphärisch voraussetzt; mit anderen Worten, wobei wir $n-1$ durch N ersetzen:

$\mathfrak{K}$ sei asphärisch in den Dimensionen $1, 2, \ldots, N-1$; dann ist jeder $(N+1)$-dimensionale Zyklus sphärisch $(N \geqq 2)$.

Beweis: Da für $n < N$ immer $\Pi^n(\mathfrak{K}) = \Pi^n(\mathfrak{K}^N)$ ist, ist auch $\mathfrak{K}^N$ in den genannten Dimensionen asphärisch, und nach Teil a) des soeben zitierten Satzes von Hurewicz ist daher $\Gamma^N(\mathfrak{K}^N) = 0$; aus (1) folgt daher $\mathfrak{B}^{N+1} = \mathfrak{S}^{N+1}$, w.z.b.w.

Demnach sind z. B. in einem einfach zusammenhängenden — d. h. in der Dimension 1 asphärischen — Komplex nicht nur (wie in jedem Komplex) alle eindimensionalen, und nicht nur (nach dem Satz von Hurewicz) alle zweidimensionalen, sondern auch alle dreidimensionalen Zyklen sphärisch[9]); dagegen ist z. B. der vierdimensionale Grundzyklus der einfach zusammenhängenden Produktmannigfaltigkeit $S^2 \times S^2$ nicht sphärisch, da sich die S^4 nicht mit dem Grade 1 auf $S^2 \times S^2$ abbilden läßt ([7], Satz IIIa).

3.6. Durch die in 3.4 skizzierte Betrachtung wurde in [3] die Isomorphie

$$\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{G}^2$$

bewiesen, wobei $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{K}$ ist[7]). Für $N > 1$ kann man folgendermaßen weiter schließen: Wenn $\mathfrak{K}$ asphärisch in der Dimension N ist, so ist $\mathfrak{R} = \Pi^N(\mathfrak{K}^N)$, und (1) geht über in

$$\mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{S}^{N+1} \cong \Delta^N(\mathfrak{K}^N) . \tag{2}$$

Wenn $\mathfrak{K}$ außerdem asphärisch in den Dimensionen n mit $1 < n < N$ ist, so ist auch $\mathfrak{K}^N$ für diese n asphärisch, da für $n<N$ immer $\Pi^n(\mathfrak{K})=\Pi^n(\mathfrak{K}^N)$ ist; folglich ist der Satz I anwendbar, und aus (2) folgt

$$\mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{S}^{N+1} \cong \mathfrak{G}^{N+1} . \tag{3}$$

Und wenn schließlich $\mathfrak{K}$ auch noch asphärisch in der Dimension $N+1$ ist, so ist $\mathfrak{S}^{N+1} = h\Pi^{N+1}(\mathfrak{K}) = 0$, also geht (3) über in

$$\mathfrak{B}^{N+1} \cong \mathfrak{G}^{N+1} . \tag{4}$$

Die Sätze (3) und (4) waren bereits in der Arbeit [4], § 5, mit einer etwas anderen Methode — übrigens gemeinsam für $N = 1$ und $N > 1$ — bewiesen worden.[10])

[9]) Man beachte immer: daß der Zyklus $z \subset \mathfrak{K}$ sphärisch ist, bedeutet, daß es eine Abbildung f einer Sphäre S *in den Komplex* $\mathfrak{K}$ — aber nicht notwendig nur auf den Komplex $|z|$! — mit $f(S) = z$ gibt.

[10]) Der Unterschied der gegenwärtigen von der früheren Methode besteht darin, daß wir jetzt aus [4] nur den Satz IV benutzt haben, für dessen Beweis die Homologiebetrachtungen in [4], 7.3, 7.4, 8.2, nicht benötigt wurden; an ihre Stelle ist jetzt die Betrachtung der Homotopieränder getreten.

3.7. Aber nicht diese Sätze sind im Augenblick unser Hauptziel, sondern die Behandlung der folgenden Frage im Anschluß an 3.4: „Welche Ketten haben die Eigenschaft, daß ihre Homotopieränder in der Gruppe $\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$ enthalten sind?"

Für $N = 1$ ist diese Frage uninteressant; denn da $\Pi_0^1 = \Gamma^1$ ist (cf. 1.6), sind nach 3.4 die fraglichen Ketten einfach alle Zyklen.

Wir werden in Nr. 4 sehen, daß für $N > 1$ die fraglichen Ketten spezielle, geometrisch ausgezeichnete Zyklen sind; in Nr. 5 wird dann gezeigt werden, daß die Gruppe dieser Zyklen mit unseren Gruppen Δ^N in Zusammenhang steht.

4. Henkelmannigfaltigkeiten; die Gruppen $\mathfrak{P}^n$

4.1. Wenn man aus einer Sphäre S^n die Innengebiete von l zueinander fremden n-dimensionalen Elementen — etwa von sphärischen Vollkugeln oder von Simplexen einer Triangulation von S^n — herausnimmt, so entsteht eine berandete Mannigfaltigkeit Q_l^n; ihr Rand besteht aus $(n-1)$-dimensionalen Sphären $s_1, \dots, s_l$. Wir zeichnen eine Orientierung von S^n, und damit von Q_l^n aus und orientieren dann die s_λ so, daß $\dot{Q}_l^n = \Sigma s_\lambda$ ist; dabei fassen wir die orientierte Mannigfaltigkeit Q_l^n und die orientierten Sphären s_λ als Ketten auf und verstehen unter $\dot{Q}_l^n$ den Rand der Kette Q_l^n.

Es sei $l = 2p$; die Randsphären nennen wir jetzt nicht $s_1, \dots, s_{2p}$, sondern $s_1, s_1', \dots, s_p, s_p'$. Für jedes λ, $1 \leqslant \lambda \leqslant p$, nehmen wir eine topologische Identifizierung von s_λ und s_λ' vor und zwar so, daß, im Sinne der eben eingeführten Orientierung, $s_\lambda' = -s_\lambda$ wird. Dadurch entsteht eine geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit H_p^n; wir nennen sie eine „Henkelmannigfaltigkeit".

