**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 19 (1946-1947)

**Artikel:** Eine Erweiterung eines Theorems von Steinhaus-Rademacher.
**Autor:** Hadwiger, H.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-17345

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Eine Erweiterung eines Theorems von Steinhaus-Rademacher

Von H. Hadwiger, Bern

Ist $A$ eine lineare Menge von positivem Maß $m(A) > 0$, so gibt es nach *H. Steinhaus*[1]) ein $\Delta > 0$, so daß $A$ für jedes $\Delta'$, $\Delta' < \Delta$, ein Punktepaar der Distanz $\Delta'$ enthält.

Nach einer sich auf den $n$-dimensionalen euklidischen Raum $R_n$ beziehenden Verallgemeinerung von *H. Rademacher*[2]) gibt es zu einer Menge $A \in R_n$ von positivem Maß $m(A) > 0$ ein $\Delta > 0$, so daß $A$ für jedes $\Delta'$, $\Delta' < \Delta$, und jede Raumrichtung ein Punktepaar der Distanz $\Delta'$ enthält, wobei die Verbindungsgerade der beiden Punkte die vorgeschriebene Raumrichtung repräsentiert.

Die Formulierung unserer Erweiterung vorbereitend, vermerken wir folgendes: Zwei kongruente Mengen heißen translationsgleich, wenn diese durch eine Translation miteinander zur Deckung gebracht werden können. Um die Lage einer aus der Menge $S$ durch Translation hervorgehenden Menge $S'$ zu fixieren, geben wir die Lage des einem fest gewählten Merkpunkte $P$ von $S$ entsprechenden Punktes $P'$ an. Als Maß einer Menge von translationsgleichen Mengen $S'$ dient das Maß der Menge der Punkte $P'$.

Es gilt nun der folgende

**Satz:** *Es sei $A \in R_n$ eine Menge von positivem Maß $m(A) > 0$; zu einer ganzen Zahl $k > 1$ und einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\Delta > 0$, so daß $A$ zu jeder aus $k$ Punkten bestehenden Menge $S \in R_n$ vom Durchmesser $D(S) < \Delta$ unendlich viele mit $S$ translationsgleiche Mengen $S'$ als Teilmengen enthält, und zwar so, daß für das Maß $m(M)$ der Menge $M$ der translationsgleichen $S'$ noch $m(M) > (1 - \varepsilon) m(A)$ gilt.*

Die Erweiterung gegenüber dem oben zitierten Theorem von *Steinhaus* und *Rademacher* besteht also einerseits darin, daß ein Punktepaar ersetzt wird durch eine beliebige endliche Menge, und daß andererseits unendlich viele derartige endliche Mengen als Teilmengen sichergestellt werden.

---

[1]) *H. Steinhaus*, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. Fund. Math. 1, 1920, 93—104.

[2]) *H. Rademacher*, Über eine Eigenschaft von meßbaren Mengen positiven Maßes. Jahresbericht der D.M.V. 30, 1921, 130—132.

Aus dem Satz ergibt sich noch als

**Korollar:** *Es sei $A \in R_n$ eine Menge von positivem Maß $m(A) > 0$; dann enthält $A$ zu jeder endlichen Menge $S$ eine ähnliche Menge $S'$ als Teilmenge; genauer: $A$ enthält jede zu $S$ ähnliche Menge $S'$ als Teilmenge, deren Durchmesser kleiner als eine von $S$ abhängige Schranke $\Delta > 0$ ist.*

Es kann hier darauf hingewiesen werden, daß diese Feststellung für lineare Mengen von *S. Ruziewicz*[3]) gemacht wurde.

Im nachfolgenden Beweis haben die Zeichen $A$, $m(A)$, $k$, $\varepsilon$, $\Delta$, $M$, $S$ und $D(S)$ die ihnen nach dem Wortlaut des zu beweisenden Satzes zukommende Bedeutung.

Bekanntlich gibt es eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge $A^0 \in A$, so daß

$$m(A^0) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) m(A) \tag{1}$$

ist. Es bezeichne nun $A^0[\varrho]$ die *Cantor-Minkowskische* Hülle von $A^0$ vom Radius $\varrho > 0$, d. h. die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius $\varrho$, deren Mittelpunkte in $A^0$ liegen. Da $A^0$ abgeschlossen ist, gilt in bekannter Weise

$$\lim_{\varrho \to 0} m(A^0[\varrho]) = m(A^0) \ . \tag{2}$$

Es gibt somit ein $\Delta > 0$ so, daß

$$m(A^0[\Delta]) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2k-2}\right) m(A^0) \tag{3}$$

gilt. Es bezeichne jetzt $S$ eine aus $k$ Punkten $P_i$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ bestehende endliche Menge vom Durchmesser $D(S) < \Delta$. Diese Menge $S$ werde nun relativ zur raumfesten Menge $A$ allen Translationen unterworfen. Die Lage der bewegten Menge $S'$ fixieren wir durch Angabe der $n$ cartesischen Koordinaten $x_i$ des Merkpunktes $P_1 = (x_1, \ldots, x_n)$. Ferner führen wir noch die folgenden Hilfsfunktionen ein:

Für eine endliche Menge $H$ bezeichne $p(H)$ die Punktanzahl von $H$; weiter sei $q(H) = 1$ oder $0$, je nachdem $H$ wenigstens einen Punkt enthält oder leer ist. Nun bilden wir die beiden $L$-Integrale

---

[3]) *S. Ruziewicz*, Contribution à l'étude des ensembles de distances de points. Fund. Math. 7, 1925, 141—143.

$$\Phi(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(A^0 S') dx_1 \ldots dx_n \tag{4}$$

und

$$\psi(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(A^0 S') dx_1 \ldots dx_n \ . \tag{5}$$

Im Hinblick auf die Beschränktheit der beteiligten Mengen erstrecken sich die beiden Integrationen effektiv nur über einen beschränkten Raumteil, da außerhalb eines solchen beide Integranden verschwinden. — Nun gilt offensichtlich

$$p(A^0 S') = \sum_1^k p(A^0 P'_\nu) \tag{6}$$

und da natürlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(A^0 P'_\nu) dx_1 \ldots, dx_n = m(A^0) \tag{7}$$

gilt, wird jetzt also

$$\Phi(S) = k\, m(A^0) \tag{8}$$

sein. — Bedenken wir ferner, daß der Integrand in (5) dann und nur dann den Wert 1, sonst 0, aufweist, wenn $S'$ mit $A^0$ wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, was wieder nur dann eintreten kann, wenn der Merkpunkt $P'_1$ in der Hülle $A^0[\Delta]$ liegt, so schließen wir auf

$$\psi(S) \leqq m(A^0[\Delta]) \ . \tag{9}$$

Es bezeichne nun $M_v$ $(v = 1, 2, \ldots k)$ die Menge der Punkte $P'_1$, für die $p(A^0 S') = v$ ist. Offenbar