# Sur la congruence des ensembles de points et ses généralisations.

Autor(en): **Sierpinski, Waclaw**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **19 (1946-1947)**

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17343

# Sur la congruence des ensembles de points et ses généralisations *)

Par WACLAW SIERPIŃSKI, Varsovie

Une notion bien connue de la géométrie élémentaire est celle de *congruence* des figures géométriques. Deux figures géométriques ou bien deux ensembles de points situés sur une droite, ou dans un plan, ou dans l'espace à 3 dimensions sont dits *congruents* ou *superposables*, s'ils peuvent être obtenus l'un de l'autre par une translation ou par une rotation. On écrit alors $A \cong B$.

On démontre que, pour que deux ensembles de points, $A$ et $B$ soient congruents, il faut et il suffit qu'il existe entre les points de $A$ et ceux de $B$ une correspondance biunivoque conservant les distances, c.-à-d. telle que $a_1$ et $a_2$ étant deux points quelconques de l'ensemble $A$ et $b_1$ et $b_2$ les points de l'ensemble $B$ qui leur correspondent, la distance entre $a_1$ et $a_2$ est égale à celle entre $b_1$ et $b_2$. Une transformation des ensembles conservant les distances est appellée *isométrique.* Au lieu de dire ensembles congruents on dit donc aussi ensembles *isométriques.*

Il existe des ensembles de points, même linéaires, superposables avec une de leurs parties aliquotes, p. e. une demi-droite. En 1914 *S. Mazurkiewicz* (décédé en 1945) et moi, nous avons construit un ensemble plan (non borné) qui se décompose en deux ensembles sans points communs dont chacun est avec lui congruent [1]).

D'après *A. Lindenbaum* il n'existe aucun ensemble plan borné ou linéaire qui jouisse de cette propriété [2]); or, il existe de tels ensembles bornés dans l'espace à 3 dimensions.

Voici la construction que nous avons donnée avec *S. Mazurkiewicz:* Soit $\varphi$ la translation du plan de longueur 1 le long de l'axe d'abscisses et soit $\psi$ la rotation du plan autour du point 0 de l'angle égal à 1 [c.-à-d. $= (180/\pi)°$[. Soit $E$ l'ensemble formé du point 0 et de tout point qu'on obtient du point 0 en appliquant un nombre fini de fois les transformations $\varphi$ et $\psi$ dans un ordre quelconque. Soit $A = \varphi(E)$, $B = \psi(E)$. On a évidemment $A \cong E$, $B \cong E$ et $E = A + B$, et il reste à démontrer que $AB = 0$ (c.-à-d. que les ensembles $A$ et $B$ sont sans point commun). A

---

*) Conférence tenue à l'Université de Zurich le 22 Mai 1946.

1) *C. R. Paris,* 158, p. 618 (séance du 2 mars 1914).

2) Fundamenta Mathematicae 8 (1926), p. 218, renvoi 1).

ce but il est à remarquer que dans le plan de nombres complexes les transformations $\varphi$ et $\psi$ s'expriment par les formules

$$\varphi(z) = z + 1 \quad \text{et} \quad \psi(z) = e^i z$$

et il en résulte sans peine que tout point $p$ de $E$ est un polynome en $e^i$ aux coefficients entiers. De plus, son terme constant est positif si $p$ appartient à $A$ et nul, si $p$ appartient à $B$. S'il y avait donc un point commun aux ensembles $A$ et $B$, nous aurions une équation algébrique en $e^i$ aux coefficients entiers, non identique, ce qui est impossible, $e^i$ étant, comme on sait, un nombre transcendant.

Pendant les dernières années j'ai trouvé une généralisation de cette construction. J'ai construit notamment une famille de puissance du continu d'ensembles plans sans points communs deux à deux, dont l'ensemble-somme est superposable avec chacun d'eux.

Il est à remarquer que en 1926 *A. Lindenbaum* a annoncé qu'il sait démontrer à l'aide de l'axiome du choix qu'il existe pour tout nombre cardinal $m \leq 2^{\aleph_0}$ un ensemble plan qui se décompose en $m$ parties disjointes superposables avec lui[3]).

