Des systèmes de substitutions regulières indépendantes qui engendrent un groupe régulier.

Autor(en): **Piccard, Sophie**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **19 (1946-1947)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17340

Des systèmes de substitutions regulières indépendantes qui engendrent un groupe régulier

Par Sophie Piccard, Neuchâtel

1. *Notations.*

1.1. Soient $m \geqq 1$ et $n > 1$ deux entiers, soient 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ des substitutions régulières des éléments $1, 2, \ldots, n$. Nous désignerons par le symbole $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ le groupe engendré par les substitutions 1).

1.2. Soit G un groupe de substitutions de degré n et soit S une substitution de degré n portant sur les mêmes éléments que les substitutions de G mais ne faisant pas partie du groupe G. Nous désignerons par le symbole GS l'ensemble des substitutions TS, où T est une substitution quelconque de G, la substitution S dans le produit TS étant à effectuer en premier lieu et la substitution T en second lieu.

1.3. Soit E en unsemble et soient $a, b, c, \ldots$ des éléments. Le symbole $E = \{a, b, c, \ldots\}$ exprime que l'ensemble E se compose des éléments $a, b, c, \ldots$ indiqués entre accolades.

1.4. Soient E un ensemble et a et a' deux éléments. Le symbole $a \in E$ exprime que a est un élément de E et le symbole $a' \bar{\in} E$ exprime que a' n'est pas un élément de E.

1.5. Soient A et B deux ensembles. Le symbole $A \subset B$ exprime que A est un sous-ensemble de B, c'est-à-dire que tout élément de A fait partie de B.

1.6. Soit E un ensemble. Le symbole $\overline{\overline{E}}$ désigne la puissance de l'ensemble E.

2. *Définitions.*

2.1. Soient $m > 1$ et $n > 1$ deux entiers et soient 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ m substitutions des éléments $1, 2, \ldots, n$. Nous dirons que les substitutions 1) sont *indépendantes* si, quel que soit l'entier i $(1 \leqq i \leqq m)$, $S_i \bar{\in} (S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_m)$.

Il résulte, en particulier, de cette définition que, si les substitutions 1) sont indépendantes, aucune substitution de la suite 1) n'est une itérée d'une seconde substitution de la dite suite.

2.2. Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système de $m > 1$ substitutions indépendantes des éléments $1, 2, \ldots, n$ $(n > 1)$, soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, soit k un entier, tel que $1 \leqq k < m$ et soit 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ un système comprenant k substitutions distinctes quelconques de la suite 1). Nous appelons *domaine de connexion* des substitutions 2) tout sous-ensemble (propre ou impropre) non vide $\mathfrak{E}$ de l'ensemble E qui se compose de la totalité des éléments de certains cycles de chacune des substitutions 2), alors qu'aucun sous-ensemble propre de $\mathfrak{E}$ ne jouit de cette propriété. Quel que soit le système 2), on peut toujours décomposer l'ensemble E en un nombre fini $l \geqq 1$ de domaines de connexion $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_l$, tous ces domaines de connexion étant disjoints deux à deux, et on a $E = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \cdots + \mathfrak{E}_l$ et $\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_1 + \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_2 + \ldots + \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_l$. S'il existe un seul domaine de connexion $\mathfrak{E}$ des substitutions 2), on a évidemment $\mathfrak{E} = E$ et nous dirons, dans ce cas, que *les substitutions 2) constituent un système connexe.*

2.3. Rappelons qu'on appelle *régulier* tout groupe transitif de substitutions dont l'ordre est égal au degré.

2.4. Soit n un entier > 1, soit G un groupe régulier d'ordre et de degré n et soient $S_1, S_2, \ldots, S_m$ $m \geqq 1$ substitutions indépendantes de G. Nous dirons que ces substitutions constituent *une base* de G si $(S_1, S_2, \ldots, S_m) = G$ et si, quel que soit l'entier positif $m' < m$, aucun système de m' substitutions du groupe G n'est générateur de ce groupe. Le nombre m est un invariant du groupe G et nous dirons que *le groupe G est à base d'ordre m.*

3. *Remarque 1.* Si un groupe régulier G est à base d'ordre $m \geqq 1$, ce groupe peut contenir des systèmes de $k > m$ substitutions indépendantes. En effet, soit $\mathfrak{S}_4$ le groupe symétrique d'ordre 4. Ce groupe est, comme on sait, à base du second ordre. Ainsi, il admet pour base le couple de substitutions $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(1\ 2)$. Or, les trois substitutions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$ et $(1\ 4)$ de $\mathfrak{S}_4$ sont indépendantes.

D'après le théorème de Jordan, il existe un groupe régulier G simplement isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. Ce groupe G est à base du second ordre et les trois substitutions de G qui correspondent aux substitutions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(1\ 4)$ de $\mathfrak{S}_4$ dans l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_4$ à G sont indépendantes.

4. Soit G un groupe régulier d'ordre et de degré $n > 1$ dont les substitutions portent sur les éléments $1, 2, \ldots, n$. Alors, quels que soient les entiers i et j $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq n)$, il existe, comme on sait, une substitution et une seule du groupe G qui transforme i en j. D'autre part, G ne contient aucun sous-groupe propre transitif.

5. Soient m et n deux entiers > 1, soient 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ m substitutions régulières indépendantes des éléments $1, 2, \ldots, n$. Le but de la pré-

sente *Note* est d'établir des conditions pour que le groupe $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier.

6. *Proposition 1.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système de m substitutions régulières indépendantes. Une condition nécessaire pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, c'est que les substitutions 1) constituent un système connexe.

Démonstration. En effet, si le groupe G est régulier, il est transitif et, si le système de substitutions 1) n'était pas connexe, il engendrerait édidemment un groupe intransitif. La condition énoncée est donc bien nécessaire.

7. *Remarque 2.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système connexe de substitutions régulières indépendantes qui engendrent un groupe régulier. Alors, quel que soit l'entier positif $k < m$, k substitutions du système 1) ne sauraient jamais constituer un système connexe.

En effet, supposons le contraire et admettons qu'il existe $k < m$ substitutions 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ du système 1) qui constituent un système connexe. Soit $(S_1, S_2, \ldots, S_m) = G$ et $(S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) = G_1$. Comme, par hypothèse, le groupe G est régulier, il ne contient aucun sous-groupe propre transitif. Et comme les substitutions 2) forment un système connexe, elles engendrent évidemment un groupe transitif et, par conséquent on doit avoir $G_1 = G$. Or, nous avons supposé que $k < m$. Il existe donc au moins un indice i de la suite $1, 2, \ldots, n$ qui ne fait pas partie de la suite $i_1, i_2, \ldots, i_k$ et on a $S_i \in G_1$, ce qui est contraire à notre hypothèse que les substitutions 1) sont indépendantes. On voit donc bien que, si le groupe G est régulier, il ne saurait exister $k < m$ substitutions du système 1) qui constituent un système connexe.

8. *Remarque 3.* Soient m et n deux entiers >1, soient 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ m substitutions de degré n qui constituent un système connexe. Une condition suffisante pour que les substitutions 1) soient indépendantes, c'est que, quel que soit l'indice i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, l'ensemble des substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_m$ ne soit pas connexe.

En effet, supposons que cette condition est satisfaite. Donc, quel que soit l'indice i $(1 \leqq i \leqq m)$, le groupe $G_i = (S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_m)$ est intransitif. Or, le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ est transitif, puisque les substitutions 1) constituent un système connexe. Donc $G_i \neq G$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, m$.

