

# Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche.

Autor(en): **Rutishauser, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **17 (1944-1945)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16346>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche

Von H. RUTISHAUSER, Bern

Mit  $V_n$  sei eine Verteilung von  $n$  Punkten auf der Oberfläche der Einheitskugel bezeichnet, mit  $\Delta(V_n)$  die kleinste sphärische Distanz, welche durch die  $\binom{n}{2}$  Punktepaare von  $V_n$  geliefert wird. Es ist anschaulich klar, daß  $\Delta(V_n)$  für ein fest vorgegebenes  $n$  ( $n \geq 2$ ) nicht zu groß sein kann, und es wird von Interesse sein, den genauen Wert von

$$\Delta_n = \text{fin sup } \Delta(V_n) \quad (1)$$

zu kennen<sup>1)</sup>.  $\Delta_n$  bedeutet also den größten Wert, den die kleinste Distanz bei einer Verteilung von  $n$  Punkten auf der Einheitskugel annehmen kann. Daß wirklich Punktverteilungen existieren, die diesen extremalen Wert der kleinsten Distanz liefern, kann leicht aus der Kompaktheit und Abgeschlossenheit der Kugelfläche gefolgert werden; solche Verteilungen sollen als „extremale Punktverteilungen“ bezeichnet werden. Bei der Ermittlung des exakten Wertes von  $\Delta_n$  scheint man jedoch, abgesehen von einigen Ausnahmewerten für  $n$ , auf erhebliche Schwierigkeiten zu stoßen; man hat sich daher vorläufig mit Abschätzungsformeln zu begnügen. So hat *L. Fejes*<sup>2)</sup> kürzlich eine Abschätzungsformel

$$\cos \Delta_n \geq \frac{1}{2} \left\{ \text{ctg}^2 \left( \frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right\} \quad (n \geq 3) \quad (2)$$

gefunden, die bemerkenswerterweise für  $n = 3, 4, 6$  und  $12$  scharf ist. Diese Formel liefert also für die angegebenen  $n$  die exakten Werte von  $\Delta_n$ .

Es ist zu erwarten, daß diejenigen  $n$ , welche regelmäßige Punktverteilungen  $V_n$ , insbesondere Eckpunktverteilungen regulärer Polyeder gestatten, innerhalb unseres Fragenkreises eine ausgezeichnete Rolle spielen werden. Für  $n = 2$  und  $n = 3$  sind die extremalen Verteilungen durch ein antipodisches Punktepaar und durch die Eckpunkte eines

---

<sup>1)</sup> Unter  $\text{fin sup } \Delta(V_n)$  verstehen wir die obere Grenze aller Werte  $\Delta(V_n)$ .

<sup>2)</sup> *L. Fejes*, Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jahresbericht der D. M. V. 53 (1943), 66—68. Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn die  $n$  Punkte die Ecken eines regulären Dreieckspolyeders bilden.

einem Großkreis eingeschriebenen regulären Dreiecks gegeben. In diesen trivialen Fällen findet man für die entsprechenden  $\Delta_n$

$$\begin{aligned} \cos \Delta_2 &= -1 \\ \cos \Delta_3 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Für  $n = 4, 6, 8, 12$  und  $20$  liegt ein Vergleich mit den Eckpunktverteilungen der 5 regulären Polyeder sehr nahe. Nach den Untersuchungen von *L. Fejes*<sup>3)</sup> ergibt dieser Vergleich

$$\begin{aligned} \cos \Delta_4 &= -\frac{1}{3} = -0,3333\dots \quad (\text{Tetraeder}) \\ \cos \Delta_6 &= 0 = 0,0000\dots \quad (\text{Oktaeder}) \\ \cos \Delta_8 &< \frac{1}{3} = 0,3333\dots \quad (\text{Hexaeder}) \\ \cos \Delta_{12} &= \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,4472\dots \quad (\text{Ikosaeder}) \\ \cos \Delta_{20} &< \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,7454\dots \quad (\text{Dodekaeder}). \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Darstellung zeigt uns, daß das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder Punktverteilungen liefern, die in unserm Sinne extremal sind; für das Hexaeder und das Dodekaeder trifft dies dagegen nicht zu. Für  $n = 8$  und  $n = 20$  ergeben sich aus der Abschätzung (2) und unter Verwendung der Werte (4) folgende Schranken für  $\Delta_n$ :