Man kann H_p^n auch dadurch definieren, daß man nicht s_λ und s_λ' identifiziert, sondern für jedes λ ein Exemplar P_λ des topologischen Produktes $S^{n-1} \times E^1$, wobei E^1 eine Strecke ist, derart an Q_{2p}^n ansetzt, daß von den beiden orientierten Randsphären von P_λ die eine mit $-s_\lambda$, die andere mit s_λ' identifiziert wird; das ist das Ansetzen von „Henkeln" an die S^n.

Dabei darf immer $p = 0$ sein: es ist $H_0^n = S^n$; ferner ist, wie man leicht sieht, H_1^n homöomorph mit dem topologischen Produkt $S^{n-1} \times S^1$. Für $p > 1$ lassen sich die H_p^n dann induktiv auch folgendermaßen erklären: H_p^n ist die topologische Summe von H_{p-1}^n und H_1^n, d. h.: H_p^n entsteht, indem man aus H_{p-1}^n und aus H_1^n je ein n-dimensionales Element entfernt und die beiden $(n-1)$-dimensionalen Randsphären zusammenheftet. Allgemein ist die topologische Summe einer H_p^n und einer H_q^n eine H_{p+q}^n.

Für $n = 2$ ist bekanntlich jede geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit eine Henkelmannigfaltigkeit. Für $n > 2$ aber sind die H_p^n sehr spezielle Mannigfaltigkeiten.

Wir werden im folgenden mit H_p^n oft auch den Grundzyklus der ebenso genannten (orientierten) Mannigfaltigkeit bezeichnen.

4.2. Bildet man H_p^n simplizial in den Komplex $\mathfrak{K}$ ab, so entsteht in $\mathfrak{K}$ eine Kette, und zwar ein Zyklus, $C = f(H_p^n)$. Wir behaupten, daß diejenigen Ketten von $\mathfrak{K}$, die sich in dieser Weise als Bilder von Henkelmannigfaltigkeiten darstellen lassen, eine Gruppe bilden. In der Tat ist erstens klar, daß mit C auch $-C$ ein solches Bild ist. Zweitens: es sei $C_1 = f_1(H_{p_1}^n)$, $C_2 = f_2(H_{p_2}^n)$; wir dürfen $H_{p_1}^n$ und $H_{p_2}^n$ als fremd zueinander annehmen; wir verbinden einen Punkt $a_1 \in H_{p_1}^n$ mit einem Punkt $a_2 \in H_{p_2}^n$ durch eine Strecke E, die sonst keinen Punkt mit $H_{p_1}^n$ oder $H_{p_2}^n$ gemeinsam hat; dann gibt es, wie man leicht sieht, eine solche Abbildung g einer $H_{p_1+p_2}^n$ auf $H_{p_1}^n + E + H_{p_2}^n$, daß dabei die beiden $H_{p_i}^n$ mit dem Grade 1 bedeckt werden; man bilde nun $H_{p_1}^n + E + H_{p_2}^n$ so durch f in $\mathfrak{K}$ ab, daß $f = f_i$ auf $H_{p_i}^n$ ist ($i = 1, 2$) und daß E irgendwie auf einen Streckenzug abgebildet wird, der in $\mathfrak{K}$ die Punkte $f_1(a_1)$ und $f_2(a_2)$ verbindet; dann ist fg eine Abbildung von $H_{p_1+p_2}^n$ in $\mathfrak{K}$ mit $fg(H_{p_1+p_2}^n) = C_1 + C_2$.

Die Gruppe der Bilder n-dimensionaler Henkelmannigfaltigkeiten in $\mathfrak{K}$ heiße $\overline{\mathfrak{P}}^n$. Da die Sphäre S^n eine Henkelmannigfaltigkeit ist, ist $\overline{\mathfrak{P}}^n \supset \overline{\mathfrak{S}}^n$, also auch $\overline{\mathfrak{P}}^n \supset \mathfrak{H}^n$ (cf. 3.2). Aus der letzten Relation folgt: in einer Homologieklasse ist entweder kein Zyklus Bild einer Henkelmannigfaltigkeit, oder alle Zyklen sind solche Bilder; diejenigen Homologieklassen, deren Zyklen Bilder von Henkelmannigfaltigkeiten sind, bilden die Untergruppe $\mathfrak{P}^n = \overline{\mathfrak{P}}^n/\mathfrak{H}^n$ der Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^n$. Es ist

$$\mathfrak{P}^n \supset \mathfrak{S}^n, \quad \mathfrak{P}^n/\mathfrak{S}^n \cong \overline{\mathfrak{P}}^n/\overline{\mathfrak{S}}^n, \quad \mathfrak{B}^n/\mathfrak{P}^n \cong \mathfrak{Z}^n/\overline{\mathfrak{P}}^n.$$

4.3. Wir knüpfen an 3.7 an und behaupten:

Satz II. *Dann und nur dann sind die Homotopieränder der $(N+1)$-dimensionalen Kette C von $\mathfrak{K}$ in der Gruppe $\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$ enthalten, wenn C Bild einer Henkelmannigfaltigkeit ist.*

Hierzu ist zu bemerken: wenn *ein* Homotopierand ϱ von C in $\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$ enthalten ist, so ist *jeder* Homotopierand ϱ' von C in $\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$; denn es ist (cf. 3.4) $\varrho' - \varrho \in \mathfrak{R}_0$ und (cf. 3.3) $\mathfrak{R}_0 \subset \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$.

