Sur la sommation forte des séries orthogonales.

Autor(en): **Alexits, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **18 (1945-1946)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16898

Sur la sommation forte des séries orthogonales

Par Georges Alexits, Budapest

1. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système arbitraire de fonctions orthogonales et normées dans l'intervalle (a, b). Nous désignons pour un $\alpha > -1$ par

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n-k+\alpha}{n-k}}{\binom{n+\alpha}{n}} c_k \varphi_k(x)$$

la n-ième moyenne de Cesarò d'ordre α de la série orthogonale

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \ . \tag{1}$$

La sommabilité $(C, 1+\alpha)$ de la série (1) vers la fonction $f(x)$ se laisse exprimer, d'après un théorème de M. Hausdorff, par la relation

$$\sum_{k=0}^{n} [f(x) - \sigma_k^{(\alpha)}(x)] = 0(n) \ .$$

En partant de cette relation, il est bien naturel d'introduire la notion de la sommation forte: La série (1) est dite fortement sommable $(C, 1+\alpha)$ vers la fonction $f(x)$, propriété que nous exprimerons brèvement: (1) est sommable $(C_f, 1+\alpha)$, si la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - \sigma_k^{(\alpha)}(x) \right| = 0(n)$$

subsiste. Il est connu que, si $\sum_{k=0}^{\infty} c_n^2$ est convergent et la série (1) sommable sur un ensemble E, (1) est aussi sommable $(C_f, 1+\alpha)$ sur E sauf peut-être un ensemble de mesure nulle. Nous introduisons maintenant une notion encore plus restrainte que celle de la sommation $(C_f, 1+\alpha)$: Nous appellerons la série orthogonale (1) presque partout très fortement sommable vers la fonction $f(x)$, ou tout simplement presque partout sommable $(C_{ff}, 1+\alpha)$, lorsqu'on a pour toute suite partielle $\{\sigma_{\nu_n}^{(\alpha)}(x)\}$ de la suite entière $\{\sigma_{\nu_n}^{(\alpha)}(x)\}$ presque partout

$$\sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - \sigma_{\nu_n}^{(\alpha)}(x) \right| = 0(n) \ ,$$

c'est-à-dire que toute suite partielle de la série (1) est presque partout sommable $(C_f, 1+\alpha)$. Pour éviter tout malentendu, nous relevons que l'ensemble de mesure nulle sur lequel une suite partielle n'est peut-être pas sommable $(C_f, 1+\alpha)$, ne doit pas être commun à toutes les suites partielles, au contraire, il peut changer avec les suites partielles différentes. En ce qui concerne la sommabilité très forte, nous démontrerons le théorème suivant:

Etant donné une suite non-décroissante $\{\lambda_n\}$ de nombres positifs tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty \tag{2}$$

et les coefficients c_n ayant l'ordre de grandeur

$$c_n = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{1-\alpha}\lambda_n}}\right), \tag{3}$$

la série orthogonale (1) *est pour tout $\alpha > -1$ presque partout sommable $(C_{ff}, 1+\alpha)$ sur tout ensemble E sur lequel elle est sommable au moins au sens de Poisson.*

Il est à remarquer qu'un problème un peu semblable a été posé par M. .... quand il a recherché la sommabilité $(C, 1)$ des suites partielles $\{s_n(x)\}$ des séries de Fourier et a démontré que la suite $\{s_{n^2}(x)\}$ est presque partout sommable $(C, 1)$, théorème qui a été étendu par M. .... aussi à la suite $\{s_{n^3}(x)\}$. *)

2. Quant à la démonstration de notre théorème, il suffit, grâce à une idée heureuse de M. Zygmund[5]), de vérifier qu'on a pour toute suite partielle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E \frac{[\sigma_{\nu n}^{(l+\alpha)}(x) - \sigma_{\nu n}^{(\alpha)}(x)]^2}{n}\, dx < +\infty . \tag{4}$$

En effet, cette relation implique, comme on sait, la convergence presque partout sur E de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sigma_{\nu n}^{(1+\alpha)}(x) - \sigma_{\nu n}^{(\alpha)}(x)]^2}{n}$$

---

*) L'auteur ayant rédigé cet article en captivité n'a pas pu retrouver tous les noms qu'il eût voulu indiquer. (La rédaction).

d'où on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} [\sigma_{\nu_k}^{(1+\alpha)}(x) - \sigma_{\nu_k}^{(\alpha)}(x)]^2 = 0(n)$$

presque partout sur E. Mais, en conséquence de (3), la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ est convergente et, par hypothèse, la série orthogonale (1) est sommable au sens de Poisson sur E, elle est donc sur E presque partout sommable (C, β) pour tout β positif, c'est-à-dire que $|f(x) - \sigma_{\nu_n}^{(1+\alpha)}(x)| = 0(1)$ pour tout $\alpha > -1$. En appliquant donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient sur E presque partout

