Endlichgleiche Zerschneidung von Parallelotopen in gewöhnlichen und höheren Euklidischen Räumen.

Autor(en): **Emch, Arnold**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **18 (1945-1946)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16905

Endlichgleiche Zerschneidung von Parallelotopen in gewöhnlichen und höhern Euklidischen Räumen

Von ARNOLD EMCH, Urbana (Ill.)

I. Einleitung

Unter Parallelotop $(P_a)_n$ in einem Euklidischen Raume E_n von n Dimensionen versteht man ein Raumstück in E_n, das von n Paaren von parallelen Räumen $E^i_{n-1} \parallel E^{i'}_{n-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$ begrenzt wird. Sind diese n Paare gegenseitig senkrecht zueinander, so heißt das Parallelotop eine „Kiste"[1]. Sie soll mit K_n bezeichnet werden. Jeder Raum E^i_{n-1} ist durch $n-1$ unabhängige Geraden g_i durch eine Ecke P_i bestimmt; der dazu parallele $E^{i'}_{n-1}$ durch $n-1$ zu g; parallele Geraden g'_i; durch den diagonal liegenden Gegenpunkt P_i. Die E^i_{n-1} und $E^{i'}_{n-1}$ sind $(n-1)$ dimensionale Grenzräume von $(Pa)_n$. In jedem von diesen befinden sich 2^{n-1} Ecken. Die Anzahl der Ecken von $(P_a)_n$ ist 2^n. Da durch jede Ecke n Kanten gehen, so ist die Anzahl aller Kanten $\frac{1}{2}\, n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}$. Zu jeder Kante durch eine Ecke gibt es eine parallele und gleiche Kante durch jede der übrigen Ecken. Folglich kann die Anzahl aller Kanten in n Bündel von parallelen und gleichen Kanten zerlegt werden. Diese Bündel sollen mit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bezeichnet werden. Jedes von diesen wird von zwei parallelen Räumen E^i_{n-1} und $E^{i'}_{n-1}$ begrenzt. Da durch jede Ecke n Kanten gehen und jeder Grenzraum durch $n-1$ durch sie gehenden Kanten bestimmt ist, so laufen in jeder Ecke n Grenzräume zusammen. Im Fall einer Kiste sind alle Kanten durch eine Ecke orthogonal, sowie auch die $n-1$ durch sie gehenden Grenzräume. In E_2 ist ein Parallelotop ein Parallelogramm, eine Kiste ein Rechteck. In E_3 ist ein $(P_a)_3$ ein Parallelopipedon, eine Kiste K_3 ein rechtwinkliges Prisma. Sind $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ die in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten einer Kiste, so ist ihr Volumen $V_n = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$. Die entsprechende Volumenformel für ein $(P_a)_n$ braucht nicht hingeschrieben zu werden, da sie im Verlaufe der Untersuchung nicht notwendig ist.

Im folgenden handelt es sich um die endlichgleiche Zerschneidung von zwei volumengleichen Parallelotopen. Es wird bewiesen werden, daß ein Parallelotop durch eine solche Zerschneidung immer in eine Kiste ver-

[1]) Siehe Mehrdimensionale Geometrie von *P. H. Schouten* (1905), vol. 2: Die Polytope, pp. 92—96.

wandelt werden kann, so daß das Problem der endlichgleichen Zerschneidung auf zwei volumengleiche Kisten beschränkt werden kann. Es soll also bewiesen werden, daß es bei zwei gegebenen volumengleichen Kisten K_n und K'_n immer möglich ist, K_n in eine endliche Zahl Stücke mit Grenzräumen E_{n-1} zu zerschneiden, so daß sie K'_n ohne Lücken vollständig ausfüllen. Für E_2, E_3 hat man dafür die Bezeichnungen Triangulation, Tetrangulation, so daß es angezeigt ist, für E_n das Wort Polyangulation zu gebrauchen. In diesen Definitionen soll der Begriff der endlichgleichen Zerschneidung immer eingeschlossen sein.