Für $N = 1$ besagt der Satz II nur, daß jeder zweidimensionale Zyklus Bild einer geschlossenen orientierten Fläche ist; diese Tatsache ist bekannt[11]); beim Beweis des Satzes II dürfen wir daher — was aber nicht unbedingt nötig ist — $N \geqslant 2$ voraussetzen. Der Beweis wird in den Abschnitten 4.4 bis 4.7 geführt werden.

4.4. Q_l^{N+1} ist wie in 4.1 definiert; $\mathfrak{Q}^N$ sei der aus allen höchstens N-dimensionalen Simplexen einer Simplizialzerlegung von Q_l^{N+1} bestehende Komplex; o sei ein Eckpunkt von $\mathfrak{Q}^N$, den wir als Nullpunkt für die Gruppe $\Pi^N(\mathfrak{Q}^N)$ benutzen. Für jedes λ verbinden wir o durch einen Kantenzug w_λ von $\mathfrak{Q}^N$ mit einem Punkt b_λ der Randsphäre s_λ und bilden eine Sphäre S^N so auf die Punktmenge $\overline{w_\lambda + s_\lambda}$ ab, daß einem auf S^N ausgezeichneten Pol der Punkt o entspricht und daß s_λ mit dem Grade 1 bedeckt wird. Hierdurch werden Elemente $\alpha_\lambda \in \Pi^N(\mathfrak{Q}^N)$ definiert $(\lambda = 1, \ldots, l)$.

Da man den Weg w_λ in sich auf den Punkt b_λ zusammenziehen kann, ist α_λ — genauer: jede stetige Sphäre, welche das Element α_λ repräsentiert — in $\overline{\mathfrak{Q}}^N$ homotop zu s_λ, wobei s_λ als stetige Sphäre aufzufassen ist.

Wir behaupten weiter: $\Sigma\alpha_\lambda$ ist Homotopierand der Kette Q_l^{N+1}. Für $N = 1$ erkennt man dies am einfachsten, indem man Q_l^2 längs den Wegen w_λ, von denen man annehmen darf, daß sie außer o keinen Punkt gemeinsam haben, aufschneidet. Für $N > 1$ kann man entweder einen, diesem Aufschneiden analogen Prozeß vornehmen oder folgendermaßen schließen: h sei (für den Komplex $\mathfrak{Q}^N$) der in 1.4 erklärte Homomorphismus von Π^N in $\mathfrak{B}^N$; aus der Definition des Homotopierandes folgt unmittelbar, daß immer, wenn ϱ Homotopierand einer Kette C ist, $h\varrho = \dot{C}$ der Rand von C im Sinne der Homologietheorie ist; in unserem Falle ist also, wenn das Element $\varrho \in \Pi^N(\mathfrak{Q}^N)$ Homotopierand von Q_l^{N+1} ist, $h\varrho = \Sigma s_\lambda$. Andererseits sind die α_λ so definiert, daß $h\alpha_\lambda = s_\lambda$ ist; es ist also $h\varrho = h\Sigma\alpha_\lambda$. Nun ist aber, wie man leicht sieht, Q_l^{N+1} und damit auch $\mathfrak{Q}^N$ asphärisch in den Dimensionen $1, \ldots, N-1$; folglich ([**1**], (II), Satz I) ist h ein Isomorphismus und $\varrho = \Sigma\alpha_\lambda$.

Wir haben damit gezeigt: Q_l^{N+1} besitzt einen Homotopierand $\varrho = \Sigma\alpha_\lambda$, wobei die α_λ in $\overline{\mathfrak{Q}}^N$ homotop zu den Sphären s_λ sind.

4.5. Der eine Teil des Satzes II lautet folgendermaßen: Die $(N+1)$-dimensionale Kette C von $\mathfrak{K}$ sei Bild einer Henkelmannigfaltigkeit; dann besitzt C als Homotopierand ein Element der Gruppe $\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$.

Beweis: Die Voraussetzung über C läßt sich auch so formulieren: es

---

11) [**3**], p. 290; oder als leichte Folgerung aus Satz IV, p. 173 in [**6**].

ist $C = f(Q_{2p}^{N+1})$, wobei Q_{2p}^{N+1} die Randsphären $s_1, s_1', \ldots, s_p, s_p'$ besitzt und f für jedes λ die Sphären s_λ, s_λ' derart abbildet, daß die stetigen Sphären $[f(-s_\lambda)]$ und $[f(s_\lambda')]$ identisch sind: $[f(-s_\lambda)] = [f(s_\lambda')] = \mathfrak{s}_\lambda$. Da bei einer simplizialen Abbildung ein Homotopierand einer Kette immer in einen Homotopierand der Bildkette übergeht, besitzt C den Homotopierand $f(\varrho) = f(\alpha_1) + f(\alpha_1') + \cdots + f(\alpha_p) + f(\alpha_p')$, wobei $\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_p, \alpha_p'$ die analoge Bedeutung haben wie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ in 4.4. Da in $\overline{\mathfrak{Q}}^N$ immer α_λ mit s_λ und α_λ' mit s_λ' homotop ist, ist in $\overline{\mathfrak{K}}^N$ immer $f(\alpha_\lambda)$ mit $-\mathfrak{s}_\lambda$ und $f(\alpha_\lambda')$ mit $\mathfrak{s}_\lambda$, also $f(\alpha_\lambda)$ mit $-f(\alpha_\lambda')$ homotop. Folglich ist $f(\varrho) \in \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$.

4.6. Auch dem Beweis des zweiten Teiles von Satz II schicken wir einen Hilfssatz voraus, der die von den Sphären $s_1, \ldots, s_l$ berandete Mannigfaltigkeit Q_l^{N+1} betrifft. $\mathfrak{k}$ sei ein beliebiger Komplex.