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x) - \sigma_{\nu_k}^{(\alpha)}(x)| = \sum_{k=0}^{n} |f(x) - \sigma_{\nu_k}^{(1+\alpha)}(x)| + \sum_{k=0}^{n} |\sigma_{\nu_k}^{(1+\alpha)}(x) - \sigma_{\nu_k}^{(\alpha)}(x)| \leqq$$

$$\leqq 0(n) + \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \sum_{k=0}^{n} [\sigma_{\nu_k}^{(1+\alpha)}(x) - \sigma_{\nu_k}^{(\alpha)}(x)]^2} = \sigma(n) .$$

Cette inégalité est valable pour toute suite partielle $\{\sigma_{\nu_k}^{(\alpha)}(x)\}$, ce qui est justement la définition de la sommabilité $(C_{ff}, 1 + \alpha)$ sur E presque partout.

Pour démontrer la relation (4), rappelons l'identité suivante.

$$\sigma_{\nu_n}^{(\alpha)}(x) - \sigma_{\nu_n}^{(1+\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}}{\binom{\nu_n + \alpha}{\nu_n}} c_k \varphi_k(x) - \sum_{k=0}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + 1 + \alpha}{\nu_n - k}}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}} c_k \varphi_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}(\nu_n + 1 + \alpha)}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}(1 + \alpha)} c_k \varphi_k(x) - \sum_{k=0}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}(\nu_n - k + 1 + \alpha)}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}(1 + \alpha)} c_k \varphi_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}(1 + \alpha)} k c_k \varphi_k(x) .$$

Nous n'avons donc qu'à démontrer que, les conditions de notre théorème étant satisfaites, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_E \left[\sum_{k=1}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}} k c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}^2}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}^2} k^2 c_k^2 < + \infty . \tag{5}$$

Il suffit de supposer $-1 < \alpha \leqq 0$, parce qu'une série étant sommable presque partout $(C_{ff}, 1 + \alpha)$, elle est, pour tout $\beta > \alpha$, évidemment presque partout sommable $(C_{ff}, 1 + \beta)$. Mais, si $-1 < \alpha \leqq 0$, on a $0 < \binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k} \leqq 1$, on obtient donc en tenant compte de (3):

$$J_n \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}^2} k^2 c_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\nu_n} \frac{\binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}^2} 0\left(\frac{k^{1+\alpha}}{\lambda_k}\right).$$

Admettons, pour un moment, que la suite $\left\{\frac{k^{1+\alpha}}{\lambda_k}\right\}$ est non-décroissante, alors, on tire de la relation précédente

$$J_n = 0\left(\frac{\nu_n^{1+\alpha}}{n\lambda_{\nu_n}}\right) \frac{\sum_{k=1}^{\nu_n} \binom{\nu_n - k + \alpha}{\nu_n - k}}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}^2} = 0\left(\frac{\nu_n^{1+\alpha}}{n\lambda_{\nu_n}}\right) \frac{1}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}} . \tag{6}$$

Mais

$$\frac{\nu_n^{1+\alpha}}{\binom{\nu_n + 1 + \alpha}{\nu_n}} = 0(1)$$

et la suite $\{\lambda_n\}$ a été supposée non-décroissante, donc $\lambda_{\nu_n} \geqq \lambda_n$. Par suite, nous y obtenons d'après (2) et (6):

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right) < + \infty .$$

Ainsi, nous avons démontré la relation (5) dans le cas où la suite $\left\{\frac{k^{1+\alpha}}{\lambda_k}\right\}$ est non-décroissante. En cas contraire, considérons une suite non-décroissante $\{\lambda'_k\}$ ayant les propriétés suivantes:

$$\lambda'_k \leqq \lambda_k\,, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\lambda'_k} < +\infty \quad \text{et} \quad \frac{k^{1+\alpha}}{\lambda'_k} \leqq \frac{(k+1)^{1+\alpha}}{\lambda'_{k+1}}\,.$$

L'existence de telles suites est manifeste. On a alors, d'après (3) et l'hypothèse $\lambda'_n \leqq \lambda_n$:

$$c_n = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{1-\alpha}\lambda'_n}}\right)$$

et il résulte par la même voie comme dans le cas de la non-décroissance de $\left\{\frac{k^{1+\alpha}}{\lambda_k}\right\}$ l'évaluation

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0\left(\frac{1}{n\lambda'_n}\right) < +\infty\,.$$

La relation (5) est donc démontrée pour toute suite partielle $\{\sigma_{\nu_n}^{(\alpha)}(x)\}$, ce qui était justement notre but.

