Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Note sur l'identité de deux ensembles de la famille F d'ensembles parfaits.

Autor: Piccard, Sophie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16903

Note sur l'identité de deux ensembles de la famille F d'ensembles parfaits

Par Sophie Piccard, Neuchâtel

1. *Définitions.* Soient $k \geqslant 1$ et $n > k + 1$ deux entiers, soient $a_0, a_1, \ldots, a_k$ $(a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_k)$ $k + 1$ nombres de la suite $0, 1, \ldots, n - 1$. Considérons le système de numération à base n et soit $[a_0, a_1, \ldots, a_k]_n$ l'ensemble des nombres réels de l'intervalle fermé $< 0, \frac{a_k}{n-1} >$, dont le développement à base n peut s'écrire avec les seuls chiffres $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Posons, pour abréger, $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_n$. C'est un ensemble parfait que l'on peut construire de la façon suivante. Soit $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ et soit $\mathfrak{E}^{(1)} = (-\infty, \infty)$ l'ensemble des nombres réels. Appelons intervalle contigu de rang 0 de A l'ensemble $\mathfrak{E}^{(1)} - < 0, \frac{a_k}{n-1} >$. Soit, à présent, m un entier quelconque $\geqslant 1$. Si $a_k < n - 1$, appellons intervalle contigu de rang m de A tout intervalle ouvert (a, b) ayant pour extrémite *gauche*[1]) un nombre de la forme

$$a = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_i}{n^m} + \frac{a_k}{n^m(n-1)},$$

où $\alpha_j \, \varepsilon \, K$, $j = 1, 2, \ldots, m - 1$, et i est un nombre de la suite $0, 1, \ldots, k - 1$, et pour extrémité *droite*[1]) le nombre

$$b = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_{i+1}}{n^m}.$$

La longueur d'un tel intervalle est

$$\frac{a_{i+1} - a_i - 1}{n^m} + \frac{n - 1 - a_k}{n^m(n-1)}$$

et le nombre des intervalles contigus de rang m, lorsque $a_k < n - 1$, est égal à $(k+1)^{m-1}k$. Si $a_k = n - 1$, appellons intervalle contigu de rang m de A tout intervalle ouvert (a, b) ayant pour extrémité *gauche* un nombre de la forme

$$a = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_i + 1}{n^m},$$

[1]) a et b étant les extrémités d'un intervalle linéaire δ, on dit que a est l'extrémité gauche de δ et que b est son extrémité droite, si $a < b$.

où $\alpha_j \in K$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, et i est un nombre de la suite $0, 1, \ldots, k-1$, tel que $a_{i+1} - a_i > 1$, et pour extrémité *droite* le nombre

$$b = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_{i+1}}{n^m} .$$

La longueur d'un tel intervalle est $\dfrac{a_{i+1} - a_i - 1}{n^m}$.

Eliminons successivement de l'ensemble $\mathfrak{E}^{(1)}$ les intervalles contigus de rangs $0, 1, 2, \ldots$. A est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{E}^{(1)}$ qui subsistent après toutes ces éliminations. On dit que A est construit sur l'intervalle $< 0, \dfrac{a_k}{n-1} >$.

La famille F se compose de tous les ensembles du type A que nous venons de définir.

2. Soient k, l, m, n quatre entiers, tels que $k \geqslant 1$, $l > k+1$, $m \geqslant 1$, $n > m+1$, soient $a_0, a_1, \ldots, a_k$ $(a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_k)$ $k+1$ nombres de la suite $0, 1, \ldots, l-1$, soient $b_0, b_1, \ldots, b_m$ $(b_0 = 0 < b_1 < \cdots < b_m)$ $m+1$ nombres de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ et soit $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$, $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$. A et B sont deux ensembles quelconques de la famille F. Posons $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$. Il est évident que si $l = n$ et si $K = K'$, on a $A = B$. Mais la réciproque peut être en défaut, comme l'a montré M. Henri Cartan. Ainsi, par exemple, on a $[0, 2]_3 = [0, 2, 6, 8]_9$. Dans le compte-rendu qu'il a fait de mon travail «*Sur des ensembles parfaits*»[2]), M. Henri Cartan a énoncé les deux résultats suivants:

1) Soit $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ un ensemble quelconque de la famille F, soit $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, soit p un entier quelconque > 1, soit $m = (k+1)^p - 1$, soit $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ l'ensemble des nombres entiers $\geqslant 0$ et $< l^p$ dont le développement à base l comprend p chiffres pris dans K et soit $n = l^p$. Alors $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n = A$.

