Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Sur une proposition de Mlle S. Piccard.
Autor: Sierpinski, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16911

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur une proposition de Mlle S. Piccard

Par W. Sierpinski, Varsovie

Dans son livre *Sur les ensembles de distances*, Mlle *Sophie Piccard* a démontré que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire E congruent à son complémentaire qui n'est pas mesurable L, ne jouit pas de la propriété de Baire et tel que l'ensemble M de tous les nombres positifs qui ne sont pas égaux à une distance entre deux points de E est dénombrable*[1]).

Le but de cette Note est de démontrer cette proposition de Mlle *Piccard sans faire appel à l'hypothèse du continu, en utilisant seulement l'axiome du choix.*

Soit X l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $0 < x < 2$. Il résulte du théorème de *Zermelo* qu'il existe une suite transfinie $S = \{x_\xi\}_{\xi < \varphi}$ formée de tous les nombres distincts de X et nous pouvons supposer que φ est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et que $x_1 = 1$. Or, la famille de tous les ensembles parfaits (non vides) $\subset X$ étant de puissance du continu, il existe aussi une suite transfinie $\{P_\xi\}_{\xi < \varphi}$ de type φ, formée de tous ces ensembles.

E étant un ensemble linéaire et a un nombre réel, désignons par $E(a)$ la translation de E de longueur a (c.-à-d. l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $x - a \in E$). Nous définirons maintenant par l'induction transfinie trois suites transfinies $\{a_\xi\}_{\xi < \varphi}$, $\{b_\xi\}_{\xi < \varphi}$ et $\{c_\xi\}_{\xi < \varphi}$ comme il suit.

Posons $a_1 = 0$, $b_1 = x_2$ et soit c_1 le premier terme de la suite S qui appartient à P_1 et est distinct des nombres 1, $x_2 + 1$ et $x_2 - 1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1 < \alpha < \varphi$, et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres a_ξ, b_ξ et c_ξ pour $\xi < \alpha$, et soit E_α leur ensemble. L'ensemble E_α est évidemment de puissance $< 2^{\aleph_0}$, de même que l'ensemble

$$H_\alpha = X[E_\alpha(1) + E_\alpha(-1) + E_\alpha(x_{1+\alpha} + 1) + E_\alpha(x_{1+\alpha} - 1)] \ . \quad (1)$$

L'intervalle $0 < x < 2 - x_{1+\alpha}$ contient donc des nombres qui n'appartiennent pas à H_α : soit a_α le premier de tels nombres de la suite S. Posons $b_\alpha = a_\alpha + x_{1+\alpha}$: nous aurons $b_\alpha \in X$.

L'ensemble parfait P_α, en tant que de puissance $2^{\aleph_0}$, contient des nombres n'appartenant pas à H_α et autres que chacun des nombres

---

[1]) *Sophie Piccard:* Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un esp ace euclidien, Paris 1939, pp. 68—71 (Proposition 15).

$a_\alpha + 1$, $a_a - 1$, $b_\alpha + 1$, $b_\alpha - 1$: soit c_α le premier de tels nombres de la suite S.

Les suites $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$, $\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{c_\xi\}_{\xi<\varphi}$ sont ainsi définies par l'induction transfinie.

Soit Q l'ensemble de tous les nombres a_ξ, b_ξ et c_ξ, où $\xi<\varphi$ et, en désignant par J l'intervalle $0 \leqslant x<1$, posons

$$R = Q + [J - (Q + Q(-1))] \tag{2}$$

et

$$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(2k) \ . \tag{3}$$

Je dis que l'ensemble E satisfait à la proposition de Mlle *Piccard.*

D'abord je démontrerai que $CE = E(1)$, c.-à-d. que le complémentaire de E (par rapport à la droite), CE, coïncide avec la translation de E de longueur 1, autrement dit que les formules

$$x \in E \tag{4}$$

et

$$x + 1 \bar{\in} E \tag{5}$$

sont équivalentes.

Soit donc $x \in E$ et admettons que $x + 1 \in E$. D'après (3) il existe des nombres y et z de R et des entiers k et l, tels que

$$x = y + 2k \quad \text{et} \quad x + 1 = z + 2l \ ,$$

d'où $z - y = 1 + 2(l - k)$. Or, d'après (2), et vu que $Q \subset X$, on trouve $0 \leqslant y<2$ et $0 \leqslant z<2$, d'où $|z - y|<2$, ce qui donne, $|z - y|$ étant un nombre impair, $z - y = \pm 1$.

D'après $y \in R$ et (2) on a soit $y \in Q$, soit $y \in J - [Q + Q(-1)]$ et pareillement pour z. Distinguons 4 cas.

1) $y \in Q$, $z \in Q$. D'après la définition de l'ensemble Q il existe des nombres ordinaux $<\varphi$, α et β, tels que y est un des nombres a_α, b_α, c_α et z est un des nombres a_β, b_β, c_β. Or, comme $0<x_{1+\alpha} \neq 1$, on a $b_\alpha = a_\alpha + x_{1+\alpha} \neq a_\alpha \pm 1$ et, comme $c_\alpha \neq a_\alpha \pm 1$ et $c_\alpha \neq b_\alpha \pm 1$, et vu que $z - y = \pm 1$, on conclut sans peine qu'il ne peut pas être $\alpha = \beta$. On a donc $\alpha \neq \beta$, soit $\alpha > \beta$. Alors, vu la définition de a_α, b_α et c_α, on a $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \bar{\in} E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$, donc $y \bar{\in} E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$. Or, on a a_β, b_β, $c_\beta \in E_\alpha$, d'où $a_\beta \pm 1$, $b_\beta \pm 1$, $c_\beta \pm 1 \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$: comme $y =$

$z \pm 1$ et z est un des nombres a_β, b_β, c_β, on aurait donc $y \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$, ce qui est impossible. Le cas 1) est donc impossible.

