

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1946-1947)

Artikel: Sur les polyèdres à faces triangulaires.
Autor: Fiala, Félix
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17336>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur les polyèdres à faces triangulaires

Par FÉLIX FIALA, Neuchâtel

Parmi les principales notions qui jouent un rôle dans la géométrie différentielle intrinsèque des surfaces, on trouve la longueur d'une courbe, l'aire d'un domaine, la courbure totale et la courbure géodésique. C'est elles qui interviennent en particulier dans la formule de Gauss-Bonnet et dans certaines inégalités isopérimétriques.

On peut développer une théorie analogue pour les surfaces polyédrales à faces triangulaires, en prenant pour la longueur d'une courbe le nombre d'arêtes dont elle se compose et pour l'aire d'un domaine le nombre de faces dont il se compose, comme l'a montré M. Ch. Blanc, en établissant quelques-unes de ces formules sous certaines hypothèses assez restrictives¹⁾. Le but du présent travail est de généraliser ces démonstrations. Pour cela nous aurons recours à une notion analogue à celle de vraie parallèle, que nous avons définie et utilisée dans des recherches antérieures²⁾.

1. Définitions

Considérons une surface polyédrale à faces triangulaires, simplement connexe et ouverte. Il s'agira soit d'un polyèdre ordinaire, soit, plus généralement, d'un plan décomposé en triangles curvilignes.

Dans ce plan \mathfrak{P} , nous considérons un ensemble infini de points, sans point d'accumulation à distance finie. Ce seront les *sommets* de notre polyèdre.

Certains de ces sommets sont reliés entre eux par des arcs sans points communs autres que leurs extrémités. Ce seront les *arêtes* de notre polyèdre.

Nous supposons qu'en chaque sommet P aboutissent $\lambda(P)$ arêtes, où $2 \leq \lambda(P) < \infty$.

Nous supposons encore que le plan se trouve ainsi décomposé en triangles curvilignes, les *faces* de notre polyèdre.

¹⁾ Ch. Blanc, Les réseaux Riemanniens. Comm. Math. Helv. 13 (1940—41), p. 54 à 67, en particulier §§ 5 et 7.

²⁾ F. Fiala, Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive. Comm. Math. Helv. 13 (1940—41), p. 293—346.

F. Fiala, Le problème des isopérimètres dans les plans de Riemann à courbure de signe constant. Comm. Math. Helv. 15 (1942—43), p. 249—264.

Une *courbe* est une suite d'arêtes

$$\widehat{P_0 P_1}, \widehat{P_1 P_2}, \dots, \widehat{P_{n-1} P_n}$$

telles que l'extrémité de chaque arête soit l'origine de la suivante. Le nombre n des arêtes est la *longueur* de la courbe.

Une courbe \mathfrak{C} est *simple*, ou sans point double, si tous les sommets P_0, P_1, \dots, P_n sont différents, sauf éventuellement P_0 et P_n ; si P_0 et P_n coïncident, la courbe est *simplement fermée*; elle divise le plan en deux parties, l'intérieur de \mathfrak{C} qui comprend un nombre fini de sommets, d'arêtes et de faces, et l'extérieur qui en comprend une infinité.

Le nombre des faces situées à l'intérieur de \mathfrak{C} est l'*aire* limitée par \mathfrak{C} . Avec M. Blanc, nous appelons *courbure* au sommet P , le nombre

$$\gamma(P) = 6 - \lambda(P). \quad (1)$$

Soit une courbe simplement fermée passant par un sommet P . Nous désignons par $\lambda_g(P)$ le nombre d'arêtes issues de P vers l'intérieur de la courbe et nous appelons *courbure géodésique*, le nombre

$$\kappa_g(P) = 2 - \lambda_g(P). \quad (2)$$

Il s'agit en fait d'une courbure géodésique intérieure et l'on pourrait de même définir une courbure géodésique extérieure, la somme des deux courbures géodésiques au point P étant d'ailleurs égale à la courbure totale en ce point. Pour des courbes ouvertes on pourrait parler d'une courbure géodésique à gauche et d'une courbure géodésique à droite.

2. Formule de Gauss-Bonnet

Considérons une courbe simplement fermée \mathfrak{C} , de longueur L et d'aire A , et désignons par \mathfrak{D} l'ensemble des sommets intérieurs à \mathfrak{C} .

Soit s le nombre des sommets intérieurs à \mathfrak{C} et S le nombre des sommets situés à l'intérieur et sur \mathfrak{C} .

On a $S = s + L$.

Soit n le nombre des arêtes intérieures à \mathfrak{C} et N le nombre des arêtes situées à l'intérieur et sur \mathfrak{C} .