2) Soient $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ deux ensembles de la famille F. Soit $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$. Alors, si $A = B$, il existe des entiers p, q, r, s, c_0, $c_1, \ldots, c_s$, tels que $1 \leqslant s < r-1$, $r^p = l$, $r^q = n$, $c_0 = 0 < c_1 < \cdots < c_s < r$, que $A = B = [c_0, c_1, \ldots, c_s]_r$ et que $K(K')$ est l'ensemble des entiers $\geqq 0$ et $< l$ $(\geqslant 0$ et $< n)$ dont le développement à base r comprend $p(q)$ chiffres pris dans la suite $c_0, c_1, \ldots, c_s$.

---

[2]) Bulletin des Sciences mathématiques, Deuxième série, tome LXVII, janvier-février 1943.

Ce résultat général a été obtenu par M. Henri Cartan, en collaboration avec M[lle] Hélène Cartan.

Nous avons repris la question de l'identité de deux ensembles de la famille F et nous avons établi un critère général dont nous déduisons le critère 2 de M. H. Cartan. La démonstration de notre critère repose sur des lemmes, dont le premier est le critère 1 de M. H. Cartan.

3. *Lemme 1.* Quel que soit l'ensemble $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ de la famille F et quel que soit l'entier $p > 1$, si l'on pose $m = (k+1)^p - 1$, $n = l^p$ et si $b_0, b_1, \ldots, b_m$ $(b_0 = 0 < b_1 < \ldots < b_m)$ est la suite composée de tous les nombres de la forme $l^{p-1}\alpha_1 + l^{p-2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_p$, où $\alpha_i \in K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, p$, on a $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n = A$.

Demonstration. Supposons les conditions du lemme 1 satisfaites et soit $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$.

Soit a un nombre quelconque de l'ensemble A et soit

$$a = \frac{\alpha_1}{l} + \frac{\alpha_2}{l^2} + \cdots \qquad (\alpha_i \in K, \ i = 1, 2, \ldots)$$

son développement à base l. On peut écrire

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\alpha_1}{l} + \frac{\alpha_2}{l^2} + \cdots + \frac{\alpha_p}{l^p}\right) + \left(\frac{\alpha_{p+1}}{l^{p+1}} + \frac{\alpha_{p+2}}{l^{p+2}} + \cdots + \frac{\alpha_{2p}}{l^{2p}}\right) + \cdots \\ &= \frac{l^{p-1}\alpha_1 + l^{p-2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_p}{l^p} + \frac{l^{p-1}\alpha_{p+1} + l^{p-2}\alpha_{p+2} + \cdots + \alpha_{2p}}{l^{2p}} + \cdots \\ &= \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots, \end{aligned}$$

en posant $\beta_i = l^{p-1}\alpha_{(i-1)p+1} + l^{p-2}\alpha_{(i-1)p+2} + \cdots + \alpha_{ip}$, $i = 1, 2, \ldots$.

On a $\beta_i \in K'$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots$ et, par conséquent, $a \in B$. Cela étant quel que soit le nombre a de l'ensemble A, on voit que 1) $A \subset B$.

Soit, à présent, b un nombre quelconque de l'ensemble B et soit

$$b = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots \quad (b_i \in K', \quad i = 1, 2, \ldots)$$

son développement à base n.

De la définition des nombres de K', il résulte l'existence d'une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de nombres entiers, tels que $\alpha_i \varepsilon K$, $i = 1, 2, \ldots$, et que

$$\beta_i = l^{p-1}\alpha_{(i-1)p+1} + l^{p-2}\alpha_{(i-1)p+2} + \cdots + \alpha_{ip}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Et comme $n = l^p$, on a

$$b = \frac{\alpha_1}{l} + \frac{\alpha_2}{l^2} + \cdots .$$

Donc $b \varepsilon A$.

Cela étant quel que soit l'élément b de B, on voit que 2) $B \subset A$.

Des deux inclusions 1) et 2), il résulte que $A = B$ et le lemme 1 est démontré.

4. *Lemme* 2. Si deux ensembles $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ de la famille F définis au § 2 ont les mêmes intervalles contigus de rangs 0, 1 et 2, alors $k = m$, $l = n$ et $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Démonstration. Soient A et B deux ensembles de la famille F qui satisfont la condition du lemme 2.

Comme A et B ont le même intervalle contigu de rang zéro, ces deux ensembles sont construits sur un même intervalle. Or, A est construit sur l'intervalle $< 0, \dfrac{a_k}{l-1} >$ et B est construit sur l'intervalle $< 0, \dfrac{b_m}{n-1} >$. On doit donc avoir 1) $\dfrac{a_k}{l-1} = \dfrac{b_m}{n-1}$.

Deux cas sont maintenant à distinguer:

a) $a_k < l - 1$ et $b_m < n - 1$.