In einem Artikel der Mathematischen Annalen, vol. 55 (1902), pp. 465 bis 478, hat Dehn bewiesen, daß die Tetrangulation zweier volumengleicher Polyeder in E_3 im allgemeinen nicht möglich ist. Für ebenensymmetrische Polyeder in E_3 ist das Problem möglich auf Grund der Lösung von C. L. Gerling für zwei ebenensymmetrische Tetraeder in einem Briefe an Gauß (Gesammelte Werke, vol. 8, pp. 242—243). Die Triangulation zweier flächengleicher Polygone in E_2 ist seit langer Zeit bekannt. William Wallace war wohl der erste, dem die Lösung gelang. Diese erschien 1807 in *Leybournes Mathematical Repository*, vol. 3.

Die Methode der Polyangulation von Parallelotopen und Kisten in E_n stützt sich auf einen synthetischen Aufbau von E_2 zu E_3, zu E_4, etc. und eine neue effektive Lösung des Problems für E_2, auf welche sich alles andere stützt.

II. Die Verwandlung von $(P_a)_n$ in K_n

1. E_2. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M sein Mittelpunkt, Fig. 1. Wenn $AB = BC$, so hat man einen Rhombus. Wenn nicht, so hat $(Pa)_2$ ein längeres paralleles Seitenpaar $AD \parallel BC$, $DA > AB$. Dann fälle man

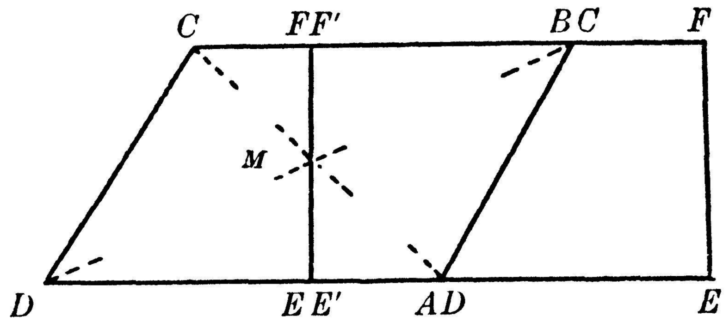

Fig. 1

vom Mittelpunkt M eine Senkrechte auf dieses Seitenpaar, die es in E und F schneidet. Auf diese Weise wird das Parallelogramm in zwei kongruente Stücke $ABFE \cong CDE'F'$ zerlegt. Wird $CDEF$ nach rechts verschoben, bis DC mit AB zusammenfällt, so erhält man das Rechteck $EFF'E' = ABCD$, d. h. $(P_a)_2 = K_2$.

2. $\boldsymbol{E_3}$**.** Dasselbe Verfahren kann befolgt werden in der Verwandlung von einem $(P_a)_3$ in eine K_3. In einem $(P_a)_3$ gibt es drei Quadrupel von parallelen Seiten. Sind alle Seiten gleich lang, so ist $(P_a)_3$ ein Rhomboid. Im andern Falle ist unter den drei Quadrupeln eines das längste. Auf dieses errichte man durch M eine senkrechte Ebene, welche das Quadrupel in $PQRS$ schneidet. Dadurch wird das Parallelotop in zwei gleiche