Mais alors $S_i \bar{\in} G_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, puisque si, pour un indice $i (1 \leqq i \leqq m)$ on avait $S_i \in G_i$, il en résulterait que $G_i = G$, ce qui n'est pas. Donc les substitutions 1) sont bien indépendantes, c. q. f. d.

9. *Remarque 4.* La condition énoncée dans la remarque 3 est aussi nécessaire pour que les substitutions 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ soient indépendantes, si le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ est régulier, d'après la remarque 2.

10. *Définition.* Soient 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ $m \geqq 2$ substitutions indépendantes des éléments $1, 2, \ldots, n$. Nous dirons que ces m substitutions jouissent de la *propriété* π si elles constituent un système connexe, alors qu'aucun système composé d'un nombre inférieur à m de substitutions de 1) n'est connexe.

11. D'après la proposition 1 et la remarque 2, une condition nécessaire pour que m substitutions indépendantes 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ engendrent un groupe régulier, c'est que les substitutions 1) jouissent de la propriété π.

12. *Proposition 2.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système de $m \geqq 2$ substitutions régulières indépendantes qui jouit de la propriété π. Alors, quel que soit l'entier k $(1 \leqq k < m)$, quelles que soient les k substitutions 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ du système 1), quel que soit le domaine de connexion $\mathfrak{C}$ de ces k substitutions et quelle que soit la substitution S_i du système 1) qui ne fait pas partie de 2), une condition nécessaire pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, c'est que S_i ne transforme aucun élément de l'ensemble $\mathfrak{C}$ en un élément du même ensemble.

Démonstration. En effet, soit 1) un système de substitutions indépendantes qui jouit de la propriété π, soit k un entier, tel que $1 \leqq k < m$, soit 2) un ensemble formé de k substitutions quelconques du système 1) et soit $\mathfrak{C}$ un domaine de connexion des substitutions 2). Alors, quels que soient les deux éléments (pas nécessairement distincts) a et b de $\mathfrak{C}$, il existe une substitution T du groupe $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k})$ qui transforme a en b. Or, quelle que soit la substitution S_i de 1) que ne fait pas partie de 2), on a $S_i \bar{\in} G_1$ puisque les substitutions 1) sont, par hypothèse, indépendantes. Donc $S_i \neq T$. Donc, s'il existait une substitution S_i de 1) que ne fasse pas partie de 2) et qui transforme a en b, deux substitutions distinctes (au moins) du groupe G, savoir T et S_i, transformeraient a en b et le groupe G ne serait pas régulier. La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

13. *Remarque 5.* Il résulte, en particulier, de la proposition 2 que, si le système de substitutions 1) dont il est question dans l'énoncé de cette proposition engendre un groupe régulier, quels que soient les indices i et j $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq m,\ i \neq j)$, et quel que soit le cycle C de la sub-

stitution S_j, la substitution S_i ne saurait transformer un élément de C en un élément du même cycle.

14. *Proposition 3.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système de $m \geqq 2$ substitutions régulières indépendantes qui jouit de la propriété π. Alors quel que soit l'entier positif $k < m$ et quelles que soient les k substitutions 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ du système 1), si le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ est régulier, tous les domaines de connexion du système 2) sont d'égale puissance.

Démonstration. Soit 1) un système de substitutions indépendantes qui jouit de la propriété π et supposons qu'il existe un entier positif $k < m$ et k substitutions 2) du système 1), telles que deux domaines de connexion $\mathfrak{E}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu\}$ et $\mathfrak{E}_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu\}$ des substitutions 2) sont de puissances différentes. On a donc $\mu = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_1$, $\nu = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_2$ et $\mu \neq \nu$. Soit, par exemple, $\mu > \nu$.

Comme $\mathfrak{E}_1$ est un domaine de connexion des substitutions 2), quel que soit l'élément α_i de $\mathfrak{E}_1$, il existe au moins une substitution du groupe $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k})$ qui fait passer de α_1 à α_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$. Soit T_i une telle substitution. Toute substitution du groupe G_1 fait passer de β_1 à un élément de $\mathfrak{E}_2$, puisque $\mathfrak{E}_2$ est un domaine de connexion des substitutions 2). Donc, en particulier, chacune des substitutions T_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ fait passer de β_1 à un élément de $\mathfrak{E}_2$. Et, comme $\mu > \nu$, il existe (au moins) un couple d'indices i' et $i'' \neq i'$ de la suite $1, 2, \ldots \mu$, tels que $T_{i'}$ et $T_{i''}$ transforment β_1 en un même élément β_j de $\mathfrak{E}_2$. Or, $T_{i'} \neq T_{i''}$ puisque $T_{i'}$ fait passer de α_1 à $\alpha_{i'}$, $T_{i''}$ fait passer de α_1 à α_i'' et que $i' \neq i''$. Donc deux substitutions différentes $T_{i'}$ et $T_{i''}$ du groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ transforment β_1 en β_j et, par suite, le groupe G n'est pas régulier. On démontre de façon tout à fait analogue que le groupe G ne saurait être régulier si $\mu < \nu$. La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

15. *Définitions.*

15.1. Soient m et n deux entiers > 1 et soient 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ m substitutions de degré n pour lesquelles il existe un entier $\mu > 1$, tel que tout domaine de connexion des substitutions 1) est d'ordre μ. Nous dirons alors que les substitutions 1) ont un ordre de connexion fixe, égal à μ.

Exemple. Soit $S_1 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12)$ et soit $S_2 = (2\ 3)(4\ 5)(6\ 1)(8\ 9)(10\ 11)(12\ 7)$. Ces deux substitutions ont pour domaines de connexion les deux ensembles $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Elles ont donc un ordre de connexion fixe égal à six.

15.2. Soient m et n deux entiers >1 et soient 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ m substitutions régulières de degré n, qui constituent un système connexe. Nous dirons que le système de substitutions 1) est *régulièrement connexe* si, quel que soit l'entier k $(1 \leqq k < m)$ et quelles que soient les k substitutions 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ du système 1), il existe un entier positif μ dépendant de $i_1, i_2, \ldots, i_k$, diviseur de n et tel que tout domaine de connexion des substitutions 2) est d'ordre μ.

16. Il ressort de la proposition 3 qu'une condition nécessaire pour qu'un système 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ de substitutions régulières de degré n jouissant de la propriété π engendre un groupe régulier, c'est que ce système 1) soit régulièrement connexe.

17. *Proposition 4.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulièrement connexe de substitutions régulières indépendantes de degré n qui jouit de la propriété π. Alors une condition nécessaire pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, c'est que, quel que soit le système 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ formé de $k(1 \leqq k < m)$ substitutions du système 1), dont les domaines de connexion sont les ensembles 3) $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_l (l > 1)$, et quelle que soit la substitution S_i du système 1) qui ne fait pas partie de 2), si S_i transforme les éléments de l'un des domaines de connexion $\mathfrak{E}_j$ $(1 \leqq j \leqq l)$ en éléments de r autres domaines 3), alors S_i transforme les éléments de chacun des domaines 3) en éléments de r autres domaines 3).

Démonstration. En effet, soit 1) un système régulièrement connexe de substitutions régulières indépendantes de degré n qui jouit de la propriété π et supposons que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ est régulier. Soit 2) un système de $k < m$ substitutions de la suite 1), dont les domaines de connexion sont les ensembles 3).

