Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels.

Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels

Par Charles Pisot, Bordeaux

Nous appellerons *répartition (mod 1)* d'une suite $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ de nombres réels une suite $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ obtenue en ramenant (mod 1) chaque nombre φ_n à un nombre ψ_n appartenant à un intervalle fixe de longueur 1. En d'autres termes, à tout φ_n on fait correspondre un nombre ψ_n de l'intervalle fixe $\gamma \leqq \psi_n < \gamma + 1$, de sorte que

$$\varphi_n - \psi_n = u_n$$

soit un nombre entier.

On a déjà beaucoup étudié les répartitions (mod 1) des suites qui dépendent de façon simple de n, en particulier celles où φ_n est un polynome en n [1]). Une fonction qui s'est montrée particulièrement réfractaire est la fonction exponentielle; très peu de résultats sont connus sur sa répartition (mod 1) [2]). J'ai donné dans un travail antérieur [3]) un certain nombre de résultats pour cette fonction [4]). Dans cet article je les compléterai et caractériserai une famille particulière de nombres algébriques parmi l'ensemble des nombres réels par les propriétés de la répartition (mod 1) de leurs puissances [5]).

Théorème I. *L'ensemble des nombres réels $\alpha > 1$ et λ tels que la répartition (mod 1) de la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ ait un nombre fini de valeurs limites est dénombrable.*

Théorème II. *Soit α un nombre algébrique réel supérieur à un et λ un nombre réel. La condition nécessaire et suffisante pour que la répartition (mod 1) de la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ ait un nombre fini de valeurs limites, c'est que les deux conditions suivantes soient simultanément vérifiées :*

---

1) Voir p. e. *Koksma*, Diophantische Approximationen, Ergebn. Math. *IV*, 4; 86—125.

2) *Thue*, Norske Vid. Selsk. Skr. (1912 — II), Nr. 20; 1—15.
Koksma, Compositio math. 2 (1935); 250—258.

3) *Pisot*, C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937); 312—314 et Ann. R. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. II, 7 (1938); 205—248.

4) Ces résultats ont été retrouvés indépendamment par *Vijagaraghavan*, Proc. Ind. Ac. Sci. A 12 (1940); Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941); 349—357; Journal London Math. Soc. 17 (1942); 137—138.

5) La distribution de ces nombres algébriques a été récemment étudiée par *Salem*, Duke math. j. 11 (1944); 103—108 et 12 (1945); 153—172 et par *Siegel*, Duke math. j. 11 (1944); 597—602. Ils forment un ensemble fermé.

A. *α est un entier algébrique dont tous les conjugués sont en module strictement inférieurs à un* [6]).

B. *λ est un nombre algébrique et appartient au corps de α.*

Théorème III. *Soit α un nombre réel supérieur à un et λ un nombre réel positif. Les conditions A et B du théorème II sont encore remplies si l'on a simultanément:*

1. *Le nombre des valeurs limites de la répartition* (*mod* 1) *de la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ est fini.*

2. *La convergence de la répartition vers ses valeurs limites est $o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$, k étant le nombre des valeurs limites irrationnelles.*

Nous allons d'abord démontrer quelques lemmes servant à la fois aux démonstrations des trois théorèmes.

Remarque. *Supposons qu'une répartition* (*mod* 1) *d'une suite quelconque φ_n ait un nombre fini de valeurs limites rationnelles. Il existe alors un entier d tel que toute répartition* (*mod* 1) *de la suite $d\varphi_n$ ait pour seule valeur limite rationnelle un entier.*

Il est clair qu'il suffit de prendre pour d un dénominateur commun à toutes les valeurs limites rationnelles. *Nous supposerons dans la suite de la démonstration avoir ainsi ramené toutes les valeurs limites rationnelles à un entier.*

Lemme 1. *Supposons qu'une répartition* (*mod* 1) *d'une suite quelconque φ_n ait un nombre fini de valeurs limites, dont k irrationnelles. A tout entier $q \geqq 4$ on peut alors faire correspondre un entier $h \leqq q^k$ tel qu'une répartition ψ'_n de la suite $h\varphi_n$ tombe dans l'intervalle $-\frac{2}{q} \leqq \psi'_n \leqq \frac{2}{q}$ pour tout indice n supérieur à n_0.*

