Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Über eine Ungleichung der Potentialtheorie.

Autor: Selberg, Henrik L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16909

Über eine Ungleichung der Potentialtheorie

Von Henrik L. Selberg, Gjövik (Norwegen)

1. Sei G ein schlichtes Gebiet der $z = x + iy$-Ebene. Wir bezeichnen im folgenden mit $g(z; G, z_0)$ die *Green*sche Funktion von G, die in z_0 ihren Aufpunkt hat.

Besteht die Begrenzung von G aus endlich vielen analytischen Kurvenbogen, so ist $g(z; G, z_0)$ eindeutig durch folgende Eigenschaften bestimmt: Im Innern von G ist $g(z; G, z_0)$ eindeutig und überall harmonisch mit Ausschluß des Punktes z_0, wo

$$g(z; G, z_0) + \log |z - z_0|$$

noch harmonisch bleibt. Am Rande von G ist $g(z; G, z_0)$ stetig und gleich Null.

Ist die Begrenzung von mehr komplizierter Natur, so kann die *Green*sche Funktion durch einen Grenzprozeß definiert werden. Wir schöpfen G durch eine Folge von Gebieten $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ aus, wobei die Begrenzung jedes G_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ aus endlich vielen analytischen Kurvenbogen bestehen soll. Die entsprechenden *Green*schen Funktionen bilden eine monotone Folge $g(z; G_1, z_0) \leqq g(z; G_2, z_0) \leqq \ldots$, deren Grenzfunktion $\lim_{\nu \to \infty} g(z; G_\nu, z_0)$ die zum Gebiete G gehörende *Green*sche Funktion $g(z; G, z_0)$ ist. Entweder ist $g(z; G, z_0)$ eine in G eindeutige und überall mit Ausschluß von z_0 harmonische Funktion, oder es ist $g(z; G, z_0) \equiv \infty$. Da $\lim_{\nu \to \infty} g(z; G_\nu, z_0)$ unabhängig von der gewählten Gebietsfolge ist, so ist die *Green*sche Funktion $g(z; G, z_0)$ von G hierdurch eindeutig bestimmt.

Wir denken uns jetzt, daß das Gebiet G von einem Kreis $|z| = r$ geschnitten wird, und lassen Q die Punktmenge bezeichnen, welche der Kreis $|z| = r$ gemeinsam mit dem Innern von G hat. Die Gesamtlänge der Bogen von Q setzen wir gleich θr. In einer Arbeit, die demnächst erscheinen wird, habe ich bewiesen, daß

$$\int_Q g(re^{i\varphi}; G, z_0)\, d\varphi \leqq \pi^2 \operatorname{tang} \frac{\theta}{4}\,. \tag{1}$$

Denken wir uns, daß G von der reellen Achse geschnitten wird, und lassen wir S die Punktmenge bezeichnen, welche die reelle Achse gemeinsam mit dem Innern von G hat, so erhalten wir durch einen Grenzübergang aus (1) die Ungleichung

$$\int_S g(x; G, z_0)\, dx \leqq \frac{\pi^2}{4} L ,$$

wo L die Gesamtlänge der Segmente von S bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit soll die letzte Abschätzung verbessert werden. Die Ungleichungen, zu welchen wir gelangen, sind die bestmöglichen, indem sie ohne weitere Annahmen nicht verschärft werden können.

2. Wir nehmen im folgenden an, daß die offene Punktmenge S aus endlich vielen Intervallen besteht, von denen keine zwei aneinander stoßen, und daß die Gesamtlänge L dieser Intervalle endlich ist. Die Endpunkte der Intervalle bezeichnen wir mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}$. Mit $\overline{S}$ bezeichnen wir die Komplementärmenge von S auf der reellen Achse und mit D das Schlitzgebiet, dessen Rand mit $\overline{S}$ zusammenfällt.

Setzen wir $g(z; D, z_0) = Rf(z; D, z_0)$ (R=Realteil), so kann $f(z; D, z_0)$ in der Umgebung von $z = \infty$ über der reellen Achse von der oberen Halbebene in die untere analytisch fortgesetzt werden. $f(z; D, z_0)$ ist folglich regulär in $z = \infty$, und wir erhalten somit in der oberen Halbebene für $g(z; D, z_0)$ eine Entwicklung

$$g(z; D, z_0) = \frac{\gamma(z_0) y}{x^2 + y^2} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) , \tag{2}$$

wo die Konstante $\gamma(z_0)$ durch

$$\gamma(z_0) = - \lim_{y \to +\infty} i f'(iy) y^2 \tag{3}$$

gegeben ist.