Hilfssatz: f sei eine Abbildung der Sphären s_λ in das Polyeder $\overline{\mathfrak{k}}$; für jedes λ sei $[f(s_\lambda)]$ in $\overline{\mathfrak{k}}$ einem solchen Element $\beta_\lambda \in \Pi^N(\mathfrak{k})$ homotop, daß $\Sigma\beta_\lambda = 0$ ist. Dann läßt sich f zu einer Abbildung von Q_l^{N+1} in $\overline{\mathfrak{k}}$ erweitern.[12])

Beweis: Für $l = 0$ ist der Hilfssatz inhaltslos. — Für $l = 1$ ist er richtig; denn Q_1^{N+1} ist eine Vollkugel, und die Voraussetzung besagt, daß $[f(s_1)]$ in $\overline{\mathfrak{k}}$ homotop 0 ist. — Auch für $l = 2$ ist der Hilfssatz richtig; denn Q_2^{N+1} ist das topologische Produkt einer S^N mit einer Strecke, und die Voraussetzung besagt, daß $[f(s_1)]$ und $[f(-s_2)]$ in $\overline{\mathfrak{k}}$ einander homotop sind.

Es sei $l = 3$. Wir stellen Q_3^{N+1} folgendermaßen im euklidischen Raum R^{N+1} dar: aus dem Inneren einer, von der N-dimensionalen Sphäre s_3 begrenzten Vollkugel sind die Innengebiete zweier zueinander fremder, von s_1 bzw. s_2 begrenzter Vollkugeln herausgenommen. Es seien: s_3' eine mit s_3 konzentrische, kleinere Sphäre, die s_1 und s_2 im Innern enthält; A eine N-dimensionale Ebene, die s_1 und s_2 voneinander trennt; u die $(N-1)$-dimensionale Schnittsphäre von A und s_3'; E die von u in A begrenzte Vollkugel; h_1, h_2 die beiden Teile, in die s_3' durch u zerlegt wird, derart, daß s_i in dem von $h_i + E$ begrenzten Gebiet liegt $(i = 1,2)$.

Wir sollen die auf s_1, s_2, s_3 gegebene, die Voraussetzung des Hilfssatzes erfüllende Abbildung f zu einer Abbildung von Q_3^{N+1} in $\overline{\mathfrak{k}}$ erweitern. Wir setzen zunächst $f(E) = o$, wobei o der Nullpunkt der Gruppe $\Pi^N(\mathfrak{k})$ ist; darauf erklären wir f auf h_i so, daß die Abbildung des, mit einer S^N homöomorphen Gebildes $\overline{h_i + E}$ das in der Voraussetzung genannte Element $\beta_i \in \Pi^N(\mathfrak{k})$ repräsentiert $(i = 1,2)$; das Bild von $s_3' = h_1 + h_2$ stellt dann, wie aus der Summendefinition in Π^N hervor-

[12]) Daß der Raum $\overline{\mathfrak{k}}$ ein Polyeder ist, wird übrigens beim Beweis nicht benutzt werden.

geht, das Element $\beta_1 + \beta_2$, also nach Voraussetzung das Element $-\beta_3$ dar. Da das durch f gelieferte Bild von s_3 nach Voraussetzung homotop zu β_3 ist, kann man daher f zu einer Abbildung der von s_3 und $-s_3'$ berandeten Kugelschale erweitern; schließlich kann man für $i = 1{,}2$, da $[f(s_i)]$ homotop zu dem durch $[f(h_i + E)]$ repräsentierten Element β_i ist, f auch auf den von $h_i + E$ und $-s_i$ begrenzten Bereich erweitern. Damit ist f in der gewünschten Weise konstruiert.

Es sei $l > 3$; für Q_{l-1}^{N+1} sei der Hilfssatz schon bewiesen. Wir dürfen annehmen, daß sich in Q_l^{N+1} eine N-dimensionale Sphäre s^* wählen läßt, die s_1 und s_2 einerseits von $s_3, \ldots, s_l$ andererseits trennt; sie zerlegt Q_l^{N+1} in eine Q_3^{N+1} und eine Q_{l-1}^{N+1}; dabei sei s^* so orientiert, daß die Ränder $\dot{Q}_3^{N+1} = s_1 + s_2 + s^*$, $\dot{Q}_{l-1}^{N+1} = s_3 + \cdots + s_l - s^*$ sind. Wir erklären f auf s^* so, daß $[f(s^*)]$ mit $-\beta_1 - \beta_2$, also auch mit $\beta_3 + \cdots + \beta_l$ homotop ist; dann kann man f, wie soeben gezeigt wurde, auf Q_3^{N+1} sowie nach Induktionsvoraussetzung auf Q_{l-1}^{N+1} erweitern.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. — Leicht zu beweisen ist übrigens seine Umkehrung: Wenn f eine Abbildung von Q_l^{N+1} in $\bar{\mathfrak{k}}$ ist, so gibt es in $\Pi^N(\mathfrak{k})$ solche Elemente β_λ, daß die $[f(s_\lambda)]$ homotop zu den β_λ sind und daß $\Sigma \beta_\lambda = 0$ ist.

4.7. Jetzt beweisen wir den zweiten Teil von Satz II, der so lautet: Die Kette C von $\mathfrak{K}$ besitze einen Homotopierand $\varrho \in \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$; dann ist $C \in \mathfrak{P}^{N+1}$ (cf. 4.2).

Beweis: Es genügt, eine Kette $C' \in \overline{\mathfrak{P}}^{N+1}$ zu finden, die denselben Homotopierand ϱ besitzt; denn in der Ausdrucksweise von 3.4 ist dann $T(C) = T(C')$, also $C - C' \in \overline{\mathfrak{S}}^{N+1}$, also, da $\overline{\mathfrak{S}}^{N+1} \subset \overline{\mathfrak{P}}^{N+1}$ ist (cf. 4.2), auch $C \in \overline{\mathfrak{P}}^{N+1}$.