Désignons par $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les valeurs limites irrationnelles de la répartition (mod 1) de la suite φ_n, et par γ_0 l'entier auquel nous avons ramené, grâce à la remarque, les valeurs limites rationnelles. Si la répartition ψ_n se trouve dans l'intervalle $\gamma \leqq \psi_n < \gamma + 1$, il en sera de même des valeurs limites $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$. On aura alors

$$\varphi_n = u_n + \gamma_\kappa + \varepsilon_n \tag{1}$$

[6]) Le fait qu'aucun conjugué de a ne puisse avoir de module égal à un a été démontré par *Vijagaraghavan*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941); 349—357.

où u_n désigne un entier, κ l'un des indices $0, 1, \ldots, k$, et ε_n une quantité tendant vers 0 avec $\dfrac{1}{n}$.

D'après un théorème d'approximation connu [7]), quel que soit l'entier $q \geqq 1$, on peut trouver un entier $h \leqq q^k$, tel que l'on ait $|h\gamma_\kappa - h_\kappa| \leqq \dfrac{1}{q}$, à la fois pour $\varkappa = 1, \ldots, k$, h_κ étant un entier. On peut donc écrire $h\gamma_\kappa = h_\kappa + \eta_\kappa$, avec $|\eta_\kappa| \leqq \dfrac{1}{q}$. En multipliant la relation (1) par h, il vient

$$h\varphi_n = hu_n + h\gamma_\kappa + h\varepsilon_n = (hu_n + h_\kappa) + (\eta_\kappa + h\varepsilon_n) = u_n' + \psi_n' .$$

$hu_n + h_\kappa = u_n'$ est un entier, d'autre part on a

$$|\psi_n'| = |\eta_\kappa + h\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{q} + q^k |\varepsilon_n| . \tag{2}$$

Comme $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, on peut trouver un indice n_0, tel que $q^k |\varepsilon_n| \leqq \dfrac{1}{q}$ pour tout $n \geqq n_0$, ce qui démontre le lemme.

Démonstration du théorème I. Soit q un entier avec $q > 4(\alpha + 1)^2$. Si la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ n'a qu'un nombre fini de valeurs limites, il correspond, d'après le lemme 1, à q un entier h tel que l'on ait

$$h\lambda\alpha^n = u_n' + \psi_n' \quad \text{avec} \quad |\psi_n'| \leqq \frac{2}{q} < \frac{1}{2(\alpha + 1)^2} .$$

Or on a $u_{n+1}' = \alpha u_n' + \alpha\psi_n' - \psi_{n+1}'$, $u_{n+2}' = \alpha^2 u_n' + \alpha^2\psi_n' - \psi_{n+2}'$ d'où

$$\left| \frac{u_{n+1}'^2}{u_n'} - u_{n+2}' \right| = \left| \alpha^2 \psi_n' - 2\alpha\psi_{n+1}' + \psi_{n+2}' + \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha\psi_n' - \psi_{n+1}')^2}{u_n'} \right| \leqq \frac{2}{q}(\alpha + 1)^2 + \frac{4(\alpha + 1)^2}{q^2 u_n'} .$$

La dernière expression tend vers un nombre strictement inférieur à $\frac{1}{2}$; à partir d'un certain indice $n \geqq n_1$, on a donc $\left| \dfrac{u_{n+1}'^2}{u_n'} - u_{n+2}' \right| < \frac{1}{2}$. La suite des entiers $u_n', u_{n+1}', \ldots$ est ainsi déterminée par la donnée des entiers u_{n_1}' et u_{n_1+1}'. Comme une telle suite ne peut provenir de deux nombres α et λ différents, ces derniers forment un ensemble dénombrable.

---

[7]) Voir p. e. [1]), p. 68—75.

Lemme 2. *Soient* $\alpha > 1$ *et* λ *deux nombres réels,* u_n *un entier et* ψ_n *une répartition* (*mod* 1) *de* $\lambda\alpha^n$ *telle que* $\lambda\alpha^n = u_n + \psi_n$. *Supposons qu'il existe des entiers* $a_0, a_1, \ldots, a_s$ *non tous nuls tels que*

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_s u_{n+s} = 0 \quad \textit{pour tout} \ \ n \geqq n_2, \tag{3}$$

alors α *est un entier algébrique et* λ *un nombre algébrique du corps de* α.