La démonstration de *A. Lindenbaum* n'a pas été publiée et elle m'est inconnue et *A. Lindenbaum*, chargé de cours à l'Université de Varsovie fut tué par la Gestapo en 1941. Or, je sais démontrer la proposition de *A. Lindenbaum* sans faire appel à l'axiome du choix et d'une façon effective[4]). Il en résulte en particulier qu'on sait nommer un ensemble plan indénombrable qui est somme de deux ensembles disjoints superposables avec lui. Cela résoût définitivement un problème posé par *M. H. Steinhaus* en 1921 (Fund. Math. 2, p. 4) qui a été regardé comme difficile et pendant 25 années attendait sa solution. Mon élève, *Stanislas Ruziewicz*, avant la guerre Recteur de l'Académie de Commerce à Lwòw, fusillée par la Gestapo à Lwòw en été de 1941 a donné en 1921 une solution partielle et non effective de ce problème en démontrant à l'aide de l'axiome du choix qu'il existe un ensemble plan indénombrable superposable avec deux de ses sousensembles disjoints[5]).

On démontre sans peine à l'aide de l'axiome du choix que la circonférence est une somme d'une suite infinie d'ensembles deux à deux superposables (par rotation) et sans points commun[6]). Il est beaucoup

---

[3]) *A. Lindenbaum* et *A. Tarski*, Communication sur les recherches de la théorie des ensembles, C. R. Soc. Sc. et L. de Varsovie 19 (1926), p. 327, th. 3*.

[4]) Voir Fund. Math. 34.

[5]) Fund. Math. 2, p. 4—7.

[6]) Cf. *F. Hausdorff*, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig u. Berlin 1914, p. 401 bis 402.

plus difficile de démontrer à l'aide de l'axiome du choix qu'un segment d'une droite est une somme d'une suite infinie d'ensembles disjoints deux à deux congruents, ce qui a été fait par *M. J. von Neumann* en 1928[7]) qui a ainsi résolu un problème posé par *M. H. Steinhaus* en 1921[8]). En 1920 *S. Mazurkiewicz* a démontré en s'appuyant sur le théorème de *Zermelo* sur le bon ordre que le segment $0 \leq x \leq 1$ est une somme d'une infinité indénombrable (de puissance du continu) d'ensembles non mesurables, sans points communs, superposables deux à deux par translation[8]). En 1924 *Stanislas Ruziewicz* a démontré (en utilisant l'axiome du choix mais sans admettre l'hypothèse du continu) que pour tout nombre cardinal $m \leq 2^{\aleph_0}$ la droite est une somme de $m$ ensembles non mesurables disjoints, deux à deux congruents[9]).

Une décomposition de la droite en $m$ ensembles disjoints et congruents, où $\aleph_0 \leqslant m < 2^{\aleph_0}$ (mesurables ou non) peut être obtenue d'une façon plus simple comme voici. Soit $E$ un ensemble quelconque de nombres réels positifs de puissance $m$ et soit $H$ l'ensemble de tous les nombres qui sont des sommes d'un nombre fini de nombres, dont les valeurs absolues appartiennent à $E$. On démontre sans peine que $\overline{\overline{H}} = m$. Divisons maintenant tous les nombres réels en classes, en rangeant dans une même classe deux nombres réels dans ce et seulement dans ce cas, si leur différence appartient à $H$. Soit $N$ un ensemble contenant un et un seul nombre de chacune de ces classes. $a$ étant un nombre réel, désignons par $N(a)$ la translation de $N$ de longueur $a$. On démontre sans peine que la droite est une somme disjointe de $m$ ensembles congruents $N(a)$, où $a \in H$.

En admettant l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) on peut démontrer qu'il existe un ensemble plan $E$, tel que le plan est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints, dont chacun est congruent avec $E$, et en même temps le plan est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles, dont chacun est congruent avec $E$[10]).

Or, $m$ étant un nombre cardinal donné quelconque, si la droite est une somme de $m$ ensembles disjoints, dont chacun est superposable par translation avec un ensemble $E$, la droite n'est pas une somme de moins que $m$ ensembles, dont chacun est superposable par translation ou rotation avec $E$[11]).