D'après la proposition 3, on a $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_1 = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_2 = \cdots = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_l$.

Soit S_i une substitution quelconque du système 1) qui ne fait pas partie du système 2).

D'après la proposition 2, quel que soit l'indice $j = 1, 2, \ldots l$, la substitution S_i ne saurait transformer un élément de $\mathfrak{E}_j$ en un élément du même ensemble.

Soit r un entier $\geqq 1$ et $\leqq l - 1$ et soit $\mathfrak{E}_j (1 \leqq j \leqq l)$ un ensemble de la suite 3), tel que S_i transforme les éléments de $\mathfrak{E}_j$ en éléments de r ensembles de la suite 3), différente de $\mathfrak{E}_j$; soit, d'autre part, $\mathfrak{E}_{j'}$ $(j' \neq j)$ un ensemble quelconque du système 3), différent de $\mathfrak{E}_j$, et soit r' le nombre d'ensembles ($\neq \mathfrak{E}_{j'}$) du système 3) en éléments desquels S_i transforme les éléments de $\mathfrak{E}_{j'}$. Il s'agit de prouver que $r = r'$. Supposons le contraire et soit, par exemple, $r' < r$.

Transformons toutes les substitutions du système 2) par la substitution S_i et soit $S'_{i_h} = S_i S_{i_h} S_i^{-1}$, $h = 1, 2, \ldots, k$.

Les substitutions 2′) $S'_{i_1}, S'_{i_2}, \ldots, S'_{i_k}$ ont pour domaines de connexion les ensembles 3′) $\mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \ldots, \mathfrak{E}'_l$, tels que $\mathfrak{E}'_h$ se compose des éléments que S_i substitue aux éléments de $\mathfrak{E}_h$, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, l$.

D'après l'hypothèse faite, l'ensemble $\mathfrak{E}'_j$ comprend des éléments de r domaines 3), autres que $\mathfrak{E}_j$, et $\mathfrak{E}'_{j'}$ comprend des éléments de r' domaines 3), autres que $\mathfrak{E}_{j'}$.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_r$ r éléments de $\mathfrak{E}'_j$ appartenant à r ensembles différents du système 3) et soit b un élément quelconque de $\mathfrak{E}'_{j'}$. Comme $\mathfrak{E}'_j$ est un domaine de connexion des substitutions 2′), il existe, pour tout indice $h (1 \leqq h \leqq r)$, une substitution T_h du groupe engendré par les substitutions 2′) qui transforme a_1 en a_h et, comme $\mathfrak{E}'_{j'}$ est aussi un domaine de connexion des substitutions 2′), chacune des substitutions T_h transforme b en un élément de l'ensemble $\mathfrak{E}'_{j'}$. Or, comme $\mathfrak{E}'_{j'}$ ne contient que des éléments de r' ensembles de la suite 3) et que $r' < r$, il existe au moins deux indices h' et $h'' \neq h'$ de la suite $1, 2, \ldots, r$, tels que $T_{h'}$ aussi bien que $T_{h''}$ transforment b en éléments d'un même ensemble du système 3). Supposons que $T_{h'}$ transforme b en b' et que $T_{h''}$ transforme b en b'' et soit $\mathfrak{E}_s$ l'ensemble du système 3), tel que $b' \in \mathfrak{E}_s$ et $b'' \in \mathfrak{E}_s$.

La substitution $T = T_{h''} T_{h'}^{-1}$ transforme l'élément $a_{h'}$ d'un ensemble du système 3) en l'élément $a_{h''}$ d'un autre ensemble du système 3), alors qu'elle transforme l'élément b' de l'ensemble $\mathfrak{E}_s$ du système 3) en l'élément b'' du même ensemble. Donc la substitution T ne saurait appartenir au groupe $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k})$, car toute substitution de ce groupe transforme tous les éléments de chaque ensemble du système 3) en éléments du même ensemble et, par conséquent elles ne sauraient transformer $a_{h'}$ en $a_{h''}$. Or, comme b' et b'' font partie d'un même ensemble $\mathfrak{E}_s$ du système 3) et que cet ensemble est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution U du groupe G_1 qui fait passer de b' à b''. Il existe donc deux substitutions différentes U et T du groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ qui font passer de b' à b'' et par suite, le groupe G ne saurait être régulier, ce qui est contraire à notre hypothèse sur G. On ne saurait donc avoir $r' < r$. Par un raisonnement tout à fait analogue, on démontre qu'on ne saurait avoir $r' > r$. Il s'ensuit que, si G est un groupe régulier, on a $r = r'$. Cela étant quel que soit l'ensemble $\mathfrak{E}_{j'}$ de la suite 3), la condition énoncée est bien nécessaire, c. q. f. d.

18. *Définitions.*

18.1. Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulièrement connexe de $m \geqq 2$ substitutions indépendantes qui jouit de la propriété π. Nous dirons que le système 1) jouit de la *propriété P* si, quel que soit le système 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ formé de $k<m$ substitutions du système 1) et quelle que soit la substitution S_i du système 1) que ne fait pas partie de 2), il existe un entier r, dépendant de $i, i_1, i_2, \ldots, i_k$, tel que S_i transforme les éléments de chaque domaine de connexion $\mathfrak{C}$ des substitutions 2) en éléments de r domaines de connexions des substitutions 2), autres que $\mathfrak{C}$, et nous dirons que la substitution S_i jouit par rapport au système des substitutions 2) de la *propriété* P_r.

18.2. Il ressort de la définition 18.1 que, si le système de substitutions 1) jouit de la propriété P, quels que soient les indices i et j $(1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq m$, $i \neq j)$, il existe un entier r dépendant de i et de j, tel que S_i transforme les éléments de chaque cycle C de S_j en éléments de r cycles de S_j, autres que C. Nous dirons alors que S_i jouit par rapport à S_j de la propriété p_r.

19. D'après la proposition 4, une condition nécessaire pour qu'un système régulièrement connexe de substitutions régulières qui jouit de la propriété π engendre un groupe régulier, c'est que ce système jouisse également de la propriété P.

20. *Proposition 5.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulièrement connexe de m substitutions régulières indépendantes de degré n, jouissant des propriétés π et P. Une condition nécessaire pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier c'est que, quel que soit le système 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ forme de $k<m$ substitutions de la suite 1) et quelle que soit la substitution S_i de 1) qui ne fait pas partie de 2), il existe un entier positif ϱ dépendant de S_i et du système 2), tel que, quel que soit le domaine de connexion $\mathfrak{C}$ des substitutions 2), si S_i transforme au moins un élément de $\mathfrak{C}$ en un élément d'un second domaine de connexion $\mathfrak{C}'$ des substitutions 2), alors S_i transforme ϱ éléments de $\mathfrak{C}$ et ϱ seulement en éléments de $\mathfrak{C}'$.