Es ist $\varrho = \sum_{\lambda=1}^{p} (\beta_\lambda - \beta_\lambda')$, wobei immer $\beta_\lambda, \beta_\lambda'$ homotope Elemente von $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ sind. Wir betrachten eine Q_{2p+1}^{N+1}, deren Randsphären wir $s_1, s_1', \ldots, s_p, s_p', r$ nennen, und zwar seien sie so orientiert, daß $\dot{Q}_{2p+1}^{N+1} = \Sigma (s_\lambda - s_\lambda') - r$ ist. Wir definieren eine Abbildung f der Randsphären in den Komplex $\mathfrak{K}^N$ so, daß $[f(s_\lambda)]$, $[f(s_\lambda')]$, $[f(r)]$ bzw. die Elemente $\beta_\lambda, \beta_\lambda', \varrho$ repräsentieren; dann läßt sich f nach 4.6 zu einer Abbildung f von Q_{2p+1}^{N+1} in $\mathfrak{K}^N$ erweitern. Für jedes λ setzen wir an Q_{2p+1}^{N+1} ein Exemplar P_λ des topologischen Produktes einer S^N mit einer Strecke derart an, daß die orientierten Randsphären von P_λ mit $-s_\lambda$ und s_λ' identifiziert werden; da $[f(s_\lambda)]$ und $[f(s_\lambda')]$ in $\overline{\mathfrak{K}}^N$ miteinander homotop sind, läßt sich dann f so auf diese P_λ erweitern, daß $f(Q_{2p+1}^{N+1} + \Sigma P_\lambda) \subset \mathfrak{K}^N$ ist. Schließlich fügen wir ein Element E^{N+1} an Q_{2p+1}^{N+1} dadurch an, daß wir seine Randsphäre mit r identifizieren; da das durch $[f(r)]$ repräsentierte Element $\varrho \in \Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ als Homotopierand in der Gruppe $\mathfrak{R}$ liegt (cf. 3.3, 3.4), ist $[f(r)]$ in $\bar{\mathfrak{K}}$ homotop 0, und daher läßt sich f auf E^{N+1} erweitern, sodaß $f(E^{N+1}) \subset \mathfrak{K}$ ist. Die Kette $C' = f(E^{N+1})$ hat dann die gewünschten Eigenschaften: erstens hat sie den durch $[f(r)]$ repräsentierten Homotopierand ϱ; zweitens ist, da $f(Q_{2p+1}^{N+1} + \Sigma P_\lambda) \subset \mathfrak{K}^N$ ist, C' gleich dem Bild $f(H_p^{N+1})$ der Henkelmannigfaltigkeit

$$H_p^{N+1} = Q_{2p+1}^{N+1} + \Sigma P_\lambda + E^{N+1} .$$

4.8. Den Inhalt des hiermit bewiesenen Satzes II können wir unter Benutzung der Ausdrucksweisen aus 3.4 und 4.2 auch folgendermaßen formulieren: Bei dem Homomorphismus T ist die Gruppe $\bar{\mathfrak{P}}^{N+1}$ das Urbild der Gruppe $\mathfrak{R} \frown \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)$. Nach 3.4 und 4.2 folgen hieraus die Isomorphien

$$\mathfrak{P}^{N+1}/\mathfrak{S}^{N+1} \cong \bar{\mathfrak{P}}^{N+1}/\bar{\mathfrak{S}}^{N+1} \cong \mathfrak{R} \frown \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)/\mathfrak{R}_0 , \tag{5}$$

$$\mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{P}^{N+1} \cong \mathfrak{Z}^{N+1}/\bar{\mathfrak{P}}^{N+1} \cong \mathfrak{R} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)/\mathfrak{R} \frown \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) . \tag{6}$$

4.9. Auf (6) werden wir in 5.4 zurückkommen; von (5) machen wir sogleich eine Anwendung:

Wenn $\mathfrak{K}$ asphärisch in wenigstens einer der beiden Dimensionen 1 und N ist, so ist jeder $(N+1)$-dimensionale Zyklus, der Bild einer Henkelmannigfaltigkeit ist, sogar Bild einer Sphäre.

Denn wenn $\mathfrak{K}$ asphärisch in der Dimension 1, also einfach zusammenhängend ist, so gilt dasselbe von $\mathfrak{K}^N$, und daher ist $\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) = 0$ (cf. 1.3); wenn $\mathfrak{K}$ asphärisch in der Dimension N ist, so ist

$$\mathfrak{R} = \Pi^N(\mathfrak{K}^N) , \quad \mathfrak{R} \frown \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) = \mathfrak{R}_0 ;$$

in beiden Fällen ist nach (5) $\mathfrak{P}^{N+1}/\mathfrak{S}^{N+1} = 0$.

5. Die Beziehung zwischen den Gruppen $\Delta^N(\mathfrak{K}^N)$ und $\Delta^N(\mathfrak{K})$

5.1. Wir betrachten wie bisher einen Komplex $\mathfrak{K}$ und den zugehörigen Komplex $\mathfrak{K}^N$. Die Gruppen $\Pi^N(\mathfrak{K})$ und $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ sollen denselben Nullpunkt o haben. Dann repräsentiert jede stetige Sphäre, die ein Element von $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ repräsentiert, zugleich ein Element von $\Pi^N(\mathfrak{K})$, und zwei stetige Sphären, die in $\bar{\mathfrak{K}}^N$ äquivalent sind (cf. 1.1), also dasselbe Element $\alpha \in \Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ repräsentieren, sind auch in $\overline{\mathfrak{K}}$ äquivalent, repräsentieren also dasselbe Element $\varphi\alpha \in \Pi^N(\mathfrak{K})$. Damit ist eine eindeutige Abbildung, die „natürliche" Abbildung, φ von $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ in $\Pi^N(\mathfrak{K})$ erklärt. Sie ist offenbar ein Homomorphismus. Sie ist sogar eine Abbildung auf $\Pi^N(\mathfrak{K})$, d. h. es ist $\varphi\Pi^N(\mathfrak{K}^N) = \Pi^N(\mathfrak{K})$; denn jedes Element von $\Pi^N(\mathfrak{K})$ läßt sich nicht nur durch „stetige", sondern auch durch „simpliziale" N-dimensionale Sphären repräsentieren, und diese liegen in $\mathfrak{K}^N$, repräsentieren also zugleich Elemente von $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$. Der Kern von φ ist die Gruppe $\mathfrak{R}$ (cf. 3.3).