3. En étudiant la portée de la sommation forte, il est à remarquer que, pour les séries numériques, elle ne nous apporte rien de nouveau, car la sommation $(C_{ff},\, 1+\alpha)$ est tout à fait équivalente à la sommation $(C,\, \alpha)$. En effet, une série numérique sommable $(C,\, \alpha)$ est évidemment sommable $(C_{ff},\, 1+\alpha)$. Supposons, inversement, qu'une série numérique soit sommable $(C_{ff},\, 1+\alpha)$ mais non-sommable $(C,\, \alpha)$. Il existerait alors, en désignant par $\sigma_n^{(\alpha)}$ la n-ième moyenne $(C,\, \alpha)$ de la série en question, un nombre s tel que $\sum_{k=0}^{n} |s - \sigma_{\nu_k}^{(\alpha)}| = 0\,(n)$ pour toute suite partielle $\{\sigma_{\nu_n}^{(\alpha)}\}$, mais il existerait une suite $\{\sigma_{\mu_n}^{(\alpha)}\}$ et un $\varepsilon > 0$ ainsi que $|s - \sigma_{\mu_n}^{(\alpha)}| \geqq \varepsilon$ pour tout $n \geqq n_\varepsilon$. Il en résulterait

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} |s - \sigma_{\mu_k}^{(\alpha)}|}{n} \geqq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{n\to n_\varepsilon}^{n} |s - \sigma_{\mu_k}^{(\alpha)}|}{n} \geqq \varliminf_{n\to\infty} \frac{n - n_\varepsilon}{n}\,\varepsilon = \varepsilon > 0\,,$$

contrairement à l'hypothèse que la série est sommable $(C_{ff}, 1+\alpha)$. On voit donc, vraiment, que les méthodes de sommation (C, α) et $(C_{ff}, 1+\alpha)$ ont, pour les séries numériques, la même portée. Quant aux séries orthogonales, il ne s'agit que d'une sommabilité $(C_{ff}, 1+\alpha)$ presque partout où les suites partielles différentes peuvent être non-sommables sur des ensembles de mesure nulle différents. Mais l'ensemble de tout ces ensembles d'exception a la puissane du continu, puisque l'ensemble des suites partielles a cette puissance, on peut donc s'imaginer même que l'intervalle d'orthogonalité (a, b) est entièrement couvert par ces ensembles d'exception. En effet, nous possédons un tel exemple: M. Menchoff a construit, dans l'intervalle $(-5{,}5)$, pour toute suite croissante de nombres $w_n = 0(\log n)$ une série orthogonale du type (1) partout divergente, tandis que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w_n^2 < +\infty$. On constate aisément, en suivant la construction de M. Menchoff, que l'ordre de grandeur des coefficients de ces séries est

$$c_n = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}\log n}\right).$$

On en tire donc, en vertu d'un théorème de MM. Kaczmarz et Zygmund, la conséquence que les séries de M. Menchoff sont presque partout sommables $(C, 1+\alpha)$ pour tout ordre $\alpha > -1$ et il est évident que notre relation (3) concernant l'ordre de grandeur des coefficients est aussi satisfaite. Par suite, toutes les conditions de notre théorème sont remplies, les séries de M. Menchoff fournissent donc chacune un exemple d'une série orthogonale presque partout sommable $(C_{ff}, 1+\alpha)$ pour tout $\alpha > -1$ sans qu'elles soient sommables (C, α) pour $-1 < \alpha \leqq 0$ en au moins un point de l'intervalle d'orthogonalité. On voit donc que la sommation $(C_{ff}, 1+\alpha)$ presque partout des séries orthogonales est loin d'être équivalente à la sommation presque partout (C, α). Ainsi, nous sommes tentés de poser le problème suivant:

Notre théorème reste-t-il valable si l'on y remplace la condition (3) concernant l'ordre de grandeur des coefficients par la condition plus large que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ soit convergente?

4. Quant à la sommation forte presque partout des séries orthogonales, on peut énoncer le théorème relatif précité dans le paragraphe 2 sous une forme un peu plus étendue:

Si, pour $-1 < \alpha \leqq 0$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{n^{2\alpha}}$ *converge et la série orthogonale est sommable en sens de Poisson sur un ensemble* E, *elle y est presque partout sommable* $(C_f, 1 + \alpha)$.

Pour $\alpha = 0$, notre énoncé se réduit au théorème connu sur la sommation forte.

Il suffit, comme nous avons vu, de démontrer l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-k+\alpha}{n-k}^2}{\binom{n+1+\alpha}{n}^2} k^2 c_k^2 < +\infty .$$

Or, dans ce cas, on peut changer l'ordre de sommation et, vu que $\binom{n-k+\alpha}{n-k}^2 \leqq 1$ pour $-1 < \alpha \leqq 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n \leqq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \left[\frac{1}{k\binom{k+1+\alpha}{k}^2} + \frac{1}{(k+1)\binom{k+2+\alpha}{k+1}^2} + \cdots \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{\nu=k}^{\infty} 0\left(\frac{1}{\nu^{3-2\alpha}}\right) = 0(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{k^{2\alpha}} < +\infty , \quad \text{c. q. f. d.}$$

Camp de concentration de Spaichinger (Allemagne), hiver 1944/45.

(Reçu le 13 juillet 1945.)