Démonstration. Soit 1) un système de m substitutions qui satisfont aux conditions de la proposition 5 et qui engendrent un groupe régulier G, soit 2) un système quelconque de $k<m$ substitutions de 1), soit S_i une substitution de 1) qui ne fait pas partie de 2), soient 3) $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_l$ les domaines de connexion des substitutions 2), soit $\mathfrak{C}_j$ un ensemble du système 3), tel que S_i transforme au moins un élément de l'ensemble $\mathfrak{C}_1$

en un élément de $\mathfrak{E}_j$, soit ϱ le nombre total d'éléments de $\mathfrak{E}_1$ que S_i transforme en éléments de $\mathfrak{E}_j$ et soit j' un nombre quelconque de la suite $1, 2, \ldots, l$. Comme le groupe G est régulier, d'après la proposition 2, S_i ne saurait transformer un élément de $\mathfrak{E}_{j'}$ en un élément du même ensemble. Soit $\mathfrak{E}_{j''}$ $(j'' \neq j')$ un quelconque des domaines 3), tels que S_i transforme au moins un élément de $\mathfrak{E}_{j'}$ en un élément de $\mathfrak{E}_{j''}$ et soit ϱ' le nombre total d'éléments de $\mathfrak{E}_{j'}$ que S_i transforme en éléments de $\mathfrak{E}_{j''}$. Montrons que $\varrho' = \varrho$. En effet, supposons le contraire et soit, par exemple, $\varrho' < \varrho$.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ les éléments de $\mathfrak{E}_1$ que S_i transforme en éléments de $\mathfrak{E}_j$ et soit b_h l'élément de $\mathfrak{E}_j$ que S_i substitue à a_h, $h = 1, 2, \ldots, \varrho$. Soient, d'autre part, $c_1, c_2, \ldots, c_{\varrho'}$ les éléments de $\mathfrak{E}_{j'}$ que S_i transforme en éléments de $\mathfrak{E}_{j''}$ et soit d_h l'élément de $\mathfrak{E}_{j''}$ que S_i substitue à c_h, $h = 1, 2, \ldots, \varrho'$.

Soit 2') $S'_{i_1}, S'_{i_2}, \ldots, S'_{ik}$ la suite formée des substitutions $S'_{ih} = S_i S_{i_h} S_i^{-1}$, $h = 1, 2, \ldots, k$, et soient 3') $\mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \ldots, \mathfrak{E}'_l$ les domaines de connexion des substitutions 2'), où $\mathfrak{E}'_h$ est l'ensemble des éléments que S_i substitue aux éléments de $\mathfrak{E}_h$, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, l$.

D'après ce qui précède, $\mathfrak{E}'_1$ contient les éléments $b_1, b_2, \ldots, b_\rho$ de $\mathfrak{E}_j$ et ne contient pas d'autres éléments de $\mathfrak{E}_j$, alors que $\mathfrak{E}'_{j'}$ contient les éléments $d_1, d_2, \ldots, d_{\varrho'}$ de $\mathfrak{E}_{j''}$ et ne contient pas d'autres éléments de $\mathfrak{E}_{j''}$. Comme $\mathfrak{E}'_1$ est un domaine de connexion des substitutions 2'), il existe, pour tout entier h de la suite $1, 2, \ldots, \varrho$, une substitution U_h du groupe $G'_1 = (S'_{i_1}, S'_{i_2}, \ldots, S'_{ik})$ qui fait passer de b_1 à b_h et, comme $\mathfrak{E}'_{j'}$ est aussi un domaine de connexion des substitutions 2'), chacune des substitutions U_h transforme d_1 en un élément de $\mathfrak{E}'_{j'}$. Comme le groupe G est régulier, il ne saurait contenir deux substitutions différentes qui transforment d_1 en un même nombre de la suite $1, 2, \ldots, n$. Et, comme $\varrho' < \varrho$ et que $d_1, d_2, \ldots, d_{\rho'}$ sont les seuls éléments de l'ensemble $\mathfrak{E}_{j''}$ qui appartiennent à $\mathfrak{E}'_{j'}$, il s'ensuit qu'il existe un indice $h (1 \leqq h \leqq \varrho)$, tel que U_h transforme d_1 en un élément e de la suite $1, 2, \ldots, n$ qui $\bar{\in}\, \mathfrak{E}_{j''}$.

Or, comme $b_1 \in \mathfrak{E}_j$ et $b_h \in \mathfrak{E}_j$ et que $\mathfrak{E}_j$ est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution V du groupe $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{ik})$ qui fait passer de b_1 à b_h. Or, cette substitution V transforme l'élément d_1 de $\mathfrak{E}_{j''}$ en un élément d'_1 de $\mathfrak{E}_{j''}$ puisque $\mathfrak{E}_{j''}$ est un domaine de connexion des substitutions 2). Mais alors $V \neq U_h$ et il existe deux substitutions distinctes du groupe G qui transforment b_1 en b_h, ce qui est impossible, si le groupe G est régulier. On ne saurait donc avoir $\varrho' < \varrho$. De façon tout à fait analogue, on démontre qu'on ne saurait avoir $\varrho' > \varrho$ et par conséquent, si le groupe G est régulier, on a bien $\varrho = \varrho'$. La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

21. *Remarque 5.* On voit sans peine que le nombre ϱ dont il est question dans l'énoncé de la proposition 5 est un diviseur du degré n des substitutions du système 1).

22. *Définition.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulièrement connexe de $m > 1$ substitutions régulières de degré n, qui jouit des propriétés π et P. Si, quel que soit le système 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ formé de $k < m$ substitutions du système 1) et quelle que soit la substitution S_i du système 1) qui ne fait pas partie de 2), il existe un entier fixe ϱ dépendant de $i, i_1, i_2, \ldots, i_k$ et tel que, si S_i transforme au moins un élément d'un domaine de connexion $\mathfrak{C}$ du système 2) en un élément d'un autre domaine de connexion $\mathfrak{C}'$ de 2), alors S_i transforme ϱ éléments et ϱ seulement de $\mathfrak{C}$ en éléments de $\mathfrak{C}'$, nous dirons que *le système* 1) *jouit de la propriété Q* et que *la substitution S_i jouit par rapport au système* 2) *de la propriété Q_ϱ.*

23. Il ressort de la proposition 5 qu'une condition nécessaire pour qu'un système régulièrement connexe de substitutions qui jouit des propriétés π et P engendre un groupe régulier, c'est que ce système jouisse aussi de la propriété Q.

24. *Corollaire 1.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système de substitutions défini dans l'énoncé de la proposition 5 et qui jouit de la propriété Q. Alors, si le groupe G est régulier, quel que soit le système 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ formé de $k < m$ substitutions de 1) et quelle que soit la substitution S_i de 1) qui ne fait pas partie de 2), il existe trois entiers positifs μ, r et ϱ, tels que $\mu = r\varrho$, que μ est l'ordre de connexion du système de substitutions 2) et que S_i jouit par rapport au système 2) des propriétés P_r et Q_ϱ.

25. *Proposition 6.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulièrement connexe de substitutions régulières indépendantes de degré n qui jouit des propriétés π, P et Q. Alors une condition nécessaire pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, c'est que, quel que soit le système 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ formé de $k < m$ substitutions du système 1), le groupe $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k})$ soit d'ordre égal à la puissance commune à tous les domaines de connexion du système 2).