Posons $Q(z) = a_0 z^s + a_1 z^{s-1} + \cdots + a_s$ et considérons la série $f(z) = u_0 + u_1 z + \cdots + u_n z^n + \cdots$. La récurrence (3) montre immédiatement que le produit $f(z)Q(z) = P(z)$ se réduit à un polynome, et par suite $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ est une fraction rationnelle. Or $u_n = \lambda\alpha^n - \psi_n$, donc

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\lambda}{1 - \alpha z} - \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n .$$

Comme les ψ_n sont bornés, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n$ converge dans le cercle $|z| < 1$. Dans ce cercle la fraction rationnelle $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ a par suite le pôle simple unique $z = \dfrac{1}{\alpha}$ avec le résidu $-\dfrac{\lambda}{\alpha}$. $\dfrac{1}{\alpha}$ est donc racine de $Q(z) = 0$, c'est-à-dire α est algébrique, et $\lambda = -\dfrac{\alpha P\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ appartient au corps de α.

Un théorème de Fatou [8]) nous apprend de plus que les inverses des pôles d'une fraction rationnelle sont des *entiers* algébriques lorsque son développement en série de Taylor a ses coefficients entiers rationnels.

Démonstration du théorème II. Soit $\alpha > 1$ un nombre algébrique, $a_s z^s + \cdots + a_0 = 0$ l'équation à coefficients entiers irréductible admettant α pour racine. Les autres racines $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ de cette équation sont les conjugués de α, elles sont toutes simples.

Soit q un entier vérifiant $q > 2(|a_0| + \cdots + |a_s|)$. D'après le lemme 1 on peut faire correspondre à cet entier q un entier h tel que

$$h\lambda\alpha^n = u'_n + \psi'_n \quad \text{avec} \quad |\psi'_n| \leqq \frac{2}{q} \quad \text{pour } n \geqq n_0 . \tag{4}$$

---

[8]) *Fatou,* Acta math. 30 (1906); 368—369.

En multipliant la relation $a_0 + \cdots + a_s\alpha^s = 0$ par $h\lambda\alpha^n$, il vient $a_0(u'_n + \psi'_n) + \cdots + a_s(u'_{n+s} + \psi'_{n+s}) = 0$, c'est-à-dire

$$| a_0 u'_n + \cdots + a_s u'_{n+s} | = | a_0 \psi'_n + \cdots + a_s \psi'_{n+s} | < 1 \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0 .$$

Comme à gauche nous avons un entier, ce dernier est nul pour $n \geqq n_0$. On peut par conséquent appliquer le lemme 2 avec u'_n au lieu de u_n et $h\lambda$ au lieu de λ, ce qui nous démontre que α est un entier algébrique et λ un nombre algébrique du corps de α.

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n$ utilisée dans la démonstration du lemme 2 nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n = \frac{h\lambda}{1-\alpha z} + \frac{h\lambda_2}{1-\alpha_2 z} + \cdots + \frac{h\lambda_s}{1-\alpha_s z} + R(z) ,$$

où $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sont les conjugués de λ dans les corps conjugués du corps de α, et $R(z)$ un polynome de degré inférieur à n_0. En développant chaque fraction simple en série, on obtient

$$u'_n = h\lambda\alpha^n + h\lambda_2\alpha_2^n + \cdots + h\lambda_s\alpha_s^n \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0 . \tag{5}$$

Posons alors

$$\Delta(z) = (z-\alpha)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{s-1}) = z^{s-1} + \delta_{s-2} z^{s-2} + \cdots + \delta_0$$

et formons la quantité $u'_{n+s-1} + \delta_{s-2} u'_{n+s-2} + \cdots + \delta_0 u'_n$. En y substituant pour u'_n soit l'expression (4), soit l'expression (5), on obtient :

$$h\lambda\alpha^n \Delta(\alpha) - (\psi'_{n+s-1} + \delta_{s-2}\psi'_{n+s-2} + \cdots + \delta_0\psi'_n)$$
$$= h\lambda\alpha^n \Delta(\alpha) + h\lambda_2\alpha_2^n \Delta(\alpha_2) + \cdots + h\lambda_s\alpha_s^n \Delta(\alpha_s) .$$