Les intervalles contigus de rang un de A sont alors

$$\left(\frac{a_i}{l} + \frac{a_k}{l(l-1)}, \frac{a_{i+1}}{l}\right), \quad i = 0, 1 \ldots, k-1,$$

et les intervalles contigus de rang un de B sont

$$\left(\frac{b_j}{n} + \frac{b_m}{n(n-1)}, \frac{b_{j+1}}{n}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Puisque A et B ont, par hypothèse, les mêmes intervalles contigus de rang un, on doit avoir 2) $k = m$ et 3) $\dfrac{a_i}{l} = \dfrac{b_i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

De 2) et 1), résulte 4) $\dfrac{a_k}{l-1} = \dfrac{b_k}{n-1}$ et de 3), pour $i = k$, résulte 5) $\dfrac{a_k}{l} = \dfrac{b_k}{n}$. Or, de 4) et 5), il découle que 6) $l = n$. Et de 6) et de 3), il découle que $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

On voit donc que, dans le cas a), il suffit que A et B aient les mêmes intervalles contigus de rangs 0 et 1 pour que $l = n$, $k = m$, $a_i = b_i$,

$i = 1, 2, \ldots, k$ et, par suite, que les deux ensembles A et B soient confondus.

b) On a l'une au moins des égalités: $a_k = l - 1$, $b_m = n - 1$. L'égalité 1) implique alors que l'on a simultanément $a_k = l - 1$ et $b_m = n - 1$.

Soient 7) $\delta_{11}, \delta_{12}, \ldots, \delta_{1r}$, où $r \geqslant 1$, les intervalles contigus de rang 1 de A pris dans un ordre tel que δ_{1i} est situé *à gauche*[3]) de δ_{1j}, si $i < j$.

D'après nos hypothèses sur A et B, la suite 7) constitue également l'ensemble des intervalles contigus de rang 1 de B. Il existe donc, d'une part, r indices $t_1, t_2, \ldots, t_r$ $(0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_r \leqslant k - 1)$ et, d'autre part, r indices $s_1, s_2, \ldots, s_r$ $(0 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_r \leqslant m - 1)$, tels que

$$\delta_{1i} = \left(\frac{a_{t_i} + 1}{l}, \frac{a_{t_i+1}}{l}\right) = \left(\frac{b_{s_i} + 1}{n}, \frac{b_{s_i+1}}{n}\right),$$

$$a_{t_i+1} - a_{t_i} > 1, \quad b_{s_i+1} - b_{s_i} > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

On doit donc avoir

$$8) \ \frac{a_{t_i} + 1}{l} = \frac{b_{s_i} + 1}{n} \quad \text{et} \quad 9) \ \frac{a_{t_i+1}}{l} = \frac{b_{s_i+1}}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Les intervalles contigus de rang 2 de A sont au nombre de $(k+1)r$ et ce sont les intervalles

$$\delta_{2ij} = \left(\frac{a_j}{l} + \frac{a_{t_i} + 1}{l^2}, \frac{a_j}{l} + \frac{a_{t_i+1}}{l^2}\right), \ i=1,2,\ldots,r; \ j=0,1,\ldots,k,$$

alors que les intervalles contigus de rang 2 de B sont au nombre de $(m+1)r$ et ce sont les intervalles

$$\delta'_{2ij} = \left(\frac{b_j}{n} + \frac{b_{s_i} + 1}{n^2}, \frac{b_j}{n} + \frac{b_{s_i+1}}{n^2}\right), \ i=1,2,\ldots,r, j=0,1,\ldots,m.$$

Et comme, d'après nos hypothèses, A et B ont les mêmes intervalles contigus de rang 2, on doit avoir, d'une part 10) $k = m$ et d'autre part, comme $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ et que $b_0 < b_1 < \cdots < b_m$, on doit avoir

$$11) \quad \delta_{2ij} = \delta'_{2ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \ j = 0, 1, \ldots, k.$$

---

[3]) C'est-à-dire que l'extrémité droite de δ_{1i} est un nombre inférieur à l'extrémité gauche de δ_{1j}.

Soit i un entier quelconque compris entre 1 et r. On a, d'après 8) et 9),

$$12)\quad \frac{a_{t_i+1} - a_{t_i} - 1}{l} = \frac{b_{s_i+1} - b_{s_i} - 1}{n}$$

et, d'après 11), on a

$$13)\quad \frac{a_j}{l} + \frac{a_{t_i} + 1}{l^2} = \frac{b_j}{n} + \frac{b_{s_i} + 1}{n^2}$$

et

$$14)\quad \frac{a_j}{l} + \frac{a_{t_i+1}}{l^2} = \frac{b_j}{n} + \frac{b_{s_i+1}}{n^2}\ ,\quad j = 0, 1, \ldots, k\ .$$

Attribuons à j une valeur fixe quelconque comprise entre 0 et k et soustrayons membre à membre les deux égalités correspondantes 14) et 13). Il vient

$$15)\quad \frac{a_{t_i+1} - a_{t_i} - 1}{l^2} = \frac{b_{s_i+1} - b_{s_i} - 1}{n^2}\ .$$

Divisons les égalités 12) et 15) membre à membre. Il vient 16) $l = n$. Donc, d'après 8), on a 17) $a_{t_i} = b_{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$ et, d'après 13), 16) et 17), on a 18) $a_j = b_j$, $j = 0, 1, \ldots, k$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.