Démonstration. Soit 1) un système de substitutions jouissant des propriétés énumérées dans l'énoncé de la proposition 6 et supposons que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ est régulier. Soit 2) un système quelconque formé de $k<m$ substitutions de 1) et soient $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_l$ les domaines de connexion des substitutions 2). Alors, comme le système 1) jouit de la propriété π et que $k<m$, on a $l>1$ et, comme le système 1) est régulièrement connexe, il existe un entier μ, tel que

$$\mu = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_1 = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_2 = \cdots = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_l \; .$$

Soit i un indice quelconque de la suite $1, 2, \ldots, l$ et soient $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\mu}$ les éléments de $\mathfrak{E}_i$. Comme $\mathfrak{E}_i$ est un domaine de connexion du système 2), il existe, pour tout indice j, tel que $1 \leqq j \leqq \mu$, au moins une substitution du groupe $G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_l})$ qui fait passer de a_{i1} à a_{ij}. Il s'ensuit que le groupe G_1 est d'ordre $\geqq \mu$. Montrons que l'ordre μ' de G_1 ne saurait être supérieur à μ. En effet, supposons le contraire. Mais alors, comme $\mathfrak{E}_i$ est un domaine de connexion des substitutions 2), toute substitution du groupe G_1 transforme a_{i1} en un élément de l'ensemble $\mathfrak{E}_i$ et, comme $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_i = \mu < \mu'$, deux substitutions au moins du groupe G_1 (donc aussi du groupe G, puisque $G_1 \subset G$) transforment a_{i1} en un même élément de l'ensemble $\mathfrak{E}_i$, ce qui est impossible, si le groupe G est régulier. On a donc bien $\mu' = \mu$, si le groupe G est régulier, c. q. f. d.

26. *Remarque 6.* Il résulte de la proposition 6 que, si 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ est un système régulièrement connexe de substitutions indépendantes qui jouit des propriétés π, P et Q et qui engendre un groupe régulier, quelles que soient les substitutions 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ $(1 \leqq k < m)$ du système 1) et quel que soit le domaine de connexion $\mathfrak{E}$ des substitutions 2), si l'on désigne par S'_{i_h} la substitution comprenant l'ensemble des cycles de S_{i_h} composés des éléments de $\mathfrak{E}$, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, k$, alors l'ensemble des substitutions $S'_{i_1}, S'_{i_2}, \ldots, S'_{i_k}$ des éléments de $\mathfrak{E}$ constitue un groupe régulier d'ordre et de degré égal à la puissance de $\mathfrak{E}$.

27. *Proposition 7.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulièrement connexe de substitutions régulières indépendantes qui jouit des propriétés π, P et Q. Une condition nécessaire pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, c'est que, quel que soit le système 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ formé de $k<m$ substitutions du système 1), dont les domaines de connexion sont les ensembles 3) $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_l$, et quelle que soit la substitution S_i du système 1) qui ne fait pas partie de 2):

a) Si un cycle de la substitution S_i contient au maximum un élément de l'ensemble $\mathfrak{E}_j$, quel que soit $j = 1, 2, \ldots, l$, tout cycle de S_i contient au maximum un élément de $\mathfrak{E}_j$, quel que soit $j = 1, 2, \ldots, l$.

b) Si un cycle $C = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$ de S_i contient (au moins) deux éléments d'un même ensemble $\mathfrak{E}_j$ $(1 \leqq j \leqq l)$ et si λ est le plus petit entier positif, tel que les deux éléments a_α et $a_{\alpha+\lambda}$ de C font partie d'un même ensemble de la famille 3) pour une valeur au moins de $\alpha = 1, 2, \ldots, t$, alors quel que soit le cycle $C' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_t)$ de S_i (distinct ou non de C) et quel que soit l'indice β $(1 \leqq \beta \leqq t)$, les éléments $a'_\beta, a'_{\beta+1}, \ldots, a'_{\beta+\lambda-1}$ de C' font partie de λ ensembles différents du système 3), alors que a'_β et $a'_{\beta+\lambda}$ *) font partie d'un même ensemble de la famille 3).

Démonstration. Supposons que le groupe G est régulier.

a) Soit $C = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$ un cycle de S_i qui contient au plus un élément de l'ensemble $\mathfrak{E}_j$, quel que soit $j = 1, 2, \ldots, l$, et soit $C' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_t)$ un cycle quelconque de S_i (différent de C ou non). Il s'agit de montrer que deux éléments de C' ne sauraient faire partie d'un même ensemble de la famille 3).

En effet, supposons le contraire et soient a'_α et a'_β $(1 \leqq \alpha < \beta \leqq t)$ deux éléments de C' qui font partie d'un même ensemble $\mathfrak{E}_j$ de la famille 3). Alors la substitution $S_i^{\beta-\alpha}$ fait passer de l'élément a'_α de $\mathfrak{E}_j$ à l'élément a'_β du même ensemble $\mathfrak{E}_j$. Mais comme, par hypothèse, les éléments de C font partie de t ensembles différents de la famille 3), il existe deux indices j' et j'', tels que $1 \leqq j' \leqq l$, $1 \leqq j'' \leqq l$, $j' \neq j''$, $a_1 \in \mathfrak{E}_{j'}$, $a_{1+\beta-\alpha} \in \mathfrak{E}_{j''}$. Donc la substitution $S_i^{\beta-\alpha}$ fait passer de l'élément a_1 de $\mathfrak{E}_{j'}$ à l'élément $a_{1+\beta-\alpha}$ de $\mathfrak{E}_{j''}$ et, par conséquent, la substitution $S_i^{\beta-\alpha}$ ne fait pas partie du groupe G_1 engendré par les substitutions 2) dont $\mathfrak{E}_{j'}$ et $\mathfrak{E}_{j''}$ sont deux domaines de connexion. Mais, comme $\mathfrak{E}_j$ est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution T du groupe G_1 qui fait passer de l'élément a'_α de $\mathfrak{E}_j$ à l'élément a'_β du même ensemble et, d'après ce qui précède, $T \neq S_i^{\beta-\alpha}$. Il existe donc deux substitutions distinctes $S_i^{\beta-\alpha}$ et T du groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ qui transforment a'_α en a'_β, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que le groupe G est régulier.

Donc C' ne saurait contenir deux éléments d'un même ensemble $\mathfrak{E}_j$ quel que soit $j = 1, 2, \ldots, l$, c. q. f. d.

b) Soit $C = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$ un cycle de S_i qui contient deux éléments au moins d'un même ensemble du système 3). Soit λ le plus petit entier positif, tel qu'il existe un indice α $(1 \leqq \alpha \leqq t)$ et un indice j $(1 \leqq j \leqq l)$, tels que les deux éléments a_α et $a_{\alpha+\lambda}$ de C font partie de l'ensemble $\mathfrak{E}_j$ et soit $C' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_t)$ un cycle quelconque de S_i (distinct ou non de C).

La substitution S_i^λ transforme l'élément a_α de $\mathfrak{E}_j$ en l'élément $a_{\alpha+\lambda}$ du

*) où $\beta + \lambda$ doit être remplacé par $\beta + \lambda - t$, si $\beta + \lambda > t$.

même ensemble et, comme $\mathfrak{E}_j$ est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution T du groupe G_1 qui transforme a_α en $a_{\alpha+\lambda}$. Et comme le groupe G est, par hypothèse, régulier, on doit avoir $S_i^\lambda = T$. Donc $S_i^\lambda \in G_1$.