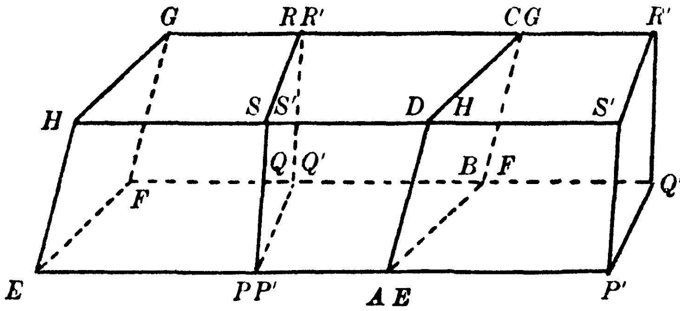

Fig. 2

Teile zerlegt, Fig. 2. Wird $PQRSEFGH$ nach rechts verschoben, bis $EFGH$ mit $ABCD$ zusammenfällt, so entsteht ein $(P_a)_3'$, in welchem das Quadrupel ($PP' \,||\, QQ'$, etc.) senkrecht zu den Endflächen steht. Wenn $PQRS$ ein Rhombus ist, oder ein Parallelogramm mit $PQ = SR > PS$, so lege man durch M eine Ebene senkrecht zu $PQ(SR)$, welche $(P_a)_3'$ wieder in zwei gleiche Stücke zerlegt. Dann wird das vordere Stück in der Richtung von SR nach rückwärts verschoben, bis $PSS'P'$ mit $QRR'Q'$ zusammenfällt. *Dann entsteht eine Kiste* K_3, *welche volumengleich mit* $(P_a)_3'$ *und folglich mit* $(P_a)_3$ *ist.*

3. $\boldsymbol{E_n}$**.** Dasselbe Prinzip der Verwandlung kann auf alle Parallelotope in nachfolgenden höhern Räumen bis auf (P_a) und weiter angewendet werden. Zu diesem Zwecke wähle man aus $(P_a)_n$ das längste der Bündel p_i paralleler und gleicher Kanten und lege durch den Mittelpunkt M von $({}_aP)_n$ einen Raum $M_{n-1} \perp p_i$, welcher $(P_a)_n$ in zwei gleiche Stücke zerlegt und p_i in einem $(P_a)_{n-1}^{M_{n-1}}$ schneidet, das senkrecht zu dem Bündel p_i ist. Wie in der Einleitung bemerkt wurde, wird p_i von zwei parallelen $(P_a)_{n-1}^L$ und $(Pa)_{n-1}^R$ begrenzt. $(P_a')_{n-1}^{M_{n-1}}$ sei identisch mit $(P_a)_{n-1}^{M_{n-1}}$, so daß die zwei Stücke bezüglich von $(P_a)_{n-1}^L$ und $(P_a)_{n-1}^R$, und $(P_a')_{n-1}^{M_{n-1}}$ und $(P_a)_{n-1}^R$ begrenzt werden. Jetzt werde das erste Stück in der Richtung von p_i nach $(P_a)_{n-1}^R$ verschoben, bis $(P_a)_{n-1}^L$ mit $(P_a)_{n-1}^R$ zusammenfällt. Dadurch entsteht ein neues $(P_a)_n$, das von $(P_a)_{n-1}^{M_{n-1}}$ und $(P_a')_{n-1}^{M_{n-1}}$ begrenzt wird, so daß die gleichzeitig verschobenen Kanten $p_i' = p_i$ zu beiden Grenzräumen senkrecht sind. Aus $(P_a)_n$ wähle man wieder das längste Bündel p_i'' (es kann verschiedene längste geben) und lege durch den Mittelpunkt von $(P_a')_n$ einen zu p_i'' senkrechten Raum M_{n-1}', der

$(P'_a)_n$ wieder in zwei gleiche Stücke zerlegt. Auf diese wird dasselbe Prinzip der Verschiebung angewendet, wodurch ein neues Parallelotop entsteht, das nun zwei Systeme orthogonaler Kanten enthält. Dieser Prozeß kann so lange fortgesetzt werden, bis schließlich das ursprüngliche Parallelotop in eine volumengleiche Kiste K_n verwandelt wird. Wird dieser Prozeß rückläufig gemacht, wobei nacheinander alle Schnitte mitgenommen werden, so ist dadurch eine Polyangulation zwischen einem Parallelotop und einer volumengleichen Kiste vollzogen. Man kann das Resultat ausdrücken in dem

Satz 1. *In einem Euklidischen Raume von n Dimensionen kann ein Parallelotop immer in eine Kiste polyanguliert werden.*

Für das allgemeine Problem genügt es somit, sich nur mit Kisten zu befassen.