$A$ et $B$ étant deux ensembles de points nous dirons que le type métrique de $A$ est plus petit ou égal à celui de $B$ si $A$ est congruent à un sous-ensemble de $B$: nous écrirons dans ce cas $\tau A \leq \tau B$. Nous dirons que les ensembles $A$ et $B$ appartiennent au même type métrique et nous

[7]) Fund. Math. 11, pp. 230—238.

[8]) Fund. Math. 2, p. 8.

[9]) Fund. Math. 5, p. 92.

[10]) Voir Fund. Math. 21, p. 39; cf. aussi mon livre Hypothèse du continu (Warszawa 1934, Monografje Matematyczne t. IV).

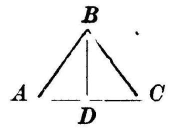
[11]) Fund. Math. 24, p. 247.

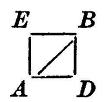
écrirons $\tau A = \tau B$, si l'on a à la fois $\tau A \leq \tau B$ et $\tau B \leq \tau A$. Nous dirons que les types métriques de $A$ et de $B$ sont incomparables et nous écrirons $\tau A \parallel \tau B$, si l'on n'a ni $\tau A \leq \tau B$, ni $\tau B \leq \tau A$. On peut démontrer qu'il existe une famille de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires dont les types métriques sont deux à deux incomparables. Or, je sais démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu qu'il existe une famille de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires dont les types métriques sont distincts et deux à deux comparables. Sans faire appel à l'hypothèse du continu je sais démontrer qu'il existe une telle famille de puissance supérieure à celle du continu. Je sais aussi nommer une famille formée de $2^{\aleph_1}$ ensembles linéaires dont les types métriques sont distincts et deux à deux comparables. Il en résulte qu'on sait nommer une famille d'ensembles linéaires dont les types métriques sont distincts et deux à deux comparables et on peut démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu que cette famille est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

On peut démontrer que $A$ étant un ensemble linéaire infini quelconque, il existe toujours un ensemble linéaire $B$ de même puissance que $A$ et dont le type métrique est inférieur à celui de $A$, et que, $A$ étant un ensemble linéaire infini de puissance inférieure à celle du continu, il existe toujours un ensemble linéaire $B$ de même puissance que $A$ et dont le type métrique est supérieur à celui de $A$ [12]).

Une généralisation de la notion de congruence des ensembles est celle de leur équivalence par décomposition finie.

Il est bien connu de la géométrie élémentaire qu'un triangle orthogonal bilatéral $ABC$ peut être décomposé par sa hauteur $BD$ en deux triangles dont on peut former un carré (p. e. en tournant le triangle $BDC$ de 270° autour du point $B$). Or, si l'on décompose à ce but le triangle $ABC$ en triangles $ABC$ et $BDC$, ses derniers ont un côté commun $BD$: ils ne sont donc pas *disjoints* (c.-à-d. ne sont pas sans points communs).




Dans la géométrie élémentaire on appelle deux polygones (ou polyédres) *équivalents par décomposition*, s'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal de polygones (ou polyèdres) respectivement congruents qui n'ont pas de points intérieurs communs. Or, dans la théorie des ensembles de points on envisage la notion d'équivalence dans un

[12]) Les démonstrations de tous ces théorèmes sur les types métriques paraîtront dans ma note „Sur les types métriques d'ensembles linéaires".

sens différent de celui de la géométrie élémentaire : deux ensembles de points sont dits *équivalents par décomposition finie* s'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal d'ensembles de points arbitraires respectivement congruents qui n'ont aucun point commun.

$A$ et $B$ étant deux ensembles de points et $n$ un nombre naturel, nous écrirons

$$A \underset{n}{=} B ,$$

s'il existe des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$, tels que

1°. $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n, \qquad B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n,$

2°. $A_k A_l = B_k B_l = 0 \quad$ pour $\quad 1 \leq k < l \leq n$ ,

3°. $A_k \cong B_k \quad$ pour $\quad k = 1, 2, \ldots, n$ .

Si $A \underset{n}{=} B$, on a $B \underset{n}{=} A$: la relation $\underset{n}{=}$ est donc symétrique (or, comme nous le verrons plus loin, elle n'est pas transitive pour $n > 1$). Les formules $A \underset{1}{=} B$ et $A \cong B$ sont évidemment équivalentes. La formule $A \underset{n}{=} B$ entraîne évidemment la formule $A \underset{m}{=} B$ pour tout nombre naturel $m \geqslant n$.