Aus den Definitionen der Gruppen Π_0^N und Γ^N folgt leicht, daß $\varphi\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) \subset \Pi_0^N(\mathfrak{K})$, $\varphi\Gamma^N(\mathfrak{K}^N) \subset \Gamma^N(\mathfrak{K})$ ist; wir werden in 5.2 und 5.3 zeigen, daß sogar $\varphi\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) = \Pi_0^N(\mathfrak{K})$, $\varphi\Gamma^N(\mathfrak{K}^N) = \Gamma^N(\mathfrak{K})$ ist.

5.2. Um zu zeigen, daß $\varphi\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) = \Pi_0^N(\mathfrak{K})$ ist, genügt es offenbar, folgendes zu beweisen: Die Elemente $\beta, \beta' \in \Pi^N(\mathfrak{K})$ seien einander homotop (in $\overline{\mathfrak{K}}$); dann gibt es solche Elemente $\alpha, \alpha' \in \Pi^N(\mathfrak{K}^N)$, daß α, α' aneinander homotop (in $\overline{\mathfrak{K}^N}$) sind und daß $\varphi\alpha = \beta$, $\varphi\alpha' = \beta'$ ist.

Beweis: Q^{N+1} sei ein, von zwei konzentrischen Sphären s, s' begrenzter Bereich des R^{N+1}; die Orientierungen seien derart, daß $\dot{Q}^{N+1} = s - s'$ ist; dann gibt es eine solche simpliziale Abbildung f von Q^{N+1} in $\mathfrak{K}$, daß die stetigen (simplizialen) Sphären $[f(s)]$, $[f(s')]$ die Elemente β, β' repräsentieren; dabei sind auf s, s' Pole a, a' ausgezeichnet. Wir verbinden a' mit a durch einen Weg w, der aus Kanten der, f zugrundegelegten Simplizialzerlegung von Q^{N+1} besteht, und verstehen unter g eine solche Abbildung einer S^N auf die Punktmenge $\overline{w+s}$, daß s mit dem Grade 1 bedeckt wird; dabei sei auf S^N ein Pol a'' mit $g(a'') = a'$ ausgezeichnet. Nun seien α, α' die durch die stetigen Sphären $[f(s)]$, $[fg(S^N)]$ repräsentierten Elemente von $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$. Daß α, α' einander homotop in $\overline{\mathfrak{K}^N}$ sind, sieht man, indem man w in sich auf den Punkt a zusammenzieht, wodurch $[g(S^N)]$ in s deformiert wird, und diesen Prozeß durch f in $\overline{\mathfrak{K}}$ (und zwar in $\overline{\mathfrak{K}^N}$) überträgt. Daß $\varphi\alpha = \beta$ ist, ist klar; daß $\varphi\alpha' = \beta'$ ist, d. h. daß $[fg(S^N)]$ und $[f(s')]$ in $\overline{\mathfrak{K}}$ äquivalent sind, ergibt sich, wenn man $\overline{w+s}$ innerhalb Q^{N+1} unter Festhaltung von a' auf die Sphäre s' deformiert und dabei immer die Abbildung f ausübt.

5.3. Um zu beweisen, daß $\varphi\Gamma^N(\mathfrak{K}^N) = \Gamma^N(\mathfrak{K})$ ist, haben wir zu einem gegebenen $\beta \in \Gamma^N(\mathfrak{K})$ ein $\alpha \in \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)$ so zu finden, daß $\varphi\alpha = \beta$ ist.

h sei der wie in 1.4 erklärte Homomorphismus von $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ in die Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^N$ oder, was dasselbe ist, in die Zyklengruppe $\mathfrak{Z}^N$ von $\mathfrak{K}^N$. Zu dem gegebenen β gibt es (cf. 5.1) ein $\alpha_0 \in \Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ mit

$\varphi\alpha_0 = \beta$; daß $\beta \in \Gamma^N(\mathfrak{K})$ ist, bedeutet: der Zyklus $h\alpha_0$ ist in $\mathfrak{K}$ homolog 0, d. h. es gibt eine Kette C, deren Rand $\dot{C} = h\alpha_0$ ist. ϱ sei ein Homotopierand von C (cf. 3.4); dann ist auch $h\varrho = \dot{C}$. Setzen wir $\alpha_0 - \varrho = \alpha$, so ist daher $h\alpha = 0$, d. h. $\alpha \in \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)$; ferner ist $\varrho \in \mathfrak{N}$, also $\varphi\varrho = 0$ und $\varphi\alpha = \varphi\alpha_0 = \beta$.

5.4. Bereits aus den in 5.1 festgestellten Tatsachen

$$\varphi\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) \subset \Pi_0^N(\mathfrak{K}) \qquad \text{und} \qquad \varphi\Gamma^N(\mathfrak{K}^N) \subset \Gamma^N(\mathfrak{K})$$

folgt, daß φ einen Homomorphismus Φ der Restklassengruppe $\Delta^N(\mathfrak{K}^N)$ in die Restklassengruppe $\Delta^N(\mathfrak{K})$ bewirkt. Aus 5.3 folgt, daß Φ eine Abbildung *auf* $\Delta^N(\mathfrak{K})$ ist. Wir wollen jetzt den Kern von Φ bestimmen.