5. *Lemme 3.* Soient $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ deux ensembles de la famille F et soit $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_k$ et $b_0 = 0 < b_1 < \cdots < b_m$. Alors, si $l = n$ et si $A = B$, on a nécessairement $k = m$ et $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Démonstration. En effet, soient A et B deux ensembles de la famille F qui satisfont les conditions du lemme 3.

Comme $A = B$, ces deux ensembles sont construits sur un même intervalle et, par conséquent, $\frac{a_k}{n-1} = \frac{b_m}{n-1}$, donc $a_k = b_m$. D'autre part, l'ensemble des intervalles contigus de A se confond avec l'ensemble des intervalles contigus de B . Deux cas sont maintenant à distinguer:

a) $a_k = n - 1$.

Alors, quel que soit l'entier $t \geqslant 1$ et quel que soit l'intervalle contigu δ de rang t de A ou de B, cet intervalle est de longueur $\geqslant \frac{1}{n^t}$ et $\leqslant \frac{n-2}{n^t}$ et, comme $\frac{1}{n^t} > \frac{n-2}{n^{t+1}}$, tout intervalle contigu de rang t de A ou de B est de longueur supérieure à celle de tout intervalle contigu de rang $\geqslant t + 1$ aussi bien de A que de B. Il s'ensuit que, quel que soit l'entier $t \geqslant 1$, les deux ensembles A et B ont les mêmes intervalles contigus de rang t. Et, comme A et B sont construits sur le même intervalle, d'après le lemme 3, $k = m$ et $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

b) $a_k < n - 1$, *donc aussi* $b_m < n - 1$.

Alors A possède k intervalles contigus de rang 1, dont les extrémités droites sont les nombres $\frac{a_i}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Comme l'ensemble des intervalles contigus de A se confond avec l'ensemble des intervalles contigus de B, il en est de mêmes des ensembles formés des extrémités droites de ces deux familles d'intervalles. Or, un intervalle contigu de B a pour extrémité droite un nombre de la forme

$$\frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_t}{n^t}, \text{ où } \beta_i \in K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\},\ i = 1, 2, \ldots, t, \text{ et } \beta_t > 0$$

et comme, dans aucun système de numération, un même nombre rationnel ne saurait posséder deux développements limités distincts, on ne saurait avoir l'égalité

$$\frac{a_i}{n} = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_t}{n^t}$$

que si $t = 1$ et $a_i = \beta_1$. Donc, quel que soit l'indice $i = 1, 2, \ldots, k$, il lui correspond un indice j de la suite $1, 2, \ldots, m$, tel que $a_i = b_j$.

Par un raisonnement tout à fait analogue, en partant des intervalles contigus de rang 1 de B, on démontre que, quel que soit l'indice $j = 1, 2, \ldots, m$, il lui correspond un indice i de la suite $1, 2, \ldots, k$, tel que $b_j = a_i$.

Il en résulte que les deux suites $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et $b_1, b_2, \ldots, b_m$ comprennent un nombre égal $k = m$ de termes et se composent des mêmes nombres et, comme $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$, on a bien $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, c. q. f. d.

6. *Lemme* 4. Soient $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ deux ensembles de la famille F. Alors, si $A = B$, il existe deux entiers p et q, tels que $l^p = n^q$.

Démonstration. Soit $A = B$. Alors ces deux ensembles ont les mêmes intervalles contigus et il existe une suite finie $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t (t \geqslant 1)$ de nombres réels positifs distincts, tels que chacun de ces nombres est la longueur d'un intervalle contigu de rang 1 de l'un au moins des deux ensembles A ou B, la longueur de tout intervalle contigu de rang 1 de A et de B figurant parmi les nombres de cette suite.

Comme l'ensemble des intervalles contigus de A se confond avec l'ensemble des intervalles contigus de B, chacun des nombres δ_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ est la longueur d'un intervalle contigu aussi bien de A que de B (pas nécessairement du même rang).