Or $\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha_2) = \cdots = \Delta(\alpha_{s-1}) = 0$ et $\Delta(\alpha_s) \neq 0$, donc

$$| \psi'_{n+s-1} + \delta_{s-2}\psi'_{n+s-2} + \cdots + \delta_0\psi'_n | = | h\lambda_s\alpha_s^n \Delta(\alpha_s) | .$$

Mais $| \psi'_n | \leqq \frac{2}{q}$ pour $n \geqq n_0$, par suite

$$| \lambda_s\alpha_s^n \Delta(\alpha_s) | \leqq | h\lambda_s\alpha_s^n \Delta(\alpha_s) | \leqq \frac{2}{q}(| \delta_0 | + \cdots + | \delta_{s-2} | + 1) .$$

Une telle inégalité est impossible quand $| \alpha_s | \geqq 1$, si nous prenons q assez grand. Tout conjugué α_σ de α vérifie donc l'inégalité $| \alpha_\sigma | < 1$, et les conditions A et B sont remplies.

Réciproquement supposons remplies les conditions A et B. Soient $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ les conjugués de α, $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ceux de λ dans les corps conjugués du corps de α. Soit l un entier rationnel tel que $l\lambda$ soit entier algébrique. Le nombre $w_n = l\lambda\alpha^n + l\lambda_2\alpha_2^n + \cdots + l\lambda_s\alpha_s^n$ est alors entier rationnel. Comme $|\alpha_2| < 1, \ldots, |\alpha_s| < 1$, on a $w_n = l\lambda\alpha^n - l\psi_n$ ou $\lambda\alpha^n = \frac{w_n}{l} + \psi_n$ avec $\lim\limits_{n=\infty} \psi_n = 0$. Or $\frac{w_n}{l}$ n'a (mod 1) qu'un nombre fini de valeurs limites, d'ailleurs toutes rationnelles. Le théorème II est ainsi complètement démontré.

Pour démontrer le théorème III où l'on ne suppose plus a priori que α est algébrique, nous allons d'abord établir le lemme suivant :

Lemme 3. *Soient α et λ deux nombres réels supérieurs à 1, et posons $\lambda\alpha^n = u_n + \psi_n$. Supposons que pour tout $n \geqq 0$ on ait $|\psi_n| \leqq \frac{1}{\psi}$ avec $\psi \geqq 2e\alpha(\alpha+1)(1+\ln\lambda)$, alors α et λ sont tous les deux algébriques.*

Désignons par $\frac{1}{\psi}$ une borne supérieure de tous les $|\psi_n|$ et considérons $s+1$ entiers $a_0, a_1, \ldots, a_s$ tels que $|a_\sigma| \leqq a$ pour $\sigma = 0, 1, \ldots, s$. Posons $v_n = a_0u_n + a_1u_{n+1} + \cdots + a_su_{n+s}$.

1. *Si $\psi > (s+1)(\alpha+1)a$ et si $v_0 = 0$, alors $v_n = 0$ pour tout $n \geqq 0$.* En effet on a

$$|v_{n+1} - \alpha v_n|$$
$$= |a_0(\alpha\psi_n - \psi_{n+1}) + a_1(\alpha\psi_{n+1} - \psi_{n+2}) + \cdots + a_s(\alpha\psi_{n+s} - \psi_{n+s+1})|$$
$$\leqq (s+1)(\alpha+1)\,a\frac{1}{\psi} < 1 .$$

De $v_n = 0$, on déduit donc que l'entier $|v_{n+1}| < 1$ est aussi nul.

2. *Si $\psi > (s+1)(\alpha+1)a$, on peut trouver, quel que soit l'entier $s \geqq 1$, des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_s$ tels que $v_0 = 0$, dès que $a \geqq 2\alpha\lambda^{\frac{1}{s}} - 1$.* Formons en effet toutes les expressions $v_0' = a_0'|u_0| + a_1'|u_1| + \cdots + a_s'|u_s|$, où les a_σ' pour $\sigma = 0, 1, \ldots, s$ sont des entiers avec $0 \leqq a_\sigma' \leqq a$. Il y a $(a+1)^{s+1}$ telles expressions. La valeur de chacune d'elles est un entier positif vérifiant

$$v_0' \leqq (s+1)\,a\left(\lambda\alpha^s + \frac{1}{\psi}\right) < (s+1)\,a\,\lambda\alpha^s + \frac{1}{\alpha+1} < (s+1)\,(a+1)\,\lambda\alpha^s - 1.$$