Die durch φ bewirkte Abbildung von $\Gamma^N(\mathfrak{K}^N)$ auf $\Gamma^N(\mathfrak{K})$ nennen wir φ'; da $\mathfrak{N}$ der Kern von φ ist, ist $\mathfrak{N} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)$ der Kern von φ'; hieraus und aus 5.2 folgt, daß das Urbild von $\Pi_0^N(\mathfrak{K})$ bei der Abbildung φ' die Gruppe $\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) \cdot (\mathfrak{N} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N))$ ist. Demnach ist der Kern von Φ die Faktorgruppe

$$\Pi_0^N(\mathfrak{K}^N) \cdot (\mathfrak{N} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N)) \,/\, \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)\ ;$$

sie ist isomorph mit

$$\mathfrak{N} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N) \,/\, \mathfrak{N} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N) \frown \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)\,,$$

also, da $\Pi_0^N \subset \Gamma^N$ ist, mit

$$\mathfrak{N} \frown \Gamma^N(\mathfrak{K}^N) \,/\, \mathfrak{N} \frown \Pi_0^N(\mathfrak{K}^N)\ ;$$

diese Gruppe aber ist nach 4.8 (6) isomorph mit $\mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{P}^{N+1}$.

Damit sind wir zu folgendem Ergebnis gelangt:

Satz III. *Der natürliche Homomorphismus φ von $\Pi^N(\mathfrak{K}^N)$ auf $\Pi^N(\mathfrak{K})$ bewirkt einen Homomorphismus Φ von $\Delta^N(\mathfrak{K}^N)$ auf $\Delta^N(\mathfrak{K})$, dessen Kern isomorph mit der Faktorgruppe $\mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{P}^{N+1}$ ist.*

Hierin ist enthalten:

Korollar. Die Gruppe $\Delta^N(\mathfrak{K}^N)$ besitzt eine solche Untergruppe Θ^N, daß die folgenden beiden Isomorphien gelten:

$$\Delta^N(\mathfrak{K}^N) \,/\, \Theta^N \cong \Delta^N(\mathfrak{K})\,, \qquad \Theta^N \cong \mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{P}^{N+1}.$$

5.5. Durch Kombination dieses Korollars mit dem Satz I (Nr. 2.2) erhält man

Satz IV. *$\mathfrak{K}$ sei ein beliebiger Komplex, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ besitzt und asphärisch in den Dimensionen n mit $1 < n < N$ ist $(N \geqq 2)$. Dann enthält die Gruppe $\mathfrak{G}^{N+1}$ eine Untergruppe Θ^N, für welche die Isomorphien gelten* [13]*:*

$$\mathfrak{G}^{N+1}/\Theta^N \cong \Delta^N = \Gamma^N/\Pi_0^N\,, \tag{7}$$

$$\Theta^N \cong \mathfrak{B}^{N+1}/\mathfrak{P}^{N+1}\,. \tag{8}$$

Denn da für $n < N$ immer $\Pi^n(\mathfrak{K}) = \Pi^n(\mathfrak{K}^N)$ ist, folgt aus den Voraussetzungen des Satzes IV, daß die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt sind; aus der Behauptung des Satzes I und dem Korollar 5.4 folgt die Behauptung des Satzes IV.

Der Satz I ist übrigens ein Korollar des Satzes IV. Denn wenn $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^N$ ist, so ist $\mathfrak{B}^{N+1} = 0$, nach (8) also $\Theta^N = 0$, und (7) geht in die Behauptung des Satzes I über.

Ebenso wie der Satz I den Satz I′, enthält der Satz IV den

Satz IV′. *$\mathfrak{K}$ sei ein beliebiger Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$. Dann enthält die Gruppe $\mathfrak{G}^3$ eine Untergruppe Θ^2, für welche die Isomorphien gelten:*

$$\mathfrak{G}^3/\Theta^2 \cong \Delta^2 = \Gamma^2/\Pi_0^2\,, \tag{7′}$$

$$\Theta^2 \cong \mathfrak{B}^3/\mathfrak{P}^3\,. \tag{8′}$$

5.6. *Anwendungen und Beispiele.* Wenn $\mathfrak{G}^3 = 0$ — also z. B. wenn $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe ist ([4], 10.1) —, so ist jeder dreidimensionale Zyklus in $\mathfrak{K}$ Bild einer Henkelmannigfaltigkeit; denn aus $\mathfrak{G}^3 = 0$ folgt $\Theta^2 = 0$, also nach (8′) $\mathfrak{B}^3 = \mathfrak{P}^3$. Ferner folgt aus $\mathfrak{G}^3 = 0$ nach (7′), daß $\Gamma^2 = \Pi_0^2$ ist.

5.7. Wir nehmen zu der Voraussetzung $\mathfrak{G}^3 = 0$ noch die Voraussetzung hinzu, daß $\mathfrak{K} = M^3$ eine dreidimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit ist. Daß ihr Grundzyklus Bild einer Henkelmannigfaltigkeit H^3 ist, bedeutet: H^3 läßt sich mit dem Grade 1 auf M^3 abbilden. Bei einer solchen Abbildung ist jeder Zyklus aus M^3 dem Bilde eines Zyklus aus H^3 homolog ([7], Satz II); nun besitzt H^3, wie man direkt

---

[13]) Die Gruppen in (7) und (8) beziehen sich sämtlich auf den Komplex $\mathfrak{K}$.

bestätigt, eine zweidimensionale Homologiebasis, die aus Kugelflächen besteht; folglich ist jeder zweidimensionale Zyklus aus M^3 einem Kugelbild homolog, d. h. es ist $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{S}^2$. Da immer $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{G}^2$ ist, ist also $\mathfrak{G}^2 = 0$. Damit ist bewiesen: *Ist* $\mathfrak{G}$ *Fundamentalgruppe einer (geschlossenen orientierbaren) Mannigfaltigkeit* M^3 *und ist* $\mathfrak{G}^3 = 0$, *so ist auch* $\mathfrak{G}^2 = 0$.