2) $y \in Q$, $z \in J - [Q + Q(-1)]$. On a donc $z = y \pm 1 \in Q(1) + Q(-1)$, ce qui est impossible, puisque $z \in J$, $z \bar{\in} Q(-1)$ et $J \cdot Q(1) = 0$.

3) $y \in J - [Q + Q(-1)]$, $z \in Q$. Ce cas se traite comme le cas 2).

4) $y \in J - [Q + Q(-1)]$, $z \in J - [Q + Q(-1)]$. On a dans ce cas y, $z \in J$, donc $0 \leqslant y < 1$, $0 \leqslant z < 1$ et $|y - z| < 1$, contrairement à $y - z = \pm 1$.

Nous avons donc démontré que la formule (4) entraîne la formule (5).

Soit maintenant $x \bar{\in} E$ et distinguons deux cas:

1) $\mathrm{E}x = 2k$ (où $\mathrm{E}x$ désigne l'entier le plus grand $\leqslant x$). On a donc $2k \leqslant x < 2k + 1$, d'où $x \in J(2k)$. Vu que $x \bar{\in} E$, on a, d'après (3), $x \bar{\in} R(2k)$, donc, d'après (2), $x \bar{\in} Q(2k)$ et $x \bar{\in} J(2k) - [Q(2k) + Q(2k - 1)]$, ce qui donne tout de suite $x \in Q(2k - 1)$ et $x + 1 \in Q(2k) \subset R(2k) \subset E$, donc $x + 1 \in E$.

2) $\mathrm{E}x = 2k - 1$. On a donc $2k - 1 \leqslant x < 2k$ et $x + 1 \in J(2k)$. S'il était $x + 1 \bar{\in} E$, on aurait $x + 1 \bar{\in} R(2k)$, donc $x + 1 \bar{\in} Q(2k)$ et $x + 1 \in J(2k) - [Q(2k) + Q(2k - 1)]$, ce qui donne $x + 1 \in Q(2k - 1)$ et $x \in Q(2k - 2) \subset R(2k - 2) \subset E$, contrairement à l'hypothèse que $x \bar{\in} E$. On a donc $x + 1 \in E$.

Nous avons ainsi démontré que la formule (5) entraîne la formule (4).

L'équivalence des formules (4) et (5) est ainsi établie et on a $CE = E(1)$.

Il résulte de la définition de l'ensemble E que E a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans l'intervalle $(0, 2)$. Il en résulte, comme on sait, que E est dans $(0, 2)$ de mesure extérieure $= 2$ et de deuxième catégorie dans toute portion de l'intervalle $(0, 2)$. Or, comme $CE = E(1)$, l'ensemble CE est dans l'intervalle $(1, 2)$ de mesure extérieure $= 1$ et de deuxième catégorie dans toute portion de $(1, 2)$. Il s'en suit tout de suite que E n'est pas mesurable L et ne jouit pas de la propriété de Baire.

Or, soit M l'ensemble de tous les nombres impairs. Je dis que pour qu'un nombre réel positif d soit une distance entre deux points de E, il faut et il suffit qu'on ait $d \bar{\in} M$.

En effet, si $x \in E$ et $d = 2k + 1$, où k est un entier, on a $x + d \in E(2k + 1)$. Or, d'après (3) on a $E(2k) = E$, donc $E(2k + 1) = E(1) = CE$. On a donc $x + d \bar{\in} E$. Cela prouve qu'il n'existe aucun couple de points de E entre lesquels la distance serait $= d$.

D'autre part, si $d \bar{\epsilon} M$, $d > 0$, on a $\delta = d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2} \neq 1$ et, comme $0 \leqslant d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2} < 2$, on a $0 \leqslant \delta < 2$. Si $\delta = 0$, on a $d = 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ et, si $x_0 \epsilon E$, on a $x_0 + d \epsilon E\left(2\mathrm{E}\frac{d}{2}\right) = E$, c.-à-d. $x_0 + d \epsilon E$. Si $\delta \neq 0$, on a $0 < \delta < 2$, $\delta \neq 1$, et il existe un nombre ordinal $\alpha < \varphi$, tel que $\delta = x_{1+\alpha}$, d'où $b_\alpha = a_\alpha + \delta = a_\alpha + d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ et, comme $a_\alpha \epsilon E$, $b_\alpha \epsilon E$, $b_\alpha + 2\mathrm{E}\frac{d}{2} \epsilon E\left(2\mathrm{E}\frac{d}{2}\right) = E$, a_α et $b_\alpha + 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ sont deux points de E entre lesquels la distance est $= d$.

L'ensemble E satisfait donc à la proposition de Mlle Piccard, qui se trouve ainsi démontrée.

(Reçu le 1er mars 1946.)