III. Triangulation von flächengleichen Polygonen in E_2

1. *Dreieck und flächengleiches Rechteck.*

Irgendein Polygon, das eine endliche einfach oder mehrfach zusammenhängende Fläche begrenzt, kann auf mehrfache Weise in ein endliches Dreiecksnetz trianguliert werden (im Sinne der Vermessungslehre). Jedes dieser Dreiecke kann in bekannter Weise in ein Rechteck verwandelt werden: In ABC ziehe die Mittellinie m, welche AB in E, BC in F

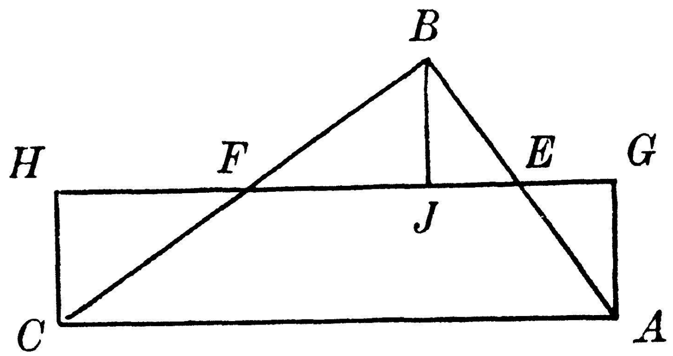

Fig. 3

schneidet, Fig. 3. Von A, B, C ziehe die Senkrechten AG, BJ, CH auf m. Dann entferne man $\triangle FJB$ und lege es in derselben Ordnung auf $\triangle FHC$; in derselben Weise $\triangle EJB$ auf $\triangle EGA$. Dadurch wird $\triangle ABC = \square AGHC$. In gleicher Weise können alle Dreiecke des Netzes von P in Rechtecke verwandelt werden.

2. *Flächengleiche Rechtecke.*

Gegeben zwei flächengleiche Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$. Man bringe sie in die Lage von Fig. 4, so daß AD und AB', sowohl wie AB

und $A'D'$ Verlängerungen voneinander sind. Nun ist $AB \cdot AD = AB' \cdot AD'$, oder $AB : AB' = AD' : AD$. Folglich ist $\triangle AB'B \sim \triangle A'DD'$ und $BB' \parallel DD'$. Werden BB' und DD' halbiert und verbindet man Halbierungspunkte durch die Gerade s, so halbiert s alle Segmente zwischen DB' und $D'B$ parallel zu DD', sowie auch die Segmente zwischen BC und $B'C'$. Daraus geht hervor, daß sich die Rechtecke in schiefsymmetrischer Affinität oder einfach in schiefer Symmetrie befinden. Das ist der Schlüssel zur Triangulation der beiden Rechtecke.

Von A ziehe man eine Zickzacklinie $AN_1M_1 \ldots N_{n-1}$, bei welcher die Stücke abwechselnd parallel zu $B'B$ und $D'B$ sind, bis ein Punkt N_{n-1} auf BC erreicht wird, für welchen $N_{n-1}C < (BN_1 = N_1N_2 = \cdots = N_{n-2}N_{n-1})$. Es bleibt dann ein rechtwinkliges Trapez $M_{n-2}N_{n-1}CD$