Or, quel que soit l'élément a'_β du cycle C', la substitution S_i^λ transforme a'_β en $a'_{\beta+\lambda}$ et, comme $S_i^\lambda \in G_1$, cette substitution transforme tout élément d'un ensemble 3) en un élément du même ensemble. Donc a'_β et $a'_{\beta+\lambda}$ font nécessairement partie d'un même ensemble du système 3). Mais les éléments $a'_\beta, a'_{\beta+1}, \ldots, a'_{\beta+\lambda-1}$ font nécessairement partie de λ ensembles différents du système 3). En effet, supposons le contraire et supposons, par exemple, que $a'_{\beta+\mu}$ et $a'_{\beta+\nu}$ $(\beta \leqq \beta + \mu < \beta + \nu \leqq \beta + \lambda - 1)$ font partie d'un même ensemble $\mathfrak{E}_{j'}$ du système 3). Alors la substitution $S_i^{\nu-\mu}$ transforme l'élément $a'_{\beta+\mu}$ de $\mathfrak{E}_{j'}$ en l'élément $a'_{\beta+\nu}$ du même ensemble, mais, d'après la définition du nombre λ, $S_i^{\nu-\mu}$ transforme l'élément a_α de $\mathfrak{E}_j$ en l'élément $a_{\alpha+\nu-\mu}$ qui $\bar{\in} \mathfrak{E}_j$. Donc $S_i^{\nu-\mu} \bar{\in} G_1$. Or, comme $\mathfrak{E}_{j'}$ est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution T du groupe G_1 qui fait passer, elle aussi, de $a'_{\beta+\mu}$ à $a'_{\beta+\nu}$. Mais T transforme a_α en un élément de $\mathfrak{E}_j$ de sorte que $T \neq S_i^{\nu-\mu}$. Ainsi deux substitutions différentes $S_i^{\nu-\mu}$ et T du groupe G transforment $a'_{\beta+\mu}$ en $a'_{\beta+\nu}$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que le groupe G est régulier. On voit donc que les nombres $a'_\beta, a'_{\beta+1}, \ldots, a'_{\beta+\lambda-1}$ font bien partie de λ ensembles différents de la suite 3). La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

28. *Proposition* 8. Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulièrement connexe de substitutions régulières indépendantes qui jouit des propriétés π, P et Q et soient S_i et S_j deux substitutions quelconques du système 1). Une condition nécessaire pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, c'est qu'il existe deux entiers positifs r et μ *), tels que $S_i\, S_j^r\, S_i^{-1} = S_j^\mu$.

Démonstration. Supposons que le groupe G est régulier. Comme le système 1) jouit de la propriété P, quelles que soient les substitutions S_i et S_j de ce système, il existe un entier $r \geqq 1$, tel que S_i jouit par rapport à S_j de la propriété p_r. Soit $C = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t)$ un cycle quelconque de S_j et soit β_h le nombre que S_i substitue à α_h, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, t$. Soit α_h un élément quelconque de C. Alors les nombres $\beta_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_{h+r-1}$ font partie de r cycles différents de S_j. En effet, supposons le contraire et admettons que β_h et β_{h+k} $(1 \leqq k \leqq r - 1)$ font partie d'un même cycle de S_j. La substitution $S_i\, S_j\, S_i^{-1}$ contient le cycle $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$ et

*) dépendant de i et de j .

$(S_i S_j S_i^{-1})^k$ transforme β_h en β_{h+k}. Comme les deux éléments β_h et β_{h+k} font partie d'un même cycle de S_j, il existe une itérée S_j^φ de S_j qui transforme β_h en β_{h+k}. Et, comme le groupe G est régulier, on doit avoir $(S_i S_j S_i^{-1})^k = S_j^\varphi$.

Mais alors, quel que soit le cycle $C' = (\alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_t')$ de S_j, si on appelle β_h' l'élément que S_i substitue à α_h' $(h = 1, 2, \ldots, t)$, quel que soit l'élément α_h' de C', les nombres β_h' et β_{h+k}' font partie d'un même cycle de S_j. Donc S_i transforme les éléments de chaque cycle de S_j au plus en éléments de k autres cycles de S_j et, par suite, comme $k<r$, S_i ne jouit pas par rapport à S_j de la propriété p_r, ce qui est en contradiction avec le fait constaté au début de la démonstration que S_i jouit par rapport à S_j de la propriété p_r. Donc $\beta_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_{h+r-1}$ font bien partie de r cycles différents de S_j. Par contre, β_h et β_{h+r} font nécessairement partie d'un même cycle de S_j. En effet, comme S_i jouit par rapport à S_j de la propriété p_r, les nombres $\beta_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_{h+r}$ qui sont au nombre de $r + 1 > r$ ne sauraient appartenir à $r + 1$ cycles différents de S_j et, par conséquent, deux éléments au moins de cette suite font partie d'un même cycle de S_j. Or, d'après ce qui précède, les éléments $\beta_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_{h+r-1}$ font nécessairement partie de r cycles différents de S_j. Il s'ensuit que β_h et β_{h+r} font bien partie d'un même cycle de S_j.

Cela étant quel que soit le cycle C de S_j, il s'ensuit que la substitution $(S_i S_j S_i^{-1})^r = S_i S_j^r S_i^{-1}$ transforme tout élément de chaque cycle de S_j en un élément du même cycle.

Soient a et b deux éléments quelconques d'un même cycle de S_j, tels que $S_i S_j^r S_i^{-1}$ transforme a en b et soit μ le plus petit entier positif, tel que S_j^μ transforme a en b. Comme le groupe G est, par hypothèse, régulier, on doit nécessairement avoir $S_i S_j^r S_i^{-1} = S_j^\mu$.

La condition énoncée est donc bien nécessaire, c. q. f. d.

29. *Définition.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système de m substitutions régulières indépendantes de degré n qui satisfait aux conditions nécessaires pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, énoncées dans les propositions 1—8. Nous dirons qu'un tel système de substitutions est *régulier.*

30. *Remarque 7.* Un système régulier de substitutions 1) (voir § 29) n'engendre pas forcément un groupe régulier.

En effet, considérons, par exemple, les substitutions

S_1=(1 2) (3 4) (5 6) (7 8) (9 10) (11 12) (13 14) (15 16) (17 18) (19 20) (21 22) (23 24),

S_2=(2 3) (4 5) (6 1) (8 9) (10 11) (12 7) (14 15) (16 17) (18 13) (20 21) (22 23) (24 19),

S_3=(2 7) (8 13) (14 1) (10 15) (16 21) (22 9) (6 11) (12 19) (5 20) (4 17) (18 23) (3 24).

On vérifie aisément que le système formé de ces trois substitutions est régulier (quels que soient les indices distincts i et j de la suite $1, 2, 3$, chacune des substitutions S_i, S_j jouit par rapport à l'autre de la propriété p_2 et l'ordre de connexion des substitutions S_i, S_j est égal à 6, alors que le système formé des trois substitutions S_1, S_2, S_3 est connexe, et chacune des substitutions S_1, S_2, S_3 jouit par rapport aux deux autres des propriétés P_3 et Q_2).

Or, le groupe (S_1, S_2, S_3) n'est pas régulier. En effet, les deux substitutions S_3S_2 et $S_1S_2S_3S_1$ transforment 1 en 11. Mais S_3S_2 transforme 2 en 24 alors que $S_1S_2S_3S_1$ transforme 2 en $16 \neq 24$. Donc deux substitutions distinctes du groupe (S_1, S_2, S_3) transforment 1 en 11 et, par conséquent, ce groupe n'est pas régulier.

31. *Proposition 9.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulièrement connexe de m substitutions régulières indépendantes de degré n qui jouit des propriétés π, P et Q. Soit 2) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ un système de $k < m$ substitutions de la suite 1) dont les domaines de connexion sont les ensembles 3) $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_l$, soit $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_1 = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_2 = \cdots = \overline{\overline{\mathfrak{E}}}_l = \varrho$ et soit S_i une substitution du système 1) qui ne fait pas partie de 2) et qui jouit par rapport à 2) de la propriété P_ϱ. Alors une condition nécessaire pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, c'est qu'aucun cycle de S_i ne contienne plus d'un élément d'un même ensemble 3).