Pour que les ensembles $A$ et $B$ soient équivalents par décomposition finie, il faut et il suffit qu'il existe un nombre naturel $n$, tel que $A \underset{n}{=} B$: nous écrirons alors $A \overset{f}{=} B$.

Il est facile de donner pour tout nombre naturel $m$ un exemple de deux ensembles linéaires $A$ et $B$, tels que $A \underset{m}{=} B$, mais qu'on n'a pas $A \underset{n}{=} B$ pour aucun nombre naturel $n < m$ (tels sont p. e. les ensembles $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ et $B = \{m, 2m, \ldots, m^2\}$).

On voit sans peine que deux ensembles contenant un nombre fini de points sont équivalents par décomposition finie dans ce et seulement dans ce cas s'ils contiennent le même nombre de points.

Le problème si deux ensembles de points sont équivalents par décomposition finie ou non est parfois difficile à résoudre. P. e. nous ne savons pas si un cercle est équivalent par décomposition finie à un carré ayant la même aire. Or, comme l'ont démontré *S. Banach*[13]) et *A. Tarski*, il résulte de l'axiome du choix que la sphère est équivalente par décomposition finie à un cube, d'ailleurs pas nécessairement de même volume.

Il est loin d'être évident que le triangle $ABC$ envisagé plus haut est équivalent par décomposition finie (dans le sens de la théorie des ensembles) à un carré. Or, *S. Banach* et *A. Tarski* ont démontré[14]) que pour

---

[13]) Décédé à Lwòw en août 1945.

[14]) Fund. Math. 6, p. 260 (Corollaire 20). Cf. aussi *A. Tarski*, Sur l'équivalence des polygones (en polonais) Przeglad Mat.-Fiz. 2, 1924, p. 12 et p. 14.

que deux polygones (situés dans un plan) soient équivalents par décomposition finie, il faut et il suffit qu'ils aient la même aire (il est à remarquer que la nécessité de cette condition est beaucoup plus difficile à démontrer que la suffisance).

On peut démontrer qu'un carré (fermé) est $\overline{\overline{_2}}$ avec un de ses vrais sous-ensembles et qu'un segment (fermé) de droite est $\overline{\overline{_3}}$ (mais n'est pas $\overline{\overline{_2}}$) avec un de ses vrais sous-ensembles. On peut aussi démontrer à l'aide de l'axiome du choix qu'un segment de droite est $\overline{\overline{_3}}$ avec un ensemble non mesurable contenant ce segment[15]).

On peut démontrer qu'un segment de droite n'est équivalent par décomposition finie à aucun segment plus petit. Cependant un segment de droite est équivalent par décomposition dénombrable (en ensembles non mesurables) à un segment plus petit. Pareillement un carré n'est équivalent par décomposition finie à un carré plus petit, mais la démonstration de cette proposition est beaucoup plus compliquée. Or, un cube est équivalent par décomposition finie à un cube plus petit, comme l'ont démontré à l'aide de l'axiome du choix *S. Banach* et *A. Tarski.*

On démontre que si

$A \supset E \supset B$ et $A \underset{n}{=} B$, on a $A \underset{n+1}{=} E$ [16]) et que si $A \underset{n}{=} B$ et $B \underset{m}{=} C$,

on a $A \underset{mn}{=} C$ [17]) (le nombre $mn$ ne peut pas être remplacé ici par un nombre plus petit). Il en résulte que l'équivalence par décomposition finie est une relation *transitive.*

On démontre que si $A \underset{n}{=} B_1 \subset B$ et $B \underset{m}{=} A_1 \subset A$, on a $A \underset{m+n}{=} B$ et il en résulte tout de suite que si $A \overset{f}{=} B_1 \subset B$ et $B \overset{f}{=} A_1 \subset A$, on a $A \overset{f}{=} B$.

On sait nommer une famille formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles de l'intervalle (0, 1) dont aucun n'est équivalent par décomposition finie à un sous-ensemble de l'autre. On sait aussi nommer une famille formée de $2^{\aleph_0}$ sous-ensembles dénombrables de l'intervalle (0, 1) dont aucun n'est équivalent par décomposition finie à un sous-ensemble de l'autre.