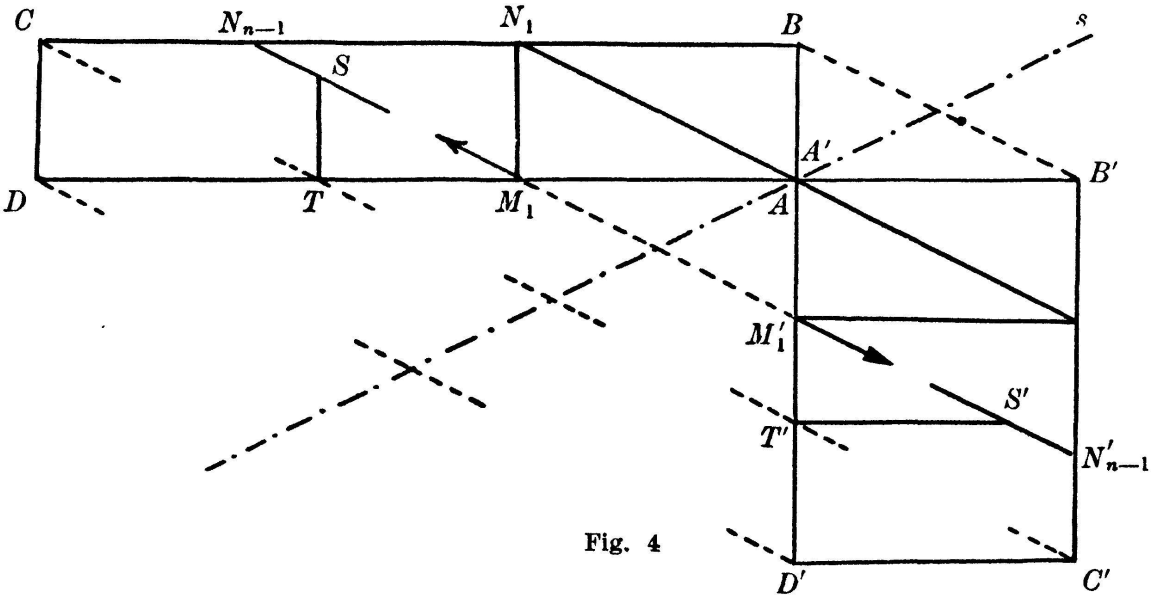

Fig. 4

übrig. (In Fig. 4 ist $n = 3$.) Transformiert man diese Konstruktion durch die schiefe Symmetrie auf das Rechteck $A'B'C'D'$, so bleibt als Endstück das Trapez $M_{n-2}'N_{n-1}'C'D'$ (in der Figur $M_1'N_{n-1}'C'D', n=3$). Die Gerade CC' schneidet DB' in T, $D'B$ in T'. Die Senkrechte in T zu DB' schneidet M_1N_{n-1} in S, die Parallele von T' zu DB' schneidet $M_1'N_{n-1}'$ in S'. Aus der Konstruktion folgt sofort, daß $TSN_{n-1}CD \cong T'S'N_{n-1}'C'D'$ und $M_1ST \cong M_1'S'T'$. Den kongruenten Dreiecken in $ABCD$ entsprechen kongruente Dreiecke in $A'B'C'D'$. Damit ist die Triangulation der beiden Rechtecke hergestellt. (Die kongruenten fünfeckigen Polygone $CDTSN_{n-1}$ und $C'D'T'S'N_{n-1}'$ können natürlich auch in kongruente Dreiecke trianguliert werden, was nicht notwendig ist.) Weiter ist es klar, *daß daraus die Triangulation zwischen einem beliebigen Rechteck K_2 und einem flächengleichen K_2' möglich ist, wenn eine beliebige fixe Grundlinie für K_2' gegeben ist.*

3. *Flächengleiche Polygone.*

Obschon dieser Abschnitt eigentlich nicht in den Rahmen dieses Artikels gehört, so soll er doch in anbetracht eines bekannten interessanten Resultates hier eingeschlossen werden.

Gegeben seien zwei flächengleiche Polygone P und Q bezüglich mit den Triangulationsnetzen $P(\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_k)$ und $Q(\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_l)$. Zunächst verwandle man die Netze in Reihen von flächengleichen Rechtecken $P(\square_1, \square_2, \ldots, \square_k)$ und $Q(\square_1^*, \square_2^*, \ldots \square_l^*)$. Dann trianguliere man alle diese Rechtecke in solche von gleicher Basis. Die basisgleichen Rechtecke der Reihe $P(\square_i)$ schichte man Basis über Basis übereinander, wodurch ein Rechteck $ABCD$ entsteht. Dasselbe tue man für $Q(\square_i^*)$, so daß ein Rechteck $A^*B^*C^*D^*$ hervorgeht. Es ist klar, daß $ABCD \cong A^*B^*C^*D^*$. Nun lege man $A^*B^*C^*D^*$ zur Deckung auf $ABCD$ und vereinige die durch die Operationen in jedem hervorgebrachten Triangulationsschnitte zu einem einzigen Triangulationssystem (nicht alle dadurch hervorgebrachten Stücke brauchen Dreiecke zu sein). Wird die ganze Operation rückgängig gemacht, so ist die Triangulation der beiden Polygone P und Q komplett. Man hat also den

Satz 2. *Sind zwei flächengleiche Polygone P und Q im Sinne der allgemeinen Definition in der Einleitung gegeben, so ist es immer möglich, P in endlicher Weise so in Dreiecke (Polygone) zu zerschneiden, daß damit Q ohne Lücken vollständig ausgefüllt werden kann.*