Démonstration. En effet, supposons le contraire et soit $C = (a_1 a_2 \ldots a_t)$ un cycle de S_i qui contient deux éléments d'un même ensemble de la suite 3). Soient a_λ et a_μ $(1 \leqq \lambda < \mu \leqq t)$ deux tels éléments de C et soit $\mathfrak{E}_j$ l'ensemble de la famille 3) qui les contient tous les deux.

On ne saurait avoir $\mu = \lambda + 1$ ni $\lambda = \mu + 1 - t$ puisque S_i jouit par rapport à 2) de la propriété P_ϱ et, par conséquent, transforme les éléments de $\mathfrak{E}_j$ en éléments de ϱ ensembles de la suite 3), autres que $\mathfrak{E}_j$. Mais alors $a_{\lambda+1}$ et $a_{\mu+1}$ font partie de deux ensembles différents de la suite 3), soit $a_{\lambda+1} \in \mathfrak{E}_{j'}$, $a_{\mu+1} \in \mathfrak{E}_{j''}$, $j' \neq j''$, $j' \neq j$, $j'' \neq j$. Considérons la substitution $S_i^{\mu-\lambda}$. Elle transforme l'élément a_λ de $\mathfrak{E}_j$ en l'élément a_μ de $\mathfrak{E}_j$ et l'élément $a_{\lambda+1}$ de $\mathfrak{E}_{j'}$ en l'élément $a_{\mu+1}$ de $\mathfrak{E}_{j''} \neq \mathfrak{E}_{j'}$. Donc $S_i^{\mu-\lambda} \bar{\in} G_1 = (S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k})$, car les ensembles 3) sont les domaines de connexion des substitutions 2) et, par conséquent, toute substitution du groupe G_1 transforme $a_{\lambda+1}$ en un élément de $\mathfrak{E}_{j'}$. Or, comme a_λ et a_μ font partie de $\mathfrak{E}_j$ et que $\mathfrak{E}_j$ est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution T du groupe G_1 qui fait passer de a_λ à a_μ et on a $T \neq S_i^{\mu-\lambda}$. Donc deux substitutions distinctes du groupe

$G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ transforment a_λ en a_μ et G n'est pas régulier. La condition énoncée est donc bien nécessaire.

32. *Corollaire 2.* Il résulte de la proposition 9 que, si S_i jouit par rapport au système 2) de la propriété P_ρ, S_i est d'ordre $\leqq l$. En effet, chaque cycle de S_i peut alors contenir au plus un élément de chaque ensemble de la famille 3) et le nombre de ces ensembles est égal à l.

33. *Proposition 10.* Soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système régulier de $m \geqq 2$ substitutions de degré n. Alors, s'il existe (au moins) une substitution S_i du système 1) qui jouit par rapport à l'ensemble des autres substitutions du système 1) de la propriété P_1, la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier, c'est que, h désignant le nombre de domaines de connexion des substitutions 2) $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, S_{i+2}, \ldots, S_m$, on ait les relations

I) $S_i^h \in G_1 = (S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, S_{i+2}, \ldots, S_m)$

et

II) $S_i^f S_j S_i^{-f} \in G_1$, quels que soient $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$ et $f = 1, 2, \ldots, h-1$.

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, soit 1) un système régulier de substitutions de degré n qui engendre un groupe régulier G. Soit S_i une substitution de ce système qui jouit par rapport aux substitutions 2) de la propriété P_1. Soient 3) $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_h$ $(h \geqq 2)$ les domaines de connexion du système 2).

Comme le système 1) est régulier, il est connexe et, par conséquent, comme S_i jouit par rapport au système 2) de la propriété P_1, il existe une permutation $i_1, i_2, \ldots, i_h$ des nombres $1, 2, \ldots, h$, telle que S_i transforme $\mathfrak{E}_{i_1}$ en $\mathfrak{E}_{i_2}$, $\mathfrak{E}_{i_2}$ en $\mathfrak{E}_{i_3}, \ldots, \mathfrak{E}_{i_{h-1}}$ en $\mathfrak{E}_{i_h}$ et $\mathfrak{E}_{i_h}$ en $\mathfrak{E}_{i_1}$. Donc S_i est d'ordre $\geqq h$. Soit a_1 un élément quelconque de l'ensemble $\mathfrak{E}_{i_1}$ et soit $a_2, a_3, \ldots, a_h$, a_1' la suite formée de nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$, tels que S_i transforme a_1 en a_2, a_2 en $a_3, \ldots, a_{h-1}$ en a_h et a_h en a_1'. D'après ce qui précède, $a_j \in \mathfrak{E}_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, h$, et $a_1' \in \mathfrak{E}_{i_1}$.

Soit $G_1 = (S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_m)$.

Comme S_i transforme chaque ensemble $\mathfrak{E}_{i_l}$ $(l = 1, 2, \ldots, h)$ de la suite 3) en l'ensemble $\mathfrak{E}_{i_{l+1}}$ (l'indice $l+1$ devant être remplacé par 1, si $l = h$) et comme chaque ensemble de la suite 3) est un domaine de connexion des substitutions 2), chaque substitution de l'ensemble $G_1 S_i^f$ transforme $\mathfrak{E}_{i_1}$ en $\mathfrak{E}_{i_{1+f}}$, quel que soit $f = 1, 2, \ldots, h-1$. Il s'ensuit que ces substitutions, qui sont toutes distinctes, diffèrent des substitutions du groupe G_1, dont chacune transforme l'ensemble $\mathfrak{E}_{i_1}$ en lui-même. Donc l'ensemble 4) $G_1 + G_1S_i + G_1S_i^2 + \cdots + G_1S_i^{h-1}$ est d'ordre μh, où μ est la puissance du groupe G_1. Or, μ est aussi l'ordre de connexion des substitutions 2), puisque le système 1) est régulier. Donc $\mu h = n$. Toutes les substitutions de l'ensemble 4) font partie du groupe G qui est de degré n, de sorte que, comme G est régulier, il ne comprend pas d'autres substitutions. Donc les substitutions S_i^h et $S_i^f S_j$ $(f = 1, 2, \ldots, h-1,\ j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ doivent toutes figurer parmi les substitutions 4). Or, S_i^h transforme l'élément a_1 de $\mathfrak{E}_{i_1}$ en l'élément a_1' du même ensemble qui est un domaine de connexion du système 2). Il existe donc une substitution T du groupe G_1 qui transforme a_1 en a_1' et, comme G est régulier, on doit avoir $S_i^h = T$, donc $S_i^h \in G_1$.