La longueur de tout intervalle contigu de A est un nombre de la forme

$$\frac{\delta_i}{l^j} \, (i = 1, 2, \ldots, t \; ; \quad j = 1, 2, \ldots)$$

et la longueur de tout intervalle contigu de B est un nombre de la forme

$$\frac{\delta_i}{n^j} \, (i = 1, 2, \ldots, t \; ; \quad j = 1, 2, \ldots) \; .$$

Et comme l'ensemble des intervalles contigus de A se confond avec celui des intervalles contigus de B, il existe, pour tout couple donné d'indices i et j $(1 \leqslant i \leqslant t, j \geqslant 1)$ un couple d'indices u_{ij}, v_{ij} $(1 \leqslant u_{ij} \leqslant t, v_{ij} \geqslant 1)$, tel que $\dfrac{\delta_i}{l^j} = \dfrac{\delta_{u_{ij}}}{n^{v_{ij}}}$. Attribuons à i une valeur fixe quelconque comprise entre 1 et t et faisons varier j de 1 à l'infini. Comme u_{ij} ne peut prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, t$ qui sont en nombre fini, la suite $u_{i1}, u_{i2}, \ldots$ comprend une infinité de nombres égaux.

Soit $u_{ij_1} = u_{ij_2} = \cdots = \alpha$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots$, $1 \leqslant \alpha \leqslant t$.

D'après ce qui précède, on a 1) $\dfrac{\delta_i}{l^{j_1}} = \dfrac{\delta_\alpha}{n^{v_{ij_1}}}$ et 2) $\dfrac{\delta_i}{l^{j_2}} = \dfrac{\delta_\alpha}{n^{v_{ij_2}}}$.

Divisons membre à membre les égalités 1) et 2). Il vient, en posant $j_2 - j_1 = p$ et $v_{ij_2} - v_{ij_1} = q$, $l^p = n^q$, ce qui démontre le lemme 4.

7. *Remarque 1.* On voit sans peine que si l, n, p, q, $p' > p$, $q' > q$ sont des entiers positifs tels que $l^p = n^q$, $l^{p'} = n^{q'}$ et si p est le plus petit entier positif, tel que l^p est égal à une puissance entière de n, alors il existe en entier $t > 1$, tel que $p' = tp$, $q' = tq$.

8. *Proposition I.* Soient $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ deux ensembles de la famille F et soit $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ et $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$. Alors, si $A = B$, il existe deux entiers positifs p et q, tels que $l^p = n^q$ et que l'ensemble K_1 des entiers de la forme

$$l^{p-1} \alpha_1 + l^{p-2} \alpha_2 + \cdots + \alpha_p \; , \quad \text{où} \quad \alpha_i \in K \; , \quad i = 1, 2, \ldots, p \; ,$$

se confond avec l'ensemble K_1' des entiers de la forme

$$n^{q-1} \beta_1 + n^{q-2} \beta_2 + \cdots + \beta_q \; , \quad \text{où} \quad \beta_j \in K' \; , \quad j = 1, 2, \ldots, q \; .$$

Démonstration. Soit $A = B$. L'existence des deux entiers positifs p et q, tels que $l^p = n^q$, résulte alors du lemme 4.

Soit $C(D)$ l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire, dans le système de numération à base $l^p(n^q)$, au moyen des seuls chiffres pris dans l'ensemble $K_1(K_1')$. D'après le lemme 1, on a $A = C$ et $B = D$ et, par conséquent, $C = D$. Et comme $l^p = n^q$, il résulte du lemme 3 que $K_1 = K_1'$, c. q. f. d.

9. *Remarque 2.* Soient l et n deux entiers positifs. Alors, s'il existe deux entiers positifs p et q, tels que $l^p = n^q$, il existe aussi trois entiers positifs r, p_1 et q_1 tels que p_1 et q_1 sont premiers entre eux et que $l = r^{q_1}$ et $n = r^{p_1}$.

En effet, soient l, n, p, q quatre entiers positifs, tels que 1) $l^p = n^q$. Soit $D(p, q) = d$ le plus grand commun diviseur de p et q et soit $p = p_1 d$, $q=q_1 d$. p_1 et q_1 sont deux entiers positifs premiers entre eux. Envisageons les décompositions en facteurs premiers des deux nombres l et n. L'égalité 1) implique que tout facteur premier qui fait partie de la décomposition de l fait également partie de la décomposition de n et vice versa. Il existe donc un entier $h \geqslant 1$ et h nombres premiers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$, tels que $l = \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \dots \alpha_h^{\mu_h}$ et $n = \alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \dots \alpha_h^{\nu_h}$, où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ sont des entiers positifs.

L'égalité 1) peut donc s'écrire $\alpha_1^{\mu_1 p} \alpha_2^{\mu_2 p} \dots \alpha_h^{\mu_h p} = \alpha_1^{\nu_1 q} \alpha_2^{\nu_2 q} \dots \alpha_h^{\nu_h q}$ et elle implique que 2) $\dfrac{\nu_1}{\mu_1} = \dfrac{\nu_2}{\mu_2} = \dots = \dfrac{\nu_h}{\mu_h} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{p_1}{q_1}$.