IV. Tetrangulation volumengleicher Kisten in E_3

Gegeben sind zwei volumengleiche Kisten K_3 und K_3', für die wir die Symbole $(a_1 a_2 a_3)$ und $(a_1' a_2' a_3')$ einführen, wo die a_i und a_i' die je in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten sind, so daß $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_1' \cdot a_2' \cdot a_3'$ gleich dem Volumen ist. In ähnlicher Weise bedeutet $(a_1 a_2)$ das Rechteck mit dem Inhalt gleich $a_1 \cdot a_2$, etc. Wird ein Rechteck $(a_i a_k)$ in ein anderes Rechteck trianguliert, wobei die dritte Kante ihre Länge und ihre Orthogonalität beibehält, so erhält man eine Kiste mit unverändertem Volumen. Die auf den Triangulationsschnitten errichteten senkrechten Ebenen zerschneiden die so triangulierten Kisten in die gleiche Anzahl volumengleicher Prismen. Jetzt werde $(a_1 a_2)$ in ein flächengleiches Rechteck mit der Basis a_1' trianguliert, so daß ein neues Rechteck $(a_1' \alpha_2)$ und mit a_3 unverändert eine neue volumengleiche Kiste $(a_1' \alpha_2 a_3)$ entsteht, Fig. 5. Die auf den Triangulationsschnitten von $(a_1 a_2)$ und $(a_1' \alpha_2)$ auf den Ebenen dieser errichteten senkrechten Ebenen zerschneiden $(a_1 a_2 a_3)$ und $(a_1' \alpha_2 a_3)$ in die gleiche Anzahl von volumengleichen Prismen. Jetzt werde $(\alpha_2 a_3)$ in ein Rechteck $(a_2' \alpha_3)$ trianguliert mit a_1' unverändert, so daß eine neue volumengleiche Kiste $(a_1' a_2' \alpha_3)$ hervorgeht. Die vorhergehenden Triangulationsschnitte werden zu den neuen mitgenommen. Da $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_1' \cdot a_2' \cdot a_3'$, so muß $\alpha_3 = a_3'$ sein. Damit ist mit der Umkehrung des Prozesses die Tetrangulation von K_3 und K_3' vollzogen. Man hat