Soit, d'autre part, j un nombre quelconque de la suite $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, soit f un nombre quelconque de la suite $1, 2, \ldots, h-1$ et soit α_j l'élément de la suite $1, 2, \ldots, n$ que S_j transforme en a_1. Comme $\mathfrak{E}_{i_1}$ est un domaine de connexion des substitutions 2), que S_j est une substitution du système 2) et que $a_1 \in \mathfrak{E}_{i_1}$, on a aussi $\alpha_j \in \mathfrak{E}_{i_1}$. La substitution $S_i^f S_j$ transforme α_j en $a_{1+f} \in \mathfrak{E}_{i_{1+f}}$. D'autre part, la substitution S_i^f qui, d'après ce qui précède, transforme l'ensemble $\mathfrak{E}_{i_1}$ en $\mathfrak{E}_{i_{1+f}}$, transforme l'élément α_j de $\mathfrak{E}_{i_1}$ en un certain élément β_j de $\mathfrak{E}_{i_{1+f}}$ et, comme $\mathfrak{E}_{i_{1+f}}$ est un domaine de connexion des substitutions 2), il existe une substitution T du groupe G_1 qui transforme β_j en a_{1+f}. Donc les deux substitutions $S_i^f S_j$ et TS_i^f du groupe G transforment α_j en a_{1+f} et, comme G est régulier, on doit avoir $S_i^f S_j = TS_i^f$, donc $S_i^f S_j S_i^{-f} = T$ et, comme $T \in G_1$, on voit donc bien que II) $S_i^f S_j S_i^{-f} \in G_1$, quels que soient $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$ et $f = 1, 2, \ldots, h-1$.

La condition énoncée est donc bien nécessaire.

La condition est suffisante. En effet, supposons qu'elle est satisfaite. Comme le système 1) est connexe, le groupe G engendré par les substitutions 1) est transitif. Il est donc d'ordre $\lambda \geqq n$ (†). Et comme on a les relations I) et II), le groupe G ne comprend que des substitutions de l'ensemble 4) $G_1 + G_1S_i + G_1S_i^2 + \cdots + G_1S_i^{h-1}$ qui est de puissance n, puisque le système 1) est régulier. Donc $\lambda \leqq n$(††) et de (†) et (††) il résulte que $\lambda = n$. Donc G est régulier, c. q. f. d.

34. *Remarque 8.* Soit n un entier pair $\geqq 4$ et soient S et T deux substitutions régulières du second ordre et de degré n portant sur les éléments $1, 2, \ldots, n$. Alors, si T jouit par rapport à S de la propriété p_1, S jouit à son tour par rapport à T de la propriété p_1 et les deux substitutions S et T sont permutables.

En effet, soient S et T deux substitutions régulières du second ordre et de degré $n \geqq 4$, telles que T jouit par rapport à S de la propriété p_1. Soit $(a\,b)$ un cycle quelconque de S. Comme T jouit par rapport à S de la propriété p_1, il existe un second cycle $(c\,d)$ de S, tel que T transforme a en c et b en d et, comme T est du second ordre, T contient les deux cycles $(a\,c)$ et $(b\,d)$. On peut donc répartir tous les cycles de S en couples, tels que $(a\,b)$, $(c\,d)$, et à chacun de ces couples correspond le couple $(a\,c)\,(b\,d)$ de cycles de la substitution T. Il s'ensuit que S jouit à son tour par rapport à T de la propriété p_1 et que les deux substitutions S et T sont permutables, c. q. f. d.

35. *Proposition 11.* Soient $m \geqq 2$ et $n = 2n' \geqq 4$ deux entiers et soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système de m substitutions régulières indépendantes du second ordre et de degré n portant sur les éléments $1, 2, \ldots, n$ et supposons que, quels que soient les indices i et j $(1 \leqq i < j \leqq m)$, les deux substitutions S_i et S_j jouissent l'une par rapport à l'autre de la propriété p_1. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier c'est que le système 1) soit connexe et que $n = 2^m$.

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, supposons que le groupe G est régulier. Il est donc transitif, d'ordre et de degré n. Or, si le système 1) n'était pas connexe, le groupe qu'il engendre serait intransitif, ce qui est contradictoire. Donc le système 1) est nécessairement connexe. D'autre part, comme les substitutions 1) jouissent deux à deux de la propriété p_1, d'après la remarque 8, elles sont deux à deux permutables et, comme les substitutions 1) sont indépendantes, le groupe G se compose des substitutions $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \ldots S_m^{i_m}$, où $i_h = 1$ ou 2, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, m$, substitutions qui sont toutes distinctes et qui sont au nombre de 2^m. On a donc bien $n = 2^m$ et la condition énoncée est nécessaire.

La condition est suffisante. En effet, supposons qu'elle est satisfaite, Comme le système 1) est connexe, le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ est transitif et comme ce groupe est de degré n, son ordre λ est $\geqq n$. Montrons que $\lambda = n$. En effet, comme les substitutions 1) jouissent deux à deux de la propriété p_1, elles sont permutables deux à deux, d'après la remarque 8, et par conséquent le groupe qu'elles engendrent se compose des substitutions 2) $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \ldots S_m^{i_m}$, où $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ont la même signification que ci-dessus ; toutes ces substitutions sont distinctes puisque le système 1) est formé de substitutions indépendantes. Donc les substitutions 2) sont au nombre de 2^m et, comme $n = 2^m$, le groupe G

qui est transitif est d'ordre égal à son degré. Il est donc régulier, ce qui prouve que la condition est suffisante.

36. *Proposition 12.* Soient $m \geqq 2$ et $n > 1$ deux entiers, soit 1) $S_1, S_2, \ldots, S_m$ un système de m substitutions indépendantes, permutables deux à deux, de degré n et telles que l'égalité I) $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \ldots S_m^{i_m} = S_1^{j_1} S_2^{j_2} \ldots S_m^{j_m}$, où $i_1, i_2, \ldots, i_m$ ainsi que $j_1, j_2, \ldots, j_m$ sont des entiers, implique les congruences II) $i_h \equiv j_h \pmod{n_h}$, n_h désignant l'ordre de la substitution S_h, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, m$. La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe $G = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ soit régulier c'est que le système 1) soit connexe et que $n = n_1 n_2 \ldots n_m$.

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, soit 1) un système de substitutions indépendantes, permutables deux à deux et qui engendrent un groupe régulier G. Donc G est transitif, ce qui implique que le système 1) est connexe. D'autre part, comme G est régulier, l'ordre de ce groupe est égal à son degré n. Or, comme les substitutions 1) sont permutables deux à deux, qu'elles sont indépendantes et que I) implique II), les substitutions 2) $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \ldots S_m^{i_m}$ ($i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$; $i_2 = 1, 2, \ldots, n_2$; $\ldots$; $i_m = 1, 2, \ldots, n_m$) sont toutes distinctes et le groupe G ne comprend pas d'autres substitutions que celles de la suite 2). Or, les substitutions 2) sont au nombre de $n_1 n_2 \ldots n_m$. On doit donc avoir $n = n_1 n_2 \ldots n_m$ et la condition énoncée est bien nécessaire.

La condition est suffisante. En effet, supposons qu'elle est satisfaite. Donc le système 1) est connexe et on a l'égalité $n = n_1 n_2 \ldots n_m$. Comme le système 1) est connexe, il engendre un groupe transitif G dont l'ordre $\lambda \geqq n$. D'autre part, comme les substitutions 1) sont indépendantes, qu'elles sont deux à deux permutables et que I) implique II), les substitutions $S_1^{i_1} S_2^{i_2} \ldots S_m^{i_m}$, où i_h prend les valeurs $1, 2, \ldots, n_h$, quel que soit $h = 1, 2, \ldots, m$, sont toutes distinctes et elles font toutes partie du groupe G. Donc $\lambda = n$. Ainsi le groupe G est transitif d'ordre et de degré n. Il est donc régulier et la condition est suffisante, c. q. f. d.

(Reçu le 10 mars 1946.)