On a $N = n + L$.

La formule d'Euler pour les polyèdres nous apprend que

$$A - N + S = 1 \quad (3) \quad \text{d'où l'on tire} \quad A - n + s = 1. \quad (3)'$$

On obtient une autre relation en considérant l'ensemble des arêtes. Sur chaque face il y en a trois, mais en les comptant de cette manière on compte deux fois les arêtes intérieures et une fois les arêtes situées sur \mathfrak{C} . D'où

$$3A = 2N - L \quad (4) \quad \text{et} \quad 3A = 2n + L. \quad (4)'$$

Des formules (3) et (4), on déduit facilement les formules

$$3S - N - L = 3 \quad (5) \quad \text{et} \quad 3s - n + L = 3. \quad (5)'$$

Nous sommes maintenant à même de démontrer une formule tout à fait analogue à celle de Gauss-Bonnet, à savoir

$$\sum_{\mathfrak{D}} \gamma(P) + \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) = 6, \quad (6)$$

où la première somme est à étendre à tous les sommets de \mathfrak{D} , et la seconde à tous les sommets de \mathfrak{C} .

En effet, le membre de gauche est égal, en vertu des définitions (1) et (2), à

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathfrak{D}} (6 - \lambda(P)) + \sum_{\mathfrak{C}} (2 - \lambda_g(P)) \\ &= 6s + 2L - 2n \\ &= 6, \quad \text{à cause de la formule } (5)'. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par \mathfrak{C}' une courbe simplement fermée située à l'intérieur de \mathfrak{C} , et par \mathfrak{D}^* l'ensemble des sommets situés à l'intérieur de \mathfrak{C} mais non à l'intérieur de \mathfrak{C}' , on a

$$\sum_{\mathfrak{D}^*} \gamma(P) + \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) - \sum_{\mathfrak{C}'} \kappa_g(P) = 0. \quad (7)$$

Interprétation de $\sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P)$:

A. Dans le cas où toutes les arêtes intérieures issues de \mathfrak{C} aboutissent à une courbe simplement fermée \mathfrak{C}' de longueur L' , on a, en désignant par a le nombre des faces situées entre \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' ,

$$a = \sum_{\mathfrak{C}} \lambda_g(P) = 2L - \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P), \quad (8)$$

$$a = L + L'. \quad (9)$$

D'où l'on tire

$$\sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) = L - L'. \quad (10)$$

Dans cette formule, la courbure géodésique apparaît comme la variation de la longueur de la courbe par rapport à une courbe que l'on pourrait appeler parallèle; c'est cette interprétation qui avait été utilisée dans un cas particulier par M. Blanc³⁾.

On peut établir directement ces formules ou les démontrer comme cas particulier des formules suivantes.

B. Dans le cas général ces formules ne sont plus exactes, mais peuvent être remplacées par des inégalités.

Considérons l'ensemble des arêtes intérieures à \mathfrak{C} et ayant au moins un sommet sur \mathfrak{C} . Leur nombre est égal à

$$n = \sum_{\mathfrak{C}} \lambda_g(P) - d = 2L - \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) - d \quad (11)$$

où d désigne le nombre d'arêtes ayant leurs deux extrémités sur \mathfrak{C} .

Considérons aussi l'ensemble des faces intérieures à \mathfrak{C} et ayant au moins un sommet sur \mathfrak{C} . Soit a leur nombre.

Ces arêtes et ces faces (les sommets sont exclus) forment un complexe connexe \mathfrak{F} ; soit c son ordre de connexion. Comme les n arêtes décomposent \mathfrak{F} en a faces, évidemment simplement connexes, on a

$$a = n - (c - 2)$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (11)

$$a = \sum_{\mathfrak{C}} \lambda_g(P) - d - c + 2. \quad (12)$$

Dès que $c \geq 2$ on en déduit l'inégalité fondamentale

$$a \leq \sum_{\mathfrak{C}} \lambda_g(P) = 2L - \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P). \quad (13)$$

Si $c = 1$, le complexe \mathfrak{F} est simplement connexe et consiste en un polygone décomposé en triangles par certaines de ses diagonales. Dans ce cas, la formule (13) est encore valable, car en général $d > 0$, *sauf si \mathfrak{F} se réduit à un seul triangle.*

Considérons maintenant l'ensemble des arêtes situées sur une face au moins de \mathfrak{F} . Il y a

1. les L arêtes situées sur \mathfrak{C} ,
2. les n arêtes appartenant à \mathfrak{F} , situées sur deux faces de \mathfrak{C} ,