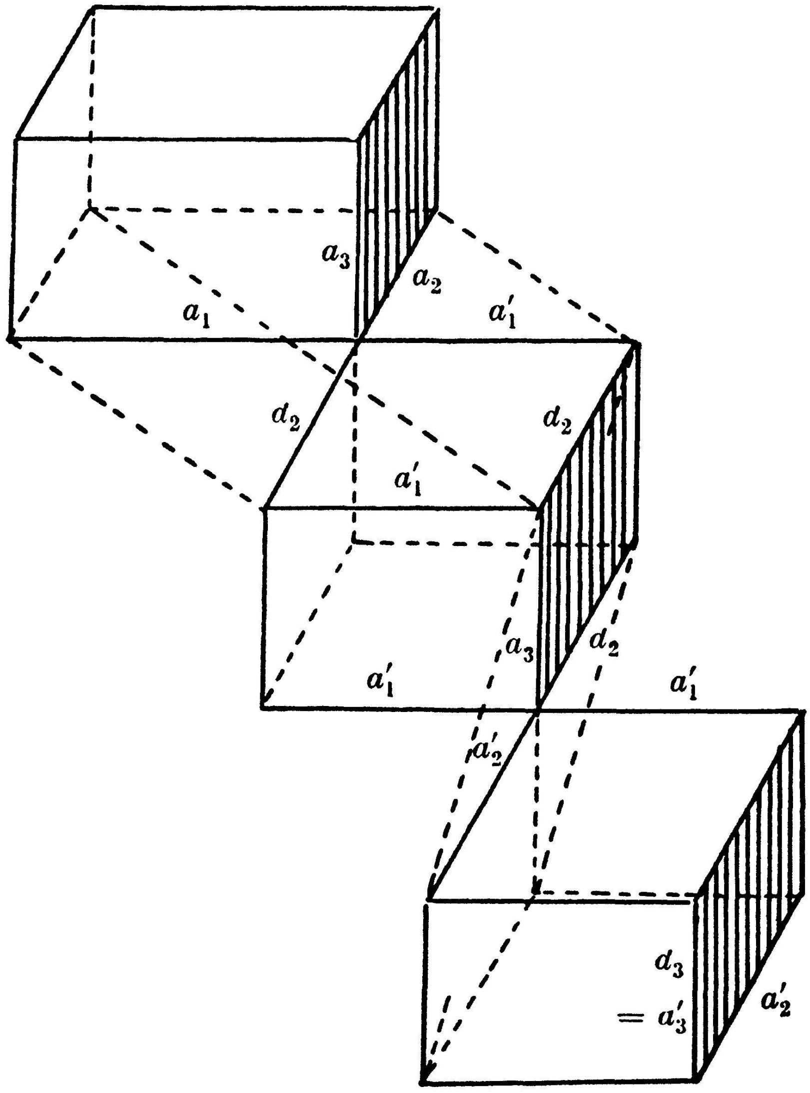

Fig. 5 a_1'

Satz 3. *Zwei volumengleiche Kisten K_3 und K_3' können immer tetranguliert werden. In K_3' kann man $(a_1' a_2')$ konstant lassen, so daß alle K_3 in Kisten von konstanter Grundfläche verwandelt werden können.*

Dieser Satz kann für den Fall verallgemeinert werden, in welchem man Körper K^* betrachtet, die von drei orthogonalen n-Tupeln von parallelen Ebenen begrenzt werden. Solche Körper können nämlich in lauter Kisten von der Art K_3 zerschnitten werden.

V. Polyangulation volumengleicher Kisten in E_4, E_5, ..., E_n

1. $K_4 = (a_1 a_2 a_3 a_4)$ und $K_4'(a_1' a_2' a_3' a_4')$ seien zwei volumengleiche Kisten in E_4. Es ist $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1' \cdot a_2' \cdot a_3' \cdot a_4'$. Man nehme die Kiste $(a_1 a_2 a_3)$ in einem E_3 und tetranguliere sie in eine Kiste $(a_1' a_2' \alpha_3)$, so daß $a_1' \cdot a_2' \cdot \alpha_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$, mit a_4 und seiner Orthogonalität unverändert. Man erhält eine neue Kiste $(a_1' a_2' \alpha_3 a_4)$ und es ist $a_1' \cdot a_2' \cdot \alpha_3 \cdot a_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$. Tetranguliere $(a_2' \alpha_3 a_4)$, in einem E_3, in welchem diese enthalten ist, in eine neue volumengleiche Kiste $(a_2' a_3' \alpha_4)$ mit Bewahrung der Orthogonalität, einschließlich a_4. Es ist dann $a_2' \cdot a_3' \cdot \alpha_4 = a_2' a_3' a_4$ und $a_1' \cdot a_2' \cdot a_3' \cdot \alpha_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$. Da $K_4 = K_4'$ ist, so folgt $\alpha_4 = a_4$. In diesen Operationen werden die Schnittflächen von Schnitt zu Schnitt mitgeführt. Kehrt man den Prozeß um, so resultiert infolge der Erhaltung der Orthogonalitätsbedingungen eine endlichgleiche Zerschneidung (Polyangulation) der beiden Kisten K_4 und K_4'. In ähnlicher Weise und mit dem gleichen Resultat kann man bei Kisten K_5 und K_5' in E_5 vorgehen, und durch denselben Induktionsprozeß schließlich bis und mit Kisten K_n und K_n' in E_n fortfahren. Das Endresultat lautet:

Satz 4. *In einem Euklidischen Raume E_n kann eine Kiste K_n immer so polyanguliert oder in eine endliche Zahl von Stücken zerschnitten werden, daß diese eine beliebige andere Kiste K_n' von gleichem Volumen ohne Lücken vollständig ausfüllen können. Dasselbe gilt jetzt auch für volumengleiche Parallelotope.*

(Eingegangen den 17. September 1945.)