# Eine Erweiterung eines Theorems von Steinhaus-Rademacher.

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **19 (1946-1947)**

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17345

# Eine Erweiterung eines Theorems von Steinhaus-Rademacher

Von H. HADWIGER, Bern

Ist $A$ eine lineare Menge von positivem Maß $m(A) > 0$, so gibt es nach *H. Steinhaus*[1]) ein $\Delta > 0$, so daß $A$ für jedes $\Delta'$, $\Delta' < \Delta$, ein Punktepaar der Distanz $\Delta'$ enthält.

Nach einer sich auf den $n$-dimensionalen euklidischen Raum $R_n$ beziehenden Verallgemeinerung von *H. Rademacher*[2]) gibt es zu einer Menge $A \in R_n$ von positivem Maß $m(A) > 0$ ein $\Delta > 0$, so daß $A$ für jedes $\Delta'$, $\Delta' < \Delta$, und jede Raumrichtung ein Punktepaar der Distanz $\Delta'$ enthält, wobei die Verbindungsgerade der beiden Punkte die vorgeschriebene Raumrichtung repräsentiert.

Die Formulierung unserer Erweiterung vorbereitend, vermerken wir folgendes: Zwei kongruente Mengen heißen translationsgleich, wenn diese durch eine Translation miteinander zur Deckung gebracht werden können. Um die Lage einer aus der Menge $S$ durch Translation hervorgehenden Menge $S'$ zu fixieren, geben wir die Lage des einem fest gewählten Merkpunkte $P$ von $S$ entsprechenden Punktes $P'$ an. Als Maß einer Menge von translationsgleichen Mengen $S'$ dient das Maß der Menge der Punkte $P'$.

Es gilt nun der folgende

**Satz:** *Es sei $A \in R_n$ eine Menge von positivem Maß $m(A) > 0$; zu einer ganzen Zahl $k > 1$ und einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\Delta > 0$,* so *daß $A$ zu jeder aus $k$ Punkten bestehenden Menge $S \in R_n$ vom Durchmesser $D(S) < \Delta$ unendlich viele mit $S$ translationsgleiche Mengen $S'$ als Teilmengen enthält, und zwar so, daß für das Maß $m(M)$ der Menge $M$ der translationsgleichen $S'$ noch $m(M) > (1 - \varepsilon) m(A)$ gilt.*

Die Erweiterung gegenüber dem oben zitierten Theorem von *Steinhaus* und *Rademacher* besteht also einerseits darin, daß ein Punktepaar ersetzt wird durch eine beliebige endliche Menge, und daß andererseits unendlich viele derartige endliche Mengen als Teilmengen sichergestellt werden.

---

1) *H. Steinhaus*, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. Fund. Math. 1, 1920, 93—104.

2) *H. Rademacher*, Über eine Eigenschaft von meßbaren Mengen positiven Maßes. Jahresbericht der D.M.V. 30, 1921, 130—132.

Aus dem Satz ergibt sich noch als

**Korollar:** *Es sei $A \in R_n$ eine Menge von positivem Maß $m(A) > 0$; dann enthält $A$ zu jeder endlichen Menge $S$ eine ähnliche Menge $S'$ als Teilmenge; genauer: $A$ enthält jede zu $S$ ähnliche Menge $S'$ als Teilmenge, deren Durchmesser kleiner als eine von $S$ abhängige Schranke $\Delta > 0$ ist.*

Es kann hier darauf hingewiesen werden, daß diese Feststellung für lineare Mengen von *S. Ruziewicz*[3]) gemacht wurde.

Im nachfolgenden Beweis haben die Zeichen $A$, $m(A)$, $k$, $\varepsilon$, $\Delta$, $M$, $S$ und $D(S)$ die ihnen nach dem Wortlaut des zu beweisenden Satzes zukommende Bedeutung.