On connait des théorèmes concernant l'équivalence par décomposition finie dont l'énoncé est simple, mais dont la démonstration est difficile. Tel est p. e. le théorème suivant de *D. König* et *P. Valkó*[18]):

---

[15]) Voir *W. Sierpinski,* Prace Matemat.-Fiz. 43 (1935), p. 1.

[16]) Voir *W. Sierpinski,* Fund. Math. 33, p. 230 (Lemme 1); cf. *S. Banach* et *A. Tarski,* Fund. Math. 6, p. 252, Corollaire 9 et *A. Lindenbaum* et *A. Tarski,* Fund. Math. 6, p. 328, th. 9.

[17]) Cf. *S. Banach* et *A. Tarski,* Fund. Math. 6, p. 246—248 (Th. 3).

[18]) Fund. Math. 8, p. 131. Pour $m = 2$ voir *C. Kuratowski,* Fund. Math. 6, p. 236, pour $m = 2^n$: *S. Banach* et *A. Tarski,* Fund. Math. 6, p. 254.

Si l'on a, pour un nombre naturel $m$, deux décompositions d'un ensemble linéaire en $m$ ensembles disjoints

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_m = B_1 + B_2 + \cdots + B_m \;,$$

où $A_i \cong A_k$ et $B_i \cong B_k$ pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq m$, on a $A_1 \underset{m^2}{=} B_1$. La démonstration est difficile déjà pour $m = 3$.

En 1914 *F. Hausdorff* a démontré à l'aide de l'axiome du choix que la surface d'une sphère est une somme de quatre ensembles disjoints $A$, $B$, $C$, $D$, où $D$ est un ensemble dénombrable et où $A \cong B \cong C \cong B + C$[19]. En utilisant ce résultat *S. Banach* et *A. Tarski* ont démontré en 1924 que toute sphère $S$ (intérieur et surface) dans l'espace à 3 dimensions peut être décomposée en un *nombre fini* de parties disjointes dont on peut obtenir au moyen de mouvements convenables deux sphères disjointes de même rayon que la sphère $S$[20]. Or, le nombre fini en question n'a pas été précisé par ces auteurs.

En rapport avec ce résultat *M. J. von Neumann* affirme qu'on peut décomposer toute sphère de rayon 1 en 9 parties disjointes dont on peut former par des mouvements convenables deux sphères disjointes de rayon 1, en prenant respectivement 5 et les 4 restantes de ces parties[21]. Je ne sais pas comment *M. von Neumann* a déduit cette proposition des résultats de MM. *Banach* et *Tarski*. Or, je sais démontrer le théorème suivant:

Toute sphère $S$ peut être décomposée en 8 parties disjointes, dont 5 et 3 donnent respectivement, après des mouvements convenables, deux sphères disjointes de même rayon que la sphère $S$[22].

En utilisant les notations que nous avons introduit, ce théorème peut être exprimé de la façon suivante:

Toute sphère $S$ peut être décomposée en 2 parties disjointes, $S = N + (S - N)$ telles que $S \underset{5}{=} N$ et $S \underset{3}{=} S - N$.

Naturellement les nots „peut être décomposée" sont ici pris dans le sens idéaliste: les ensembles en lesquels on décompose la sphère sont ici non mesurables et nous ne savons pas les définir effectivement: leur existence résulte de l'axiome du choix.

Je sais aussi démontrer le théorème suivant:

Toute sphère $S$ se décompose en deux parties disjointes, $S = M + (S - M)$, où $S \underset{2}{=} M$ et $S \underset{6}{=} S - M$[23].

---

[19] *F. Hausdorff*, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 469—472.
[20] *S. Banach* et *A. Tarski*, Fund. Math. **6**, p. 262 (Lemme 22).
[21] *J. von Neumann*, Fund. Math. **13** (1929) p. 77.
[22] voir Fund. Math. **33** (1945), p. 229.
[23] Fund. Math. **33**, p. 234.

Il me semble difficile de résoudre le problème s'il existe une décomposition d'une sphère en moins que 8 parties disjointes, dont on pourrait former deux sphères.