Comme p_1 et q_1 sont premiers entre eux, il existe, d'après 2), h entiers positifs $k_1, k_2, \dots, k_h$, tels que $\mu_i = k_i q_1$ et $\nu_i = k_i p_1$, $i=1, 2, \dots, h$. Mais alors $l = (\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_h^{k_h})^{q_1}$ et $n = (\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_h^{k_h})^{p_1}$. Posons $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_h^{k_h} = r$. C'est un entier positif.

D'après ce qui précède, on a $l = r^{q_1}$ et $n = r^{p_1}$, ce qui justifie la remarque 2.

10. *Remarque 3.* Si k, l, m, n, $a_0, a_1, \dots, a_k$, $b_0, b_1, \dots, b_m$ sont des entiers, tels que $1 \leqslant k < l - 1$, $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_k \leqslant l - 1$, $1 \leqslant m < n - 1$, $b_0 = 0 < b_1 < \dots < b_m \leqslant n - 1$ et que

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_k]_l = B = [b_0, b_1, \dots, b_m]_n,$$

alors il existe quatre entiers p_1, q_1, r, s, tels que p_1 et q_1 sont premiers entre eux, $1 \leqslant s < r$, $l = r^{q_1}$, $n = r^{p_1}$, $k + 1 = s^{q_1}$, $m + 1 = s^{p_1}$ et on a:

$$a_i = b_i\ ,\quad i = 0, 1, \ldots, \min.\ (k\ , m)\ ,$$

$$a_{\alpha_1 s^{q_1-1}+\alpha_2 s^{q_1-2}+\cdots+\alpha_{q_1}} = r^{q_1-1}\, a_{\alpha_1} + r^{q_1-2}\, a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_{q_1}}\ ,$$

quels que soient les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q_1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s-1$, et

$$b_{\beta_1 s^{p_1-1}+\beta_2 s^{p_1-2}+\cdots+\beta_{p_1}} = r^{p_1-1}\, a_{\beta_1} + r^{p_1-2}\, a_{\beta_2} + \cdots + a_{\beta_{p_1}}\ ,$$

quels que soient les nombres $\beta_1\ ,\ \beta_2\ , \ldots, \beta_{p_1}$ pris dans la suite $0\ , 1\ , \ldots, s-1$.

D'après le lemme 3, il suffit de considérer le cas où $l \neq n$. Supposons, pour fixer les idées, que $l < n$. Le cas où $n < l$ se traite de façon tout à fait analogue.

Posons $K = \{a_0\ , a_1\ , \ldots, a_k\}$, $K' = \{b_0\ , b_1\ , \ldots, b_m\}$ et soit $A = B$. Donc, d'après la proposition I, il existe deux entiers positifs p et q, tels que 1) $l^p = n^q$ et que l'ensemble K_1 des nombres entiers de la forme $l^{p-1}\alpha_1 + l^{p-2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_p$, où $\alpha_i \in K$, $i = 1\ , 2\ , \ldots, p$, coïncide avec l'ensemble K_1' des entiers de la forme $n^{q-1}\beta_1 + n^{q-2}\beta_2 + \cdots + \beta_q$, où $\beta_j \in K'$, $j = 1\ , 2\ , \ldots, q$. Or, la puissance de l'ensemble K_1 est évidemment égale à $(k+1)^p$ et la puissance de l'ensemble K_1' est égale à $(m+1)^q$. Et, comme $K_1 = K_1'$, on a 2) $(k+1)^p = (m+1)^q$.

Comme, par hypothèse, $l < n$, on a $p > q$.

Soit $D(p,q) = d$, $p = p_1 d$, $q = q_1 d$. p_1 et q_1 sont deux entiers positifs premiers entre eux et $p_1 > q_1$. Soit 3) $p_1 = tq_1 + q_2$, où $t \geqslant 1$ et q_2 $(1 \leqslant q_2 < q_1)$ sont deux entiers. Comme p_1 et q_1 sont premiers entre eux, q_1 et q_2 sont également premiers entre eux. D'après 1), 2) et la remarque 2, il existe deux entiers positifs r et s, tels que 4) $l = r^{q_1}$, 5) $n = r^{p_1}$, 6) $k + 1 = s^{q_1}$, 7) $m + 1 = s^{p_1}$. Et comme $k + 1 < l$ et $m + 1 < n$, on a forcément $s < r$.

Posons $s^{q_1 p} = s^{p_1 q} = N$. Soit $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ $(c_0 < c_1 < \cdots < c_{N-1})$ une suite formée de tous les nombres de K_1 rangés par ordre de grandeur croissante et soit $d_0\ , d_1\ , \ldots, d_{N-1}$ $(d_0 < d_1 < \cdots < d_{N-1})$ une suite formée de tous les nombres de l'ensemble K_1', rangés par ordre de grandeur croissante.