Bekanntlich gibt es eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge $A^0 \in A$, so daß

$$m(A^0) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) m(A) \tag{1}$$

ist. Es bezeichne nun $A^0[\varrho]$ die *Cantor-Minkowskische* Hülle von $A^0$ vom Radius $\varrho > 0$, d. h. die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius $\varrho$, deren Mittelpunkte in $A^0$ liegen. Da $A^0$ abgeschlossen ist, gilt in bekannter Weise

$$\lim_{\varrho \to 0} m(A^0[\varrho]) = m(A^0) \ . \tag{2}$$

Es gibt somit ein $\Delta > 0$ so, daß

$$m(A^0[\Delta]) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2k-2}\right) m(A^0) \tag{3}$$

gilt. Es bezeichne jetzt $S$ eine aus $k$ Punkten $P_i$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ bestehende endliche Menge vom Durchmesser $D(S) < \Delta$. Diese Menge $S$ werde nun relativ zur raumfesten Menge $A$ allen Translationen unterworfen. Die Lage der bewegten Menge $S'$ fixieren wir durch Angabe der $n$ cartesischen Koordinaten $x_i$ des Merkpunktes $P_1 = (x_1, \ldots, x_n)$. Ferner führen wir noch die folgenden Hilfsfunktionen ein:

Für eine endliche Menge $H$ bezeichne $p(H)$ die Punktanzahl von $H$; weiter sei $q(H) = 1$ oder $0$, je nachdem $H$ wenigstens einen Punkt enthält oder leer ist. Nun bilden wir die beiden $L$-Integrale

---

[3]) *S. Ruziewicz*, Contribution à l'étude des ensembles de distances de points. Fund. Math. 7, 1925, 141—143.

$$\Phi(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(A^0 S') dx_1 \ldots dx_n \tag{4}$$

und

$$\psi(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(A^0 S') dx_1 \ldots dx_n \; . \tag{5}$$

Im Hinblick auf die Beschränktheit der beteiligten Mengen erstrecken sich die beiden Integrationen effektiv nur über einen beschränkten Raumteil, da außerhalb eines solchen beide Integranden verschwinden. — Nun gilt offensichtlich

$$p(A^0 S') = \sum_1^k p(A^0 P'_v) \tag{6}$$

und da natürlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(A^0 P'_v) dx_1 \ldots, dx_n = m(A^0) \tag{7}$$

gilt, wird jetzt also

$$\Phi(S) = k\, m(A^0) \tag{8}$$

sein. — Bedenken wir ferner, daß der Integrand in (5) dann und nur dann den Wert 1, sonst 0, aufweist, wenn $S'$ mit $A^0$ wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, was wieder nur dann eintreten kann, wenn der Merkpunkt $P'_1$ in der Hülle $A^0[\Delta]$ liegt, so schließen wir auf

$$\psi(S) \leqq m(A^0[\Delta]) \; . \tag{9}$$

Es bezeichne nun $M_v$ $(v = 1, 2, \ldots k)$ die Menge der Punkte $P'_1$, für die $p(A^0 S') = v$ ist. Offenbar hat man

$$\Phi(S) = \sum_1^k v\, m(M_v) = k\, m(A^0) \tag{10}$$

und

$$\psi(S) = \sum_1^k m(M_v) \leqq m(A^0[\Delta]) \; . \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt mit nachfolgender Verwendung von (3)

$$k\psi(S) - \Phi(S) = \sum_1^{k-1} (k - v)\, m(M_v) < \frac{k\,\varepsilon}{2k - 2}\, m(A^0) \; . \tag{12}$$

Nun ist

$$\sum_{1}^{k-1} v m(M_v) \leqq (k-1) \sum_{1}^{k-1} (k-v)\, m(M_v) < \frac{k\varepsilon}{2}\, m(A^0) \tag{13}$$

und wegen (10) ist

$$m(M_k) = m(A^0) - \frac{1}{k} \sum_{1}^{k-1} v m(M_v) \tag{14}$$

und es folgt mit Berücksichtigung von (13)

$$m(M_k) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) m(A^0) \tag{15}$$

und im Hinblick auf (1) jetzt

$$m(M_k) > (1-\varepsilon) m(A) \; . \tag{16}$$

Da nun aber $M_k$ offenbar mit der im Satz genannten Menge $M$ identisch ist, schließt (16) den Beweis des Satzes ab.

(Eingegangen den 13. August 1946.)