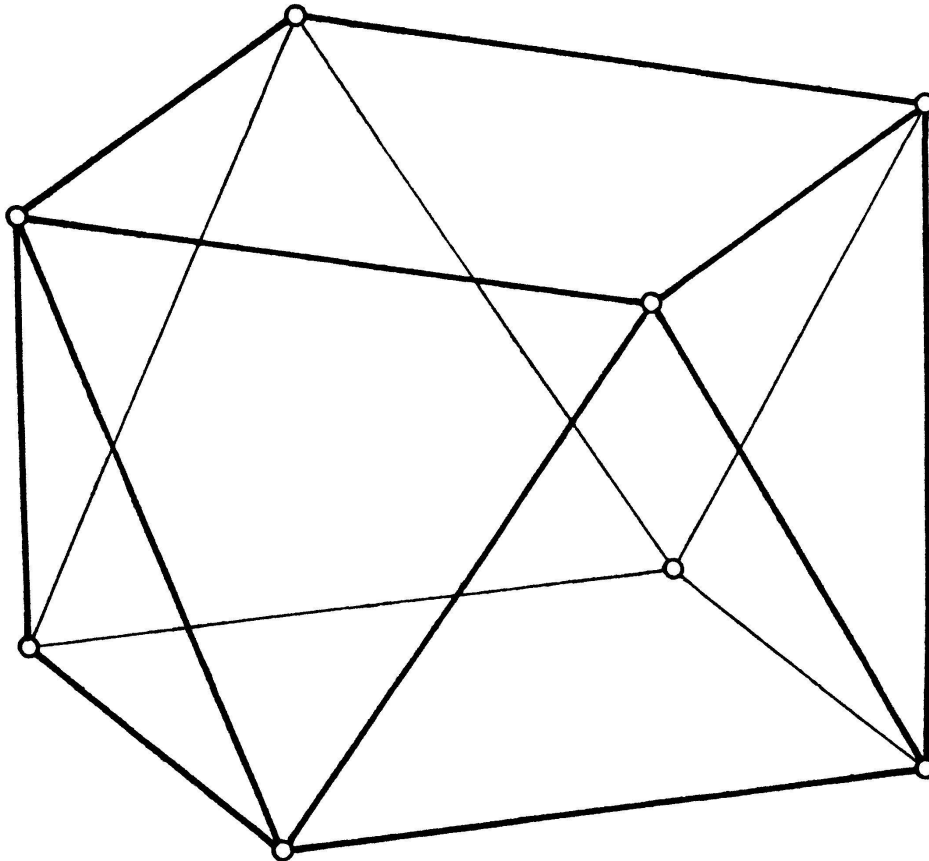
$$\begin{aligned} 0,2101\dots &< \cos \Delta_8 < 0,3333\dots \\ 0,6558\dots &< \cos \Delta_{20} < 0,7454\dots \end{aligned} \tag{5}$$

Es erhebt sich nun die Frage nach solchen Punktverteilungen (Polyedern), die in bezug auf die von uns aufgestellte Extremalforderung das Hexaeder und das Dodekaeder zu ersetzen oder wenigstens zu verbessern vermögen. Es sollen im folgenden zwei Polyeder beschrieben werden, die in unserer Fragestellung eine Verbesserung des Hexaeders und des Dodekaeders darstellen, d. h. die bei diesen zwei neuen Verteilungen auftretenden kleinsten Distanzen sind größer als die durch die entsprechenden regulären Polyeder realisierten Distanzen<sup>4)</sup>.

<sup>3)</sup> *L. Fejes*, Die regulären Polyeder als Lösungen von Extremalaufgaben. *Matematikai és Természettudományi Értesítő* LXI (1942), 471—477.

<sup>4)</sup> Diese Untersuchungen wurden im Winter 1942/43 bei Herrn Prof. *H. Hadwiger* im Math. Seminar der Universität Bern durchgeführt.

Das Polyeder  $A$ , eine  $V_8$ , entsteht aus dem Würfel, indem zuerst die Deckfläche um  $\frac{\pi}{4}$  um die  $z$ -Achse gedreht wird; hierauf werden 4 neue Kanten gezogen, so daß längs des Äquators eine Zone aus 8 gleichschenkligen Dreiecken entsteht, schließlich werden Grund- und Deckfläche so weit gegen den Äquator zusammengeschoben, bis die Dreiecke gleichseitig sind. Das Polyeder besitzt also 8 Ecken, 10 Flächen und 16 Kanten (vgl. Figur A).

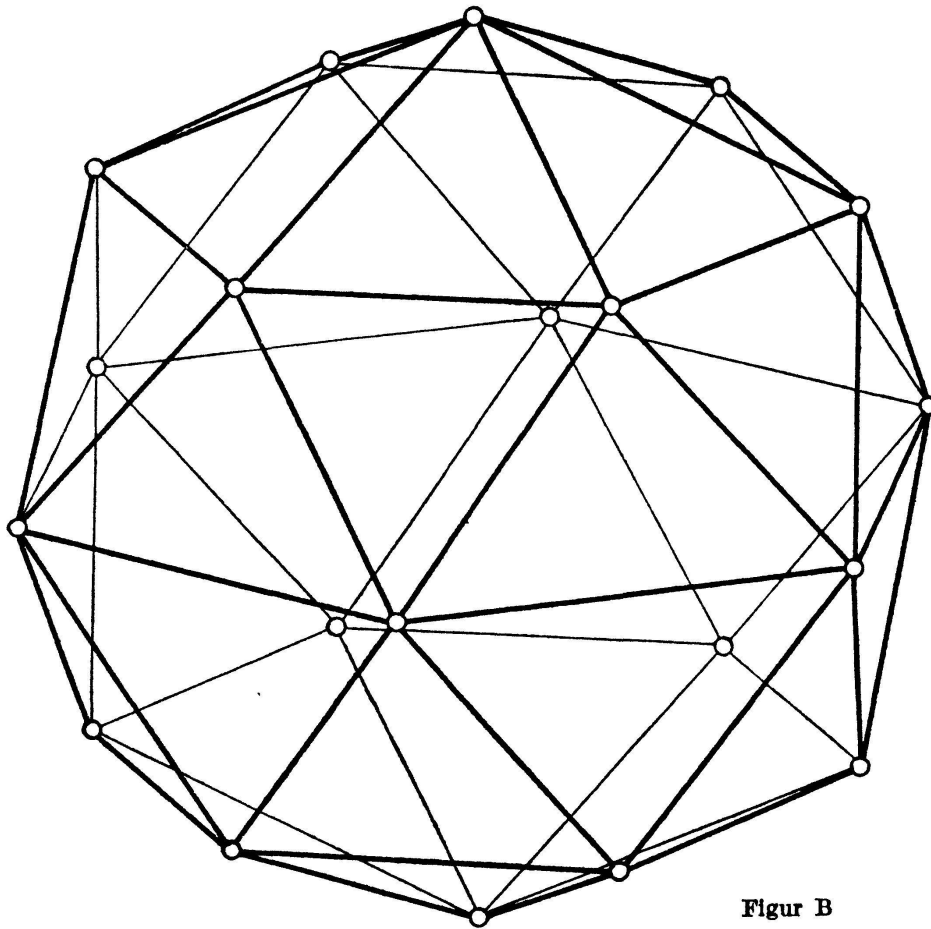


Figur A

Der Körper  $B$ , eine  $V_{20}$ , ist ein Dreieckspolyeder mit der Äquator-ebene als Symmetrie-Ebene. Jede der beiden symmetrischen Hälften setzt sich zusammen aus 6 gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis im Äquator und einer Zone von 6 gleichseitigen Dreiecken mit der Spitze im Äquator; abgeschlossen wird der Körper an den beiden Polen durch Kappen von je 6 gleichschenkligen Dreiecken. Dieses Polyeder enthält also 20 Ecken, 36 Flächen und 54 Kanten (vgl. Figur B).

Zur Festlegung dieser beiden, der Einheitskugel einbeschriebenen, Polyeder  $A$  und  $B$  geben wir die Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ihrer Eckpunkte,

bezogen auf ein rechtwinkliges System. In der unten folgenden Tabelle sind alle sich aus den doppelsinnigen Vorzeichen ergebenden Möglichkeiten zu berücksichtigen.



Figur B

Polyeder A		
$x$	$y$	$z$
$\pm \sqrt{2} u$	0	$a$
0	$\pm \sqrt{2} u$	$a$
$\pm u$	$\pm u$	$-a$
Polyeder B		
$x$	$y$	$z$
0	0	$\pm 1$
$\pm \sqrt{3} v$	$\pm v$	$\pm b$
0	$\pm 2v$	$\pm b$
$\pm 1$	0	0
$\pm w$	$\pm \sqrt{3} w$	0

$$a = \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{8}}}$$

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{8}}}$$

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{33} - 5}{2}}$$

$$v = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}$$

$$w = \frac{1}{2}$$

Für die kleinsten Punktdistanzen ergibt eine elementar durchführbare Musterung

$$\begin{aligned}\cos \Delta(A) &= \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} \\ \cos \Delta(B) &= \frac{\sqrt{33} - 3}{4} .\end{aligned}\tag{6}$$

Auf Grund der beiden Resultate (6) können die in der Tabelle (5) angeführten Ungleichungen wesentlich verschärft werden, indem nun

$$\begin{aligned}\cos \Delta_8 &\leq \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} = 0,2612\dots \\ \cos \Delta_{20} &\leq \frac{\sqrt{33} - 3}{4} = 0,6861\dots\end{aligned}$$

gilt. Ob hierbei das Gleichheitszeichen in Betracht fällt, d. h. ob diese beiden Polyeder extremal sind oder nicht, konnte bisher noch nicht entschieden werden. Würde dies zutreffen, so könnte der Nachweis etwa durch eine Abschätzungsformel, die für  $n = 8$  und  $n = 20$  ebenfalls scharf ist (nicht der Fall bei der Fejesschen Formel (2)) geliefert werden.

(Eingegangen den 24. Mai 1945.)