Par définition de l'ensemble K_1, on a

$$8)\quad c_{\alpha_1 s^{q_1 \beta} + \alpha_2 s^{q_1(\beta-1)}+\cdots+\alpha_\beta s^{q_1}+\alpha_{\beta+1}} = l^\beta a_{\alpha_1} + l^{\beta-1} a_{\alpha_2} + \cdots + l a_{\alpha_\beta} + a_{\alpha_{\beta+1}}.$$

quel que soit l'entier β de la suite $0\ , 1\ , \ldots, p-1$ et quels que soient les entiers α_i $(i = 1\ , 2\ , \ldots, \beta + 1)$ pris dans la suite $0\ , 1\ , \ldots, s^{q_1} - 1$.

En particulier, 9) $c_i = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$; d'autre part, quel que soit l'entier β $(1 \leqslant \beta \leqslant p-1)$, on a 10) $c_{s^{q_1 \beta}} = l^\beta a_1$ et, quels que soient les entiers α, β, γ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s^{q_1} - 1$, $\beta = 1, 2, \ldots, p-1$, $\gamma = 1, 2, \ldots, s^{q_1 \beta} - 1)$, on a 11) $c_{\alpha s^{q_1 \beta} + \gamma} = l^\beta a_\alpha + c_\gamma$.

De même, par définition de K_1', on a

$$12) \quad d\gamma_1 s^{p_1 \delta} + \gamma_2 s^{p_1(\delta-1)} + \cdots + \gamma_\delta s^{p_1} + \gamma_{\delta+1} =$$
$$= n^\delta b_{\gamma_1} + n^{\delta-1} b_{\gamma_2} + \cdots + n b_{\gamma_\delta} + b_{\gamma_{\delta+1}},$$
$$\delta = 0, 1, \ldots, q-1; \quad \gamma_j = 0, 1, \ldots, s^{p_1} - 1, \; j = 1, 2, \ldots, \delta + 1.$$

En particulier,

13) $d_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$,

14) $d_{s^{p_1 \delta}} = n^\delta b_1$, quel que soit $\delta = 1, 2, \ldots, q-1$,

et

15) $d_{\gamma s^{p_1 \delta} + \mu} = n^\delta b_\gamma + d_\mu$, quels que soient

$\gamma = 1, 2, \ldots, s^{p_1} - 1$, $\delta = 1, 2, \ldots, q-1$ et $\mu = 1, 2, \ldots, s^{p_1 \delta} - 1$.

Comme $K_1 = K_1'$, on a 16) $d_i = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Donc d'après 9) et 13), on a 17) $b_i = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$ et, quel que soit l'indice $i = \alpha_1 s^{q_1 \beta} + \alpha_2 s^{q_1(\beta-1)} + \cdots + \alpha_{\beta+1}$, où β est un nombre de la suite $0, 1, \ldots, t$, α_j prend l'une des valeurs $0, 1, \ldots, s^{q_1} - 1$, quel que soit $j = 1, 2, \ldots, \beta + 1$, et $\alpha_1 \leqslant s^{q_2} - 1$, si $\beta = t$ (donc $0 \leqslant i \leqslant m$), on a, d'après 13), 16) et 8),

$$18) \quad b_i = d_i = c_i = l^\beta a_{\alpha_1} + l^{\beta-1} a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_{\beta+1}}.$$

D'autre part, d'après 14) et 17), on a 19) $d_{s^{p_1 \delta}} = n^\delta a_1$, $\delta = 1, 2, \ldots, q-1$.

Montrons que, quel que soit l'entier $h = 1, 2, \ldots, q_1 - 1$, on a 20) $a_{s^h} = r^h a_1$. En effet, nous avons déjà remarqué que les nombres q_1 et q_2 sont premiers entre eux. Donc, quel que soit l'entier h de la suite $1, 2, \ldots, q_1 - 1$, il existe un entier h' faisant partie de la même suite et tel que $q_2 h' \equiv h \pmod{q_1}$.

Soit h'' l'entier positif défini par l'égalité 21) $q_2 h' = h + q_1 h''$. Comme $q_1 > q_2$, on a évidemment $h' > h''$.

D'après 19), 16), 3), 21) et 11), on a

$$d_{(sp_1)h'} = n^{h'}a_1 = c_{(sp_1)h'} = c_s(tq_1+q_2)h' = c_{stq_1h'+q_2h'} = c_{sq_1(th'+h'')+h}$$
$$= c_{s^h s^{q_1}(th'+h'')} = l^{th'+h''}a_{s^h} .$$

Donc

$$n^{h'}a_1 = l^{th'+h''}a_{s^h} ,\ \text{soit, d'après 5) et 4)},\ r^{p_1h'}a_1 = r^{q_1(th'+h'')}a_{s^h}$$

ou encore, d'après 3), $r^{(tq_1+q_2)h'}a_1 = r^{q_1(th'+h'')}a_{s^h}$, soit d'après 21) $r^{tq_1h'+q_1h''+h}a_1 = r^{q_1th'+q_1h''}a_{s^h}$, d'où 20) $a_{s^h} = r^h a_1$, ce que nous voulions démontrer.