Si donc
$$(a+1)^{s+1} \geqq (s+1)\,(a+1)\,\lambda\alpha^s \tag{6}$$

deux expressions v_0' différentes auront la même valeur numérique, leur différence est donc un nombre v_0 ayant la valeur 0. Or l'inégalité (6) s'écrit $a + 1 \geqq (s + 1)^{\frac{1}{s}} \lambda^{\frac{1}{s}} \alpha$, elle est vérifiée si $a + 1 \geqq 2\alpha\lambda^{\frac{1}{s}}$.

3. *Soit* s *l'entier défini par* $s - 1 \leqq \ln \lambda < s$, *alors* $(s + 1)\lambda^{\frac{1}{s}} < e(1 + \ln \lambda)$.

Considérons en effet la droite $y_1 = \frac{x}{s} + \ln(1 + s)$ et la courbe $y_2 = 1 + \ln(1 + x)$, elles se coupent pour $x = s$. Pour $x = s - 1$, on a $y_1 < y_2$; donc en vertu de la concavité de la courbe y_2, l'inégalité $y_1 < y_2$ a lieu pour tout x avec $s - 1 \leqq x < s$, en particulier pour $x = \ln \lambda$.

Soient alors s l'entier défini par $s - 1 \leqq \ln \lambda < s$ et ensuite a par $a < 2\alpha\lambda^{\frac{1}{s}} \leqq a + 1$. On a donc d'après 3

$$\psi \geqq 2e\alpha(\alpha + 1)(1 + \ln \lambda) > 2\alpha(\alpha + 1)(s + 1)\lambda^{\frac{1}{s}} > (s + 1)(\alpha + 1)\,a\,.$$

D'après 1 et 2 on peut par suite trouver des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_s$ tels que $v_n = 0$ pour tout $n \geqq 0$. En vertu du lemme 2, α et λ sont donc algébriques, ce qui démontre le lemme 3 (le degré de α ne dépasse pas $1 + \ln \lambda$).

Démonstration du théorème III. Supposons qu'une répartition (mod 1) de la suite $\lambda\alpha^n$ n'ait que les valeurs limites irrationnelles $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ et éventuellement la valeur limite γ_0 entière. Posons $\lambda\alpha^n = u_n + \gamma_\kappa + \varepsilon_n$, $\kappa = 0, 1, \ldots, k$, alors $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$ d'après la condition 2 du théorème III. Posons encore $\beta = 2e\alpha(\alpha + 1)\ln \alpha$ et soit b un entier supérieur à 4β. Soit n_0 un indice tel que l'on ait à la fois $\lambda' = \lambda\alpha^{n_0} > 1$ et $\alpha^{n_0} > e\lambda$, et que pour tout $n \geqq n_0$ on ait $|\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{(bn_0)^{k+1}}$. Nous appliquerons alors le lemme 1 avec le nombre $q = b\,n_0$; il correspond à ce nombre q un entier $h \leqq q^k$, tel qu'en posant $h\lambda\alpha^n = u_n' + \psi_n'$, on ait en vertu de (2) : $|\psi_n'| \leqq \frac{1}{q} + q^k|\varepsilon_n|$, c'est-à-dire $|\psi_n'| \leqq \frac{2}{bn_0}$ pour $n \geqq n_0$. On a donc en posant $\psi = \frac{bn_0}{2}$

$$w \geqq 2\beta\, n_0 = 2e\,\alpha\,(\alpha + 1)(2n_0 \ln \alpha)\,.$$

Comme $\alpha^{n_0} > e\lambda$, on a $n_0 \ln \alpha > 1 + \ln \lambda$ et par suite

$$\psi \geqq 2e\alpha(\alpha + 1)(1 + \ln \lambda + n_0 \ln \alpha) = 2e\alpha(\alpha + 1)(1 + \ln \lambda') \ .$$

Or $\lambda' = \lambda\alpha^{n_0} > 1$, ce qui permet d'appliquer le lemme 3 avec λ' au lieu de λ et il en résulte que α est algébrique. On est ainsi ramené au théorème II qui montre que les conditions A et B sont vérifiées.

(Reçu le 11 avril 1946.)