Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel.

Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel

Von Wilhelm Blaschke, Hamburg

Es sind gerade hundert Jahre verflossen, seit 1844 *Jakob Steiner* seine „*römische Fläche*“ eingeführt hat[1]), und zwar ausgehend von einer Aufgabe über Flächen zweiter Ordnung. Hier möchte ich zeigen: Zu dieser Fläche *Steiners* kann man auch von der Kinematik her kommen, wenn man Gedanken weiter verfolgt, die *J. Steiner* 1840 in seiner Schrift über die „Krümmungsschwerpunkte“ angegeben hat[2]).

Nehmen wir ein „ruhendes“ Cartesisches Achsenkreuz mit dem Ursprung $\mathfrak{o}'$ und den drei rechtwinkligen Einheitsvektoren $\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \mathfrak{e}'_3$ und neben diesem „*Rastkreuz*“ $\{\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}'_2, \mathfrak{e}'_3\}$ das „*Gangkreuz*“ $\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$, das mit dem Rastkreuz den ruhenden Ursprung $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$ gemein hat. Setzen wir dann

$$\mathfrak{e}_j = c_{j1}\mathfrak{e}'_1 + c_{j2}\mathfrak{e}'_2 + c_{j3}\mathfrak{e}'_3; \qquad j = 1, 2, 3 \tag{1}$$

und denken wir uns die Elemente c_{jk} der eigentlich orthogonalen Matrix C als Funktionen der Zeit t mit der kleinsten gemeinsamen Periode 2π vorgeschrieben, dann ist dadurch ein „*geschlossener Drehungsvorgang*“ unseres Gangkreuzes $\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ beschrieben. Wir setzen

$$d\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2\omega_3 - \mathfrak{e}_3\omega_2, \quad d\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3\omega_1 - \mathfrak{e}_1\omega_3, \quad d\mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_1\omega_2 - \mathfrak{e}_2\omega_1 \tag{2}$$

und finden dann für einen im Gangkreuz angehefteten Punkt $\mathfrak{x}$, wenn wir den Vektor $\overrightarrow{\mathfrak{o}\mathfrak{x}}$ wieder mit $\mathfrak{x}$ bezeichnen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_1 x_1 + \mathfrak{e}_2 x_2 + \mathfrak{e}_3 x_3 \tag{3}$$

(mit festen x_j)

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_1 \xi_1 + \mathfrak{e}_2 \xi_2 + \mathfrak{e}_3 \xi_3 \tag{4}$$

mit

$$\xi_1 = x_3\omega_2 - x_2\omega_3, \quad \xi_2 = x_1\omega_3 - x_3\omega_1, \quad \xi_3 = x_2\omega_1 - x_1\omega_2 . \tag{5}$$

---

[1]) *J. Steiner*, Werke 2, S. 722—724. Ebendort 741—742 die von *Weierstraß* stammende Parameterdarstellung von *Steiners* Fläche.

[2]) *J. Steiner*, „Von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener Kurven“, Crelles Journal 21 (1840) = Werke 2, S. 99—159.

Bei unserem geschlossenen Drehungsvorgang umläuft $\mathfrak{x}$ seine geschlossene Bahnlinie $\mathfrak{L}'_{\mathfrak{x}}$. Mit ihr ist drehungsinvariant ein Vektor $\mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}}$ verknüpft, den wir den *Flächenvektor* von $\mathfrak{L}'_{\mathfrak{x}}$ nennen können, nämlich

$$\mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}} = \oint \mathfrak{x} \times d\mathfrak{x} \,. \tag{6}$$

Dabei soll $\times$ das Vektorprodukt andeuten und das Integral nach t zwischen $-\pi$ und $+\pi$ erstreckt werden. Bildet man nämlich den Normalriß von $\mathfrak{L}'_{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}}$ auf irgendeine Ebene, so ist bei geeigneter Vorzeichenwahl die doppelte Fläche, die vom Normalriß von $\mathfrak{L}'_{\mathfrak{x}}$ umschlossen wird, gleich der Länge des Normalrisses von $\mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}}$.

Berechnen wir uns nun für alle Bahnlinien $\mathfrak{L}'_{\mathfrak{x}}$ die zugehörigen Flächenvektoren $\mathfrak{v}'_x$! Dazu führen wir zunächst für unseren Drehungsvorgang folgende Integralvektoren ein

$$\mathfrak{v}'_{jk} = \oint \mathfrak{e}_j \omega_k \,; \qquad j, k = 1, 2, 3 \,. \tag{7}$$

Dann folgt aus (2) und der Geschlossenheit unseres Drehungsvorganges

$$\mathfrak{v}'_{jk} = \mathfrak{v}'_{kj} \,. \tag{8}$$

Aus (6) folgt wegen (3), (4), (5)

$$\mathfrak{v}'_x = \oint \mathfrak{e}_1 \begin{vmatrix} x_2 & \xi_2 \\ x_3 & \xi_3 \end{vmatrix} + \cdots = \mathfrak{v}'_{11}(x_2^2 + x_3^2) - \mathfrak{v}'_{12}\, x_1\, x_2 - \mathfrak{v}'_{13}\, x_1\, x_3 + \cdots \,. \tag{9}$$

Dabei deuten die Punkte Reih-um-Vertauschung der Marken 1, 2, 3 an. Wegen (8) können wir dafür auch setzen

$$\mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}} = (\mathfrak{v}'_{11} + \mathfrak{v}'_{22} + \mathfrak{v}'_{33})\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \sum_1^3 \mathfrak{v}'_{jk}\, x_j x_k \,. \tag{10}$$

Tragen wir diesen Vektor $\mathfrak{v}'_x$ vom Ursprung $\mathfrak{o}$ aus ab und setzen wir

$$\mathfrak{v}'_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{e}'_1 \frac{y'_1}{y'_0} + \mathfrak{e}'_2 \frac{y'_2}{y'_0} + \mathfrak{e}'_3 \frac{y'_3}{y'_0} \tag{11}$$

und

$$\mathfrak{v}'_{jk} = \mathfrak{e}'_1\, v'_{1jk} + \mathfrak{e}'_2\, v'_{2jk} + \mathfrak{e}'_3\, v'_{3jk} \,. \tag{12}$$

Dann können wir, wenn wir uns auf die Betrachtung der Punkte $\mathfrak{x}$ auf der Einheitskugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{13}$$

beschränken, annehmen:

$$\begin{aligned} y_0' &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 , \\ y_r' &= \sum_{jk} \{\delta_{jk}(v_{r11}' + v_{r22}' + v_{r33}') - v_{rjk}'\} \, x_j \, x_k ; \qquad r = 1, 2, 3 . \end{aligned} \tag{14}$$

Die Endpunkte dieser von $\mathfrak{o}$ aus abgetragenen Vektoren $\mathfrak{v}_{\mathfrak{x}}'$ erfüllen also die *Steinerfläche*, deren Parameterdarstellung nach *Weierstraß* durch (14) gegeben ist.

Man kann die Eigenschaften dieser Steinerflächen sich am leichtesten deutlich machen, wenn man sie durch Projektion aus dem 6-dimensionalen projektiven Raum aus der Fläche gewinnt:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1^2 , & z_2 &= x_2^2 , & z_3 &= x_3^2 , \\ z_4 &= x_2 x_3 , & z_5 &= x_3 x_1 , & z_6 &= x_1 x_2 , \end{aligned} \tag{15}$$

die *G. Veronese* 1884 eingeführt hat.

Betrachtet man statt *eines* im Gangkreuz $\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ befestigten Punktes $\mathfrak{x}$ deren *zwei* $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so findet man

$$\oint \mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} = \oint \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x} = (\mathfrak{v}_{11}' + \mathfrak{v}_{22}' + \mathfrak{v}_{33}') \, (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) - \sum \mathfrak{v}_{jk}' x_j y_k . \tag{15}$$

Inwieweit es zu Vektoren $\mathfrak{v}_{jx}'$, die gemäß (8) sonst beliebig vorgeschrieben sind, immer Drehungsvorgänge gibt, weiß ich nicht.

Natürlich hat das hier Vorgetragene manche Gegenstücke und Verallgemeinerungen in der Bewegungsgeometrie. Einiges davon wird man in zwei Schriften von mir finden, die im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung in Druck sind und in einem Beitrag zur Festschrift für *Rey Pastor*.

(Eingegangen den 9. Juni 1944.)