Soit à présent, h un entier fixe quelconque compris entre 1 et $q_1 - 1$, soit λ un entier compris entre 1 et $s - 1$ et soit μ un entier de la suite $0, 1, \ldots, s^h - 1$.

Montrons que 22) $a_{\lambda s^h+\mu} = r^h a_\lambda + a_\mu$.

En effet, comme $\lambda < s$ et $\mu < s^h$, on a $\lambda s^h + \mu < s^{h+1} \leqslant s^{q_1}$.

Donc, d'après 11), $c_{(\lambda s^h+\mu)s^{q_1}(th'+h'')} = l^{th'+h''}a_{\lambda s^h+\mu}$.

Or, d'après 16), 21) et 3),

$$c_{(\lambda s^h+\mu)s^{q_1}(th'+h'')} = d_{(\lambda s^h+\mu)s^{q_1}(th'+h'')} = d_{\lambda s^{p_1h'}+\mu s^{q_1}(th'+h''} .$$

Et comme $\mu s^{q_1(th'+h'')} < s^{p_1h'}$, on a, d'après 15), 17), 16) et 11),

$$d_{\lambda s^{p_1h'}+\mu s^{q_1}(th'+h'')} = n^{h'}b_\lambda + d_{\mu s^{q_1}(th'+h'')} = n^{h'}a_\lambda + c_{\mu s^{q_1}(th'+h'')} =$$
$$= n^{h'}a_\lambda + l^{th'+h''}a_\mu .$$

On a donc $n^{h'}a_\lambda + l^{th'+h''}a_\mu = l^{th'+h''}a_{\lambda s^h+\mu}$.

D'où, d'après 4), 5), 3) et 21), 22) $r^h a_\lambda + a_\mu = a_{\lambda s^h+\mu}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte sans peine des relations 20) et 22) que, quel que soit l'entier β de la suite $1, 2, \ldots, q_1 - 1$ et quels que soient les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\beta+1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s - 1$, on a

$$23)\quad a_{\alpha_1 s^\beta + \alpha_2 s^{\beta-1} + \cdots + \alpha_{\beta+1}} = r^\beta a_{\alpha_1} + r^{\beta-1}a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_{\beta+1}} .$$

Donc tous les nombres $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_k$ ont un développement à base r qui peut s'écrir à l'aide des seuls chiffres $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$.

Et comme, en particulier, $a_{is^{q_1-1}} = r^{q_1-1}a_i$, $i = 1, 2, \ldots, s - 1$, et que $a_j < l = r^{q_1}$, quel que soit $j = 0, 1, \ldots, k$, il s'ensuit que $a_i < r$, $i = 0, 1, \ldots, s - 1$.

Ainsi $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$ sont s nombres de la suite $0, 1, \ldots, r-1$. Posons $\mathfrak{K} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}\}$.

D'après ce qui précède, K est l'ensemble des nombres de la forme

$$r^{q_1-1}\varphi_1 + r^{q_1-2}\varphi_2 + \cdots + \varphi_{q_1}, \quad \text{où} \quad \varphi_i \in \mathfrak{K}, \quad i = 1, 2, \ldots, q_1,$$

et

$$a_{\alpha_1 s^{q_1-1} + \alpha_2 s^{q_1-2} + \cdots + \alpha_{q_1}} = r^{q_1-1} a_{\alpha_1} + r^{q_1-2} a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_{q_1}},$$

quels que soient les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q_1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s-1$. De 18), 23) et 4), on déduit sans peine que K' est l'ensemble des nombres de la forme

$$r^{p_1-1}\psi_1 + r^{p_1-2}\psi_2 + \cdots + \psi_{p_1}, \quad \text{où} \quad \psi_j \in \mathfrak{K}, \quad j = 1, 2, \ldots, p_1,$$

et, comme $b_0 < b_1 < \cdots < b_m$, on a bien

$$b_{\beta_1 s^{p_1-1} + \beta_2 s^{p_1-2} + \cdots + \beta_{p_1}} = r^{p_1-1} a_{\beta_1} + r^{p_1-2} a_{\beta_2} + \cdots + a_{\beta_{p_1}},$$

quels que soient les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s-1$, ce qui justifie la remarque 3.

11. *Remarque* 4. De la proposition I et de la remarque 3 découle aussitôt le critère 2 de M. Henri Cartan et on a, d'après le lemme 1, $A = B = [a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}]_r$.

(Reçu le 15 septembre 1945.)