Wir nehmen nun an, daß $I z_0 \leqq 0$ (I = Imaginärteil) ist. Durch Anwendung des *Cauchy*schen Integralsatzes auf $f(z; D, z_0)$ finden wir, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x + iy; D, z_0) dx$$

unabhängig von y ist, so lange $y \geqq 0$ ist. Um den Wert des Integrales zu berechnen, machen wir von der Entwicklung (2) Gebrauch, indem wir y gegen $+\infty$ konvergieren lassen. Wir erhalten dadurch

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x + iy; D, z_0) dx = \pi \gamma(z_0)$$

m. a. W.

$$\int_S g(x; D, z_0) dx = \pi \gamma(z_0) . \tag{4}$$

Um $\gamma(z_0)$ abzuschätzen, bemerken wir, daß $f(z; D, z_0)$ ein Integral dritter Gattung ist. Wir nehmen vorübergehend an, daß z_0 ein Punkt α auf der reellen Achse ist. Die analytische Fortsetzung von $f(z; D, \alpha)$ durch Spiegelung gibt für die Ableitung $f'(z; D, \alpha)$ die Darstellung

$$f'(z; D, \alpha) = \frac{-i\gamma(\alpha) P(z)}{(z-\alpha)\sqrt{U(z)}} ,$$

wo

$$U(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_{2n})$$

und $P(z)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist, dessen Nullstellen mit den $n-1$ Maxima $(\neq \alpha)$ von $g(x; D, \alpha)$ auf S zusammenfallen. Lassen wir ξ_ν die Nullstelle von $\frac{d}{dx}\, g(x; D, \alpha)$ im Intervalle $x_{2\nu-1} < x < x_{2\nu}$ bezeichnen, und bestimmen wir m, so daß $x_{2m-1} < \alpha < x_{2m}$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (3)

$$P(z) = (z - \xi_1)\cdots(z - \xi_{m-1})(z - \xi_{m+1})\cdots(z - \xi_n) .$$

Nun hat $f'(z; D, \alpha)$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 in $z = \alpha$. Also ist

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) &= \left|\frac{\sqrt{U(\alpha)}}{P(\alpha)}\right| = \frac{\sqrt{-(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)\ldots(x_{2n}-\alpha)}}{(\alpha-\xi_1)\ldots(\alpha-\xi_{m-1})(\xi_{m+1}-\alpha)\ldots(\xi_n-\alpha)} \\ &\leqq \sqrt{(\alpha - x_1)(x_{2n}-\alpha)}\,\prod_{\nu=1}^{m-1}\sqrt{\frac{x_{2\nu+1}-\alpha}{x_{2\nu}-\alpha}}\,\prod_{\nu=m}^{n-1}\sqrt{\frac{x_{2\nu}-\alpha}{x_{2\nu+1}-\alpha}} .\end{aligned} \tag{5}$$

Lassen wir $l(\alpha)$ das Gesamtmaß des Teiles von S bezeichnen, wo $x < \alpha$ ist, so ist die rechte Seite von (5) nicht größer als

$$\sqrt{l(\alpha)\,(L - l(\alpha))} ;$$

wir erhalten somit

$$\gamma(\alpha) \leqq \sqrt{l(\alpha)\,(L - l(\alpha))} . \tag{6}$$

Hiermit ist der Wert des Integrales (4) abgeschätzt, wenn z_0 auf S liegt.

Wir nehmen jetzt an, daß z_0 ein beliebiger Punkt der unteren Halbebene $Iz < 0$ ist. Lassen wir z_0 gegen $\overline{S}$ konvergieren, so strebt das Integral (4), wie man leicht nachweist, gegen den Grenzwert Null. Da das Integral (4) eine in $Iz < 0$ harmonische Funktion des Parameters z_0 ist, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Ungleichung (6)

$$\int\limits_S g(x\,;D,z_0)\,dx = \int\limits_S \gamma(x)\,d\arg(x-z_0)$$

$$\leqq \int\limits_S \sqrt{l(x)\,(L-l(x))}\,d\arg(x-z_0) \tag{7}$$

und hieraus

$$\int\limits_S g(x\,;D,z_0)dx \leqq \frac{\pi}{2}L\ . \tag{8}$$

Wir bemerken, daß das Gleichheitszeichen in (7) dann und nur dann gilt, wenn S aus einem einzigen Intervall besteht.

3. Da das in Nr. 1 betrachtete Gebiet G entweder mit D identisch ist oder ein Teilgebiet von D ist, so erhalten wir

$$g(z;G,z_0) \leqq g(z;D,z_0)$$

und hiermit wegen (7) und (8)

Satz. *Sei G ein schlichtes Gebiet der $z=x+iy$-Ebene, z_0 ein innerer Punkt von G und $g(z;G,z_0)$ die zu G gehörende Greensche Funktion, die in z_0 ihren Aufpunkt hat. Sei ferner S die Punktmenge, welche die reelle Achse gemeinsam mit dem Innern von G hat, L das Gesamtmaß von S und $l(x)$ das Gesamtmaß der Teilmenge von S, wo die Abszisse $< x$ ist. Dann ist*

$$\int\limits_S g(x;G,z_0)dx \leqq \int\limits_S \sqrt{l(x)\,(L-l(x))}\,d\arg(x-z_0)$$

und

$$\int\limits_S g(x\,;G,z_0)dx \leqq \frac{\pi}{2}L\ .$$

Der Satz ist zunächst nur unter der Voraussetzung bewiesen worden, daß S in endlich viele Intervalle zerfällt, von denen keine zwei aneinander stoßen. Diese Einschränkung kann indes durch einen Grenzübergang leicht behoben werden, so daß der Satz für beliebige schlichte Gebiete G gültig bleibt.

(Eingegangen den 1. November 1945.)