Or, on peut démontrer que toute sphère $S$ contient une infinité dénombrable de parties disjointes et deux à deux congruentes dont chacune est $\underset{5}{=} S$[23]).

En utilisant une méthode développée à un but différent, mais connexe, par M. von Neumann[24]), j'ai démontré le théorème suivant :

Toute sphère $S$ est une somme d'une famille de puissance du continu d'ensembles disjoints dont chacun est $\underset{9}{=} S$[25]). La démonstration de ce théorème est d'ailleurs fort compliquée. On peut encore démontrer les théorèmes suivants :

La surface $S$ d'une sphère est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun est $\underset{8}{=} S$.

L'espace à trois dimensions, $R_3$, est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun est $\underset{9}{=} R_3$.

Deux polyèdres sont toujours équivalents par décomposition finie ; or, comme l'a démontré *Dehn*, même deux polyèdres ayant même volume peuvent pas être équivalents au sens de la géomètrie élémentaire, en particulier un tetraèdre régulier n'est pas équivalent au sens de la géomètrie élémentaire à une somme de deux tetraèdres[26]).

On dit qu'un ensemble de points *E admet une décomposition paradoxale* s'il est une somme de deux ensembles disjoints dont chacun lui est équivalent par décomposition finie.

On peut démontrer d'une façon élémentaire qu'aucun ensemble linéaire non vide n'admet de décompositions paradoxales. Or, comme nous avons vu, il existe des ensembles plans, même indénombrables admettant des décompositions paradoxales. Cependant le carré n'admet pas de décompositions paradoxales. Or, le cube en admet.

Pour le segment de droite et pour le carré nous avons cependant un autre paradoxe, trouvée par *M. J. von Neumann* en 1929.

$A$ et $B$ étant deux ensembles de points, nous dirons que l'ensemble $B$ est *métriquement plus petit* que l'ensemble $A$, s'il existe une transformation biunivoque $f$ de $A$ en $B$ qui diminue les distances entre les points. Plus précisément $\varrho(p, q)$ désignant la distance de $p$ à $q$, on doit avoir toujours $\varrho(f(p), f(q)) < \varrho(p, q)$ pour $p \in A$ et $q \in A$. Nous dirons que l'ensemble $B$ est *plus petit par décomposition finie* que l'ensemble $A$, s'il existe une

---

[24]) Fund. Math. 13 (1929), pp. 73—116, surtout pp. 109—111.

[25]) Fund. Math. 33, p. 244.

[26]) Math. Ann. 60.

décomposition des ensembles $A$ et $B$ en le même nombre fini $n$ d'ensembles disjoints, $A = A_1 + A_2 + \cdots A_n$, $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$, tels que, pour $k = 1, 2, \ldots, n$ l'ensemble $B_k$ est métriquement plus petit que l'ensemble $A_k$.

*M. J. von Neumann* a démontré à l'aide de l'axiome du choix qu'un segment de droite est plus petit par décomposition finie qu'un segment de longueur plus petite[27]). Sa démonstration est fort compliquée. Or, *S. Banach* et *A. Tarski* ont démontré à l'aide de l'axiome du choix que deux ensembles $A$ et $B$ situés sur la surface de la même sphère qui ne sont pas ensembles frontières (par rapport à cette sphère) sont équivalents par décomposition finie[28]). En partant de ce théorème on peut sans peine déduire qu'un cercle $K_1$ (intérieur et circonférence) est plus petit par décomposition finie qu'un cercle $K$ de rayon deux fois plus petit que celui du cercle $K_1$.

Soit $K$ le cercle $x^2 + y^2 \leqslant r^2$. A tout point $p(x, y)$ de $K$ faisons correspondre le point $f(p) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \sqrt{4r^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}\right)$. La fonction $f$ transforme, comme on voit sans peine, d'une façon biunivoque le cercle $K$ en la partie $Q$ de la surface de la sphère $S = [x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2]$, où $z \geqslant \frac{\sqrt{15}}{2} r$. Or, on prouve que $\varrho(f(p), f(q)) < \frac{8}{15} \varrho(p, q)$ pour $p \in K$, $q \in K$, ce qui prouve que l'ensemble $Q$ est métriquement plus petit que $K$. D'après le théorème cité de *Banach* et *Tarski* l'ensemble $Q$ est équivalent par décomposition finie à la demi-sphère $S_1 = [x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2,\ z \geqslant 0]$. Or, le cercle $K_1 = [x^2 + y^2 \leqslant 4r^2]$ est évidemment métriquement plus petit que $S_1$ (puisque $K_1$ est la projection de $S$, sur le plan $z = 0$). On en déduit toute de suite que le cercle $K_1$ dont le rayon est deux fois plus grand que celui du cercle $K$, est plus petit par décomposition finie que le cercle $K$. Pour plus de détails voir ma note qui paraîtra dans le t. 34 des Fundamenta Mathematicae.

