**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Band:** 18 (1945-1946)

**Artikel:** Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers.

**Autor:** Hadwiger, H.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-16896

# Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers

Von H. Hadwiger, Bern

*K. Borsuk* hat die Vermutung ausgesprochen[1]), daß jede beschränkte Menge des $n$-dimensionalen Euklidischen Raumes durch $n+1$ Mengen von kleinerem Durchmesser überdeckt werden könne[2]). Daß $n$ Mengen zu einer Überdeckung solcher Art nicht immer ausreichen, lehrt bereits die Menge, die aus den $n+1$ Eckpunkten eines $n$-dimensionalen regulären Simplex besteht. Auch die $n$-dimensionale Vollkugel kann nicht durch $n$ Mengen kleineren Durchmessers überdeckt werden; nach dem *Borsuk*schen Antipodensatz enthält ja wenigstens eine der als abgeschlossen annehmbaren überdeckenden Mengen ein antipodisches Punktepaar, so daß von den $n$ Überdeckungsmengen wenigstens eine den nämlichen Durchmesser wie die Vollkugel aufweist[3]).

In dieser Note soll ein einfacher Beweis der oben zitierten Vermutung mitgeteilt werden. Genauer beweisen wir den folgenden

**Satz:** *Eine Menge $A$ des $n$-dimensionalen Euklidischen Raumes vom Durchmesser $D(A)=1$ kann stets durch $n+1$ Mengen $A_i\,(i=0,1,\ldots,n)$ der Durchmesser $D(A_i)<1$ überdeckt werden*[4]).

*Beweis:* Nach einem bekannten Satz[5]) ist $A$ Teilmenge eines $n$-dimensionalen Körpers $K$ konstanter Breite $D=1$. Es genügt also, den Satz für einen solchen Körper $K$ zu beweisen. Ist $K$ eine Kugel vom Durch-

---

[1]) *K. Borsuk*, Drei Sätze über die $n$-dimensionale Euklidische Sphäre. Fundam. Math. XX (1933), 177—190.

[2]) Diese Mitteilung, sowie die Anregung zu dieser Studie überhaupt, verdanke ich Herrn *H. Hopf* (Zürich).

[3]) *K. Borsuk*, Über die Zerlegung einer Euklidischen $n$-dimensionalen Vollkugel in $n$ Mengen. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich 1932, II. Bd. 192.

[4]) In einem demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinenden Aufsatz (Über die Zerstückung eines Eikörpers) habe ich den Satz für Eikörper (mit regulärem Rand) bewiesen. Bezeichnet $r$ den inneren Rollradius der Randfläche, so ergibt sich die Aussage des Satzes in der verschärften Form:

$$D(A_i) \leqq 1-2r\left\{1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right\}. \quad \text{Z. B. } n=2,\; A=\text{Kreis},\; r=\tfrac{1}{2},\; D(A_i)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[5]) *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Bd., Berlin 1934, S. 130.

messer $D = 1$, so ist der Satz trivial[6]). Wir können uns auf eine Nichtkugel $K$ beschränken.

Wir betrachten nun die Umkugelfläche $R$ des Körpers $K$ vom Radius $r$. Bekanntlich gilt

$$r \leqq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} < \sqrt{\frac{1}{2}}\,. \tag{1}$$

Die Menge $RK$ der Randpunkte von $K$, die zu $R$ gehören, enthält $n+1$ Punkte, die nicht in einer abgeschlossenen Hälfte (Halbkugelschale) von $R$ liegen[7]), so daß der Mittelpunkt $M$ von $R$ innerer Punkt des von den erwähnten $n+1$ Punkten aufgespannten $n$-dimensionalen Simplex $S$ ist.