Gruppen $\mathfrak{G}$, für welche $\mathfrak{G}^2 \neq 0, \mathfrak{G}^3 = 0$ ist, können also nicht als Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten M^3 auftreten. Beispiele solcher Gruppen sind die Fundamentalgruppen der geschlossenen orientierbaren Flächen von positivem Geschlecht[14]), allgemeiner: die Fundamentalgruppen von zweidimensionalen Komplexen $\mathfrak{k}$, welche in der Dimension 2 asphärisch, aber nicht azyklisch sind; denn da $\mathfrak{k}$ asphärisch ist, ist erstens $\mathfrak{B}^3/\mathfrak{S}^3 = \mathfrak{G}^3$ (cf. 3.6), also, da $\mathfrak{k}$ zweidimensional ist, $\mathfrak{G}^3 = 0$, und zweitens $\mathfrak{S}^2 = 0$, also $\mathfrak{B}^2 \cong \mathfrak{G}^2$, also, da $\mathfrak{k}$ nicht azyklisch ist, $\mathfrak{G}^2 \neq 0$.

5.8. Wir betrachten noch weiter Mannigfaltigkeiten M^3 mit $\mathfrak{G}^3 = 0$. Nach 5.7 ist $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{S}^2$; aus den Definitionen von $\mathfrak{S}^2$ als Bild $h\Pi^2$ und von Γ^2 als Kern von h folgt, daß immer $\mathfrak{S}^2 \cong \Pi^2/\Gamma^2$ ist; nach 5.6 ist $\Gamma^2 = \Pi_0^2$; es ist also $\mathfrak{B}^2 \cong \Pi^2/\Pi_0^2$. Die erste Bettische Gruppe von M^3 ist isomorph mit der Gruppe $\mathfrak{G}^1$ (dies ist die Faktorgruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ nach ihrer Kommutatorgruppe); nach dem Poincaréschen Dualitätssatz ist dann $\mathfrak{B}^2$ isomorph mit der Faktorgruppe $\mathfrak{G}_0^1$ der Gruppe $\mathfrak{G}^1$ nach der Untergruppe ihrer Elemente endlicher Ordnung. Für eine M^3 mit $\mathfrak{G}^3 = 0$ ist also $\Pi^2/\Pi_0^2 \cong \mathfrak{G}_0^1$.

Beispiel: Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ der Mannigfaltigkeit M^3 sei die freie Gruppe mit p Erzeugenden (dies ist der Fall, wenn M^3 die Henkelmannigfaltigkeit H_p^3 ist). Dann ist Π^2/Π_0^2 die freie Abelsche Gruppe vom Range p.[15])

5.9. Für die eben betrachteten Mannigfaltigkeiten M^3 ist $\Delta^2 = 0$, d. h. $\Gamma^2 = \Pi_0^2$; Mannigfaltigkeiten, für die dies nicht der Fall ist, findet man auf Grund folgender Bemerkung: Für eine M^3 ist $\mathfrak{B}^3$ unendlich zyklisch, nach (8′) also Θ^2 zyklisch; wenn $\mathfrak{G}^3$ nicht zyklisch ist, ist daher nach (7′) $\Gamma^2 \neq \Pi_0^2$.

---

[14]) Ein anderer Beweis dafür, daß diese Gruppen nicht als Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten M^3 auftreten, ist in [8], Nr. 28, enthalten.

[15]) Die Struktur der Gruppe Π^n / Π_0^n verdient besonders darum Interesse, weil sich in ihr eine wesentliche Eigenschaft der Homotopiegruppe Π^n als „Gruppe mit Operatoren" im Sinne von [2] äußert; cf. 1.7.

Beispiel: M^3 sei die topologische Summe ([6], p. 218 unten) von zwei dreidimensionalen Toroiden (topologischen Produkten $S^1 \times S^1 \times S^1$); dann ist, wie man leicht bestätigt, $\mathfrak{G}^3$ die freie Abelsche Gruppe vom Range 2;[16]) da Θ^2 zyklisch ist, folgt aus (8'), daß Δ^2 unendlich ist. — Übrigens ist für diese M^3, wie man ebenfalls leicht sieht, $\mathfrak{S}^2 = 0$, also, da immer $\mathfrak{S}^2 \cong \Pi^2/\Gamma^2$ ist, $\Gamma^2 = \Pi^2$, $\Delta^2 = \Pi^2/\Pi^2_0$.

[16]) Andeutung eines Beweises: Der Komplex $\mathfrak{K}$, der entsteht, wenn man zwei Toroide in einem Punkt zusammenheftet, hat dieselbe Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ wie M^3; er ist, wie man leicht sieht, asphärisch (im Gegensatz zu M^3), und daher ist $\mathfrak{G}^3$ isomorph mit seiner dritten Bettischen Gruppe.

LITERATUR

[1] *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Akad. Amsterdam: (I) vol. 38 (1935), 112—119; (II) vol. 38 (1935), 521—528; (III) vol. 39 (1936), 117—126; (IV) vol. 39 (1936), 215—224.

[2] *S. Eilenberg*, On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, Fund. Math. 32 (1939), 167—175.

[3] *H. Hopf*, Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comment. Math. Helvet. 14 (1942), 257—309. — Nachtrag hierzu, ibidem 15 (1942), 27—32.

[4] *H. Hopf*, Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, Comment. Math. Helvet. 17 (1944), 39—79.

[5] *P. Alexandroff* und *H. Hopf*, Topologie I (Berlin 1935).

[6] *H. Seifert* und *W. Threlfall*, Lehrbuch der Topologie (Leipzig und Berlin 1934).

[7] *H. Hopf*, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Journ. f. d. r. u. a. Math. (Crelle) 163 (1930), 71—88.

(Eingegangen den 13. April 1945.)