En admettant l'hypothèse du continu je sais démontrer que la droite est une somme d'une famille de puissance du continu d'ensembles disjoints dont chacun est équivalent à la droite par décomposition dénombrable.

Il y a une liaison étroite entre l'existence de décompositions paradoxales et le problème de la mesure.

P. e. le fait que le segment est équivalent par décomposition dénombrable à un segment plus petit entraîne la non-existence pour les ensembles linéaires (bornés) d'une mesure non nulle identiquement, dé-

---

[27]) Fundamenta Mathematicae **13**, pp. 73—116.

[28]) Fund. Math. **6** (1924), p. 267, Th. 31.

nombrablement additive et invariante par rapport aux transformations isométriques.

Pareillement le fait qu'une sphère dans l'espace à 3 dimensions est équivalente par décomposition finie à une sphère plus petite entraîne pour tous les ensembles (bornés) dans l'espace à 3 dimensions la non-existence d'une mesure non nulle identiquement, simplement (c.-à-d. finiment) additive et invariante par rapport aux transformations isométriques.

Or, comme on sait, un segment n'est pas équivalent par décomposition finie à un segment plus petit ni un carré à un carré plus petit. D'autre part S. Banach a démontré l'existence pour tous les ensembles linéaires, respectivement plans d'une mesure non nulle identiquement, simplement additive et invariante par rapport aux transformations isométriques[29]).

Il se montre que la non-existence des décompositions paradoxales est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure. M. *A. Tarski* a envisagé cette condition sous une forme purement algébrique. Il a notamment démontré ce théorème[30]) :

Soit $S$ un ensemble formé d'éléments quelconques dans lequel est définie et exécutable une opération binaire, $+$, commutative et associative. Soit $\varepsilon$ un élément de $S$. Alors pour qu'il existe une fonction $f(\xi)$ faisant correspondre à tout élément $\xi$ de $S$ un nombre réel fini ou infini $f(\xi) \geqslant 0$, et telle que $f(\varepsilon) = 1$ et $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ pour $\alpha \in S$ et $\beta$, il faut et il suffit qu'on ait $(\varkappa + 1)\,\varepsilon \neq \varkappa\,\varepsilon$ et $(\varkappa + 1)\,\varepsilon + \eta \neq \varkappa\,\varepsilon$ pour $\varkappa = 1, 2, \ldots$ et $\eta \in S$.

La notion de congruence des ensembles de même que celle de leur équivalence par décomposition finie peuvent être appliquées aux ensembles plus généraux que les ensembles de points dans les espaces euclidiens. Il est évident qu'on peut appliquer ces notions à tous les ensembles entre les éléments desquels on a défini une *distance*, en particulier aux espaces métriques, semi-métriques, à une métrique faible, généralement métriques et autres.

Un espace métrique $M$ c'est un ensemble d'éléments quelconques, dits points de cet espace, où on l'a défini pour chaques deux points $a$ et $b$ de $M$ un nombre réel non négatif $\varrho(a, b)$, de sorte que les trois conditions suivantes soient toujours remplies :

1) $\varrho(a, b) = 0$ dans ce et seulement dans ce cas, où $a = b$,
2) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$ (loi de symmétrie),
3) $\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$ (loi du triangle).

---

[29]) Fund. Math. 4, pp. 7—33.

[30]) Fund. Math. 31, p. 56. Cf. C. R. Soc. Sc. Varsovie 21 (1929), p. 114.

On voit sans peine que tout espace métrique formé de deux points est congruent avec un sous-ensemble de la droite et que tout espace métrique formé de trois points est congruent avec un sous-ensemble du plan.