Es sei nun $P$ ein von $M$ verschiedener Punkt von $K$. Die $P$ mit $M$ verbindende Gerade hat mit dem Rand von $S$ zwei Punkte gemeinsam; $P_0$ sei nun derjenige von diesen beiden Punkten, der auf der entgegengesetzten Seite von $M$ liegt wie $P$, so daß also $M$ innerer Punkt der Strecke $PP_0$ ist. — Der Rand von $S$ ist weiter überdeckt durch $n+1$ abgeschlossene $(n-1)$-dimensionale Simplexe $S_i (i = 0, 1, \ldots, n)$. Da die Eckpunkte der $S_i$ nach Konstruktion zu $K$ gehören, gilt für ihre Durchmesser

$$D(S_i) \leqq 1\,. \tag{2}$$

Die Menge $A_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ enthalte nun $M$ und außerdem alle von $M$ verschiedenen Punkte $P$ von $K$, für welche $P_0$ zum Randsimplex $S_i$ gehört. Offenbar ist $K$ durch die $n+1$ abgeschlossenen Mengen $A_i$ überdeckt. — Wir wählen jetzt zwei von $M$ verschiedene Punkte $P$ und $Q$ von $A_i$; $P_0$ und $Q_0$ liegen also in $S_i$. Es bezeichne $d = PQ$, $p = MP$, $q = MQ$, $p_0 = MP_0$, $q_0 = MQ_0$. Es darf

$$q \leqq p \leqq r \tag{3}$$

angenommen werden.

Weiter führen wir den Winkel $\omega = P\hat{M}Q = P_0\hat{M}Q_0$ ein, und es bezeichne $\bar{\omega}$ den größten Wert, den $\omega$ annehmen kann. Offenbar kann dieser maximale Winkel $\bar{\omega}$ durch die Punkte $P$ und $Q$ nur realisiert

---

[6]) Die Kugel vom Durchmesser 1 kann überdeckt werden durch $n+1$ Simplexsektoren der Durchmesser

$$D = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}, \text{ wenn } n \text{ gerade,} \qquad D = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n+3}}}, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist.}$$

[7]) Das unter [5]) zitierte Werk S. 127—128.

werden, wenn $P_0$ und $Q_0$ zwei Eckpunkte von $S_i$ darstellen, die den Durchmesser von $S_i$ liefern. In diesem Falle ist $p_0 = q_0 = r$, so daß die Beziehung

$$r \sqrt{2(1 - \cos \bar{\omega})} = D(S_i) \leqq 1 \tag{4}$$

gilt. Für die Distanz $d$ gilt allgemein

$$d = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq \cos \omega}\ . \tag{5}$$

Ist nun $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{3}$, so ist im Hinblick auf (3) und (5) zunächst $d \leqq p \leqq r$, und wegen (1) also $d < 1$.

Es sei weiter $\frac{\pi}{3} < \omega < \pi$; dann ist wieder mit Rücksicht auf (3) und (5) zunächst

$d \leqq p\sqrt{2(1 - \cos \omega)}$. Wenn nun $\omega < \bar{\omega}$ gilt, so ist also

$d < p\sqrt{2(1 - \cos \bar{\omega})}$ und wegen (3) und (4) also $d < 1$.

Wenn aber $\omega = \bar{\omega}$ gilt, so muß sicher in Verschärfung von (3) $p < r$ sein. Denn $p = r$ würde bedeuten, daß $P$ zu $KR$ gehört; das gleiche würde aber auch für $P_0$ (wie oben erwähnt, muß im vorliegenden Fall $P_0$ ein Eckpunkt von $S_i$ sein!) gelten, so daß $PP_0 = 2r \leqq 1$ sein müßte; dies könnte nur für den bei unserm Beweis vorweggenommenen Fall, wo $K$ eine Kugel vom Durchmesser 1 ist, zutreffen. Es wird somit $d < r\sqrt{2(1 - \cos \bar{\omega})}$, oder wegen (4) wieder $d < 1$ sein.

In allen möglichen Fällen hat sich also für zwei von $M$ verschiedene Punkte von $A_i$, $d < 1$ ergeben. Da $M$ ein innerer Punkt von $K$ ist, wird endlich für jeden Punkt $P$ von $A_i$ auch $PM < 1$ ausfallen. Da nun $A_i$ abgeschlossen ist, muß somit $D(A_i) < 1$ gelten. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

(Eingegangen den 24. Mai 1945.)