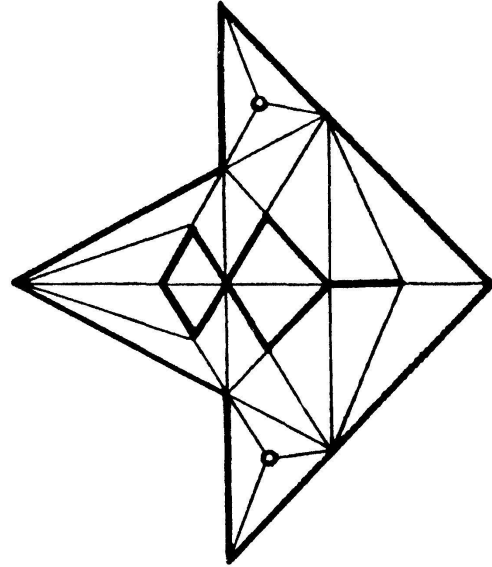
³⁾ Loc. cit. p. 64.

3. e arêtes n'ayant aucune extrémité sur \mathfrak{C} et situées sur deux faces de \mathfrak{F} (e peut être nul),

4. L' arêtes n'ayant aucune extrémité sur \mathfrak{C} et situées sur une seule face de \mathfrak{F} ; elles forment avec \mathfrak{C} la frontière de \mathfrak{F} constituant un certain nombre i de courbes simplement fermées, que nous appelons la *parallèle intérieure* à \mathfrak{C} , et que nous désignons par \mathfrak{C}' . (Il se peut que \mathfrak{C}' n'existe pas et que $L' = 0$.)

Par exemple, dans notre figure on a :

$$\begin{array}{ll} L = 8 & e = 1 \\ \sum_{\mathfrak{C}} \lambda_g(P) = 26 & L' = 8 \\ \mathfrak{C} \quad d = 2 & a = 22 \\ n = 24 & c = 4 \\ & i = 2 \end{array}$$



Si nous comptons maintenant le nombre total des arêtes, en les comptant autant de fois qu'elles apparaissent sur une des faces de \mathfrak{F} , nous obtenons

$$3a = L + L' + 2n + 2e. \quad (14)$$

Des formules (12) et (14), on déduit facilement

$$0 = L + L' - n + 2e + 3(c - 2)$$

et

$$0 = L' - L + \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) + d + 2e + 3(c - 2) \quad (15)$$

d'où l'on tire, si $c \geq 2$, la seconde inégalité fondamentale

$$\sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) \leq L - L'. \quad (16)$$

Si $c = 1$, cette formule reste valable dès que $d \geq 3$, c'est-à-dire si \mathfrak{C} est un polygone à 6 côtés au moins.

3. Inégalités isopérimétriques

Soit \mathfrak{C} une courbe simplement fermée située sur un polyèdre. Supposons que pour toute courbe \mathfrak{C}' simplement fermée située à l'intérieur de \mathfrak{C} (\mathfrak{C} comprise) on ait

$$\sum_{\mathfrak{C}'} \kappa_g(P) \geq k \quad (17)$$

où k est une constante comprise entre 0 et 8.

On peut démontrer alors qu'entre la longueur L de \mathfrak{C} et l'aire A limitée par \mathfrak{C} existe l'inégalité isopérimétrique

$$L^2 \geq kA . \quad (18)$$

Pour la démonstration nous envisagerons trois cas possibles.

1. \mathfrak{C} ne contient aucun sommet intérieur et limite donc un polygone décomposé en triangles par certaines de ses diagonales.

Dans ce cas, on a

$$L = A + 2$$

et

$$L^2 = (A + 2)^2 = 8A + (A - 2)^2$$

d'où l'on déduit la formule (18), car

$$L^2 \geq 8A \geq kA .$$

2. \mathfrak{C} contient des sommets intérieurs, mais ne possède pas de parallèle intérieure; c'est dire que $L' = 0$.

Dans ce cas

$$c \geq 2$$

et

$$A = a .$$

On déduit de (13) que

$$A \leq 2L - \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) \leq 2L - k$$

d'où l'on tire

$$kA \leq 2Lk - k^2 = L^2 - (L - k)^2$$

et la formule (18)

$$kA \leq L^2 .$$

3. \mathfrak{C} possède une parallèle intérieure \mathfrak{C}' . Celle-ci se compose d'un certain nombre i de courbes simplement fermées $\mathfrak{C}'_1, \mathfrak{C}'_2, \dots, \mathfrak{C}'_i$ de longueur L'_1, L'_2, \dots, L'_i et d'aire A'_1, A'_2, \dots, A'_i .