Cependant il existe des espaces métriques formés de 4 points qui ne sont congruents à aucun sous-ensemble de l'espace à 3 (ou même à un nombre fini quelconque de) dimensions. Or, on peut démontrer que tout espace métrique (et même semi-métrique, c.-à-d. dont la distance satisfait seulement aux conditions 1) et 2), dont tous 4 points forment un ensemble congruent à un sous-ensemble d'une droite est congruent à un sous-ensemble d'une droite. C'est un cas particulier d'un théorème plus général de *M. Menger*, d'après lequel un espace semi-métrique dont tous $n+3$ points forment un ensemble congruent à un sous-ensemble de l'espace euclidien $R_n$ à $n$ dimensions, est congruent à un sous-ensemble de $R_n$[31]). Or, si un espace semi-métrique a plus que 4 points dont tous 3 forment un ensemble congruent à un sous-ensemble d'une droite, cet espace est congruent à un sous-ensemble d'une droite[32]).

Appelons *espace métrique universel de puissance m* tout espace métrique de puissance $m$ qui contient pour tout autre espace métrique $M$ de puissance $m$ un ensemble isométrique avec $M$.

On démontre sans peine qu'il n'existe aucun espace métrique universel dénombrable et, plus généralement, aucun espace métrique universel de puissance inférieure à celle du continu. Or, en admettant l'hypothèse du continu j'ai démontré l'existence d'un ensemble métrique universel de puissance du continu. Plus généralement j'ai démontré que si $m$ est un nombre cardinal $\geqslant 2^{\aleph_0}$ tel qu'il n'existe aucun nombre cardinal $n$ satisfaisant à l'inégalité $n < m < 2^n$, il existe un espace métrique universel de puissance $m$. On en déduit que l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) est équivalente à l'existence d'un espace métrique universel de puissance $\aleph_1$. Tous ces résultats, dont la démonstration est assez compliquée, j'ai trouvé en 1940 : une note préliminaire a paru dans le vol. **75** des *Atti della R. Accademia della Scienze di Torino* (séance du 24 avril 1940) et la démonstration détaillée se trouve dans le tome **33** des *Fundamenta Mathematicae* (1945).

Parmi les espaces métriques un rôle important jouent, comme on sait, les espaces séparables. Ce sont les espaces métriques qui contiennent un ensemble dénombrable dense dans l'espace considéré, en d'autres termes des espaces métriques qui contiennent une suite infinie de points, telle que tout point de l'espace considéré est limite d'une suite extraîte de

[31]) Math. Ann. 100, p. 116; Amer. Journ. of Math. 53 (1931), p. 721.

[32]) *K. Menger*, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 40, p. 210.

cette suite. En 1925 *Paul Urysohn* a donné le premier exemple d'un espace métrique séparable $U$ qui contient un ensemble congruent avec tout espace métrique séparable[33]). Cet exemple est artificiel et fort compliquée. Or *S. Banach* et *S. Mazur* ont démontré que l'espace $(C)$ de toutes les fonctions continues dans l'intervalle $(0 \leq x \leq 1)$ avec la distance $r(f, g)$ définie par la formule

$$r(f, g) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$$

(qui, comme on sait, est un espace séparable) contient aussi un ensemble congruent avec tout espace métrique séparable. La démonstration publiée par *S. Banach*[34]) fait usage de la théorie des fonctionnelles linéaires. Une démonstration directe et plus élémentaire de ladite propriété de l'espace $(C)$ a été donné par moi dans le dernier volume des *Fundamenta Mathematicae*[35]).

On peut démontrer qu'il existe $2^m$ types métriques différents d'espaces métriques infinis de puissance $m$.

On voit ainsi comment une notion si simple et élémentaire comme celle de congruence des ensembles de points conduit aux problème parfois difficiles et même encore non résolus.

(Reçu le premier juillet 1946.)

[33]) C. R. Paris **180**, p. 83 et Bull. Sc. Math., 2e série **51** (1927) pp. 1—38.

[34]) *S. Banach*, Théorie des opérations linéaires, Monografie matematyczne I (Varsovie 1932), p. 187.

[35]) Fund. Math. **33**, pp. 115—122; cf. aussi ma note dans les Atti della R. Accademia di Torino, vol. **75**.