Supposons que la formule (18) soit satisfaite pour chacune d'elles. On en déduit

$$\begin{aligned} L'^2 &= (L'_1 + L'_2 + \dots + L'_i)^2 \\ &\geq L'^2_1 + L'^2_2 + \dots + L'^2_i \\ &\geq kA'_1 + kA'_2 + \dots + kA'_i \\ &\geq kA' \end{aligned}$$

où A' représente le nombre des faces situées à l'intérieur de l'une quelconque des courbes $\mathfrak{C}'_1, \mathfrak{C}'_2, \dots, \mathfrak{C}'_i$.

Puisque a représente le nombre des faces comprises entre \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' , on a

$$A = A' + a$$

et l'on en tire, en tenant compte de (13) et de (17)

$$\begin{aligned} kA &= kA' + ka \\ &\leq L'^2 + 2kL - k^2 \end{aligned}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$kA \leq L^2 + L'^2 - (L - k)^2.$$

En tenant compte des formules (16) et (17), on obtient bien la formule (18)

$$kA \leq L^2.$$

Nous pouvons en déduire que si notre inégalité isopérimétrique (18) n'était pas valable pour \mathfrak{C} , il devrait exister au moins une courbe \mathfrak{C}' simplement fermée intérieure à \mathfrak{C} pour laquelle la formule (18) ne serait pas non plus valable.

On pourrait alors répéter le même raisonnement et obtenir une suite de courbes $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \dots$, simplement fermées, chacune située à l'intérieur de la précédente, et pour lesquelles la formule (18) ne serait pas valable.

L'aire limitée par ces courbes décroissant, on rencontrera tôt ou tard une courbe ne possédant pas de parallèle intérieure. Or, une telle courbe appartient à l'un des cas traité sous 1. ou 2., où la validité de la formule (18) a été dûment établie. En supposant que notre inégalité isopérimétrique n'avait pas lieu, nous avons été conduits à une contradiction.

Applications.

I. Sur un polyèdre à courbure nulle, ($\lambda(P) = 6$), tel un plan décomposé en triangles équilatéraux, la formule (6) nous donne pour toute courbe simplement fermée

$$\sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) = 6.$$

On peut donc prendre dans (17), $k = 6$, et énoncer l'inégalité isopérimétrique

$$L^2 \geq 6A.$$

C'est l'analogie de l'inégalité isopérimétrique classique.

II. Sur un polyèdre à courbure non positive, ($\lambda(P) \geq 6$), on a $\sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) \geq 6$, d'où l'on déduit aussi

$$L^2 \geq 6A .$$

C'est l'analogie d'un résultat donné par Radó et Beckenbach pour les surfaces à courbure non positive⁴).

III. Sur un polyèdre à courbure négative, ($\lambda(P) \geq 7$), on a, si la courbe \mathfrak{C} contient au moins un sommet intérieur, $\sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) \geq 7$ et l'on en déduit l'inégalité isopérimétrique

$$L^2 \geq 7A$$

que nous avons déjà vérifiée lorsque \mathfrak{C} ne contient aucun sommet intérieur.

IV. Sur un polyèdre à courbure inférieure ou égale à -2 , ($\lambda(P) \geq 8$), on démontre de même l'inégalité

$$L^2 \geq 8A .$$

V. Sur un polyèdre à courbure non négative, ($\lambda(P) \leq 6$), la formule (7) nous donne

$$\sum_{\mathfrak{C}'} \kappa_g(P) \geq \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P) .$$

On peut donc prendre dans (17) $k = \sum_{\mathfrak{C}} \kappa_g(P)$ et énoncer l'inégalité

$$L^2 \geq k . A .$$

C'est l'analogie d'une formule isopérimétrique valable pour les surfaces à courbure non négative⁵).

Remarquons pour terminer que ces formules sont valables dès que les hypothèses relatives à la courbure sont réalisées à l'intérieur de la courbe \mathfrak{C} et sans supposer que celle-ci appartient à un polyèdre ouvert. La dernière toutefois peut alors devenir triviale, car k peut être négatif; lorsque l'on suppose que \mathfrak{C} appartient à un polyèdre ouvert à courbure jamais négative on a $k \geq 0$, propriété analogue à celle établie par Cohn-Vossen pour les surfaces ouvertes à courbure positive⁶) et dont la démonstration peut être faite à l'aide des parallèles extérieures à la courbe \mathfrak{C} .

(Reçu le 4 février 1946.)

⁴ Radó et Beckenbach, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933).

⁵ Voir le premier travail cité dans la note ²), p. 297.

⁶ Cohn-Vossen, Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen. Comp. Math. 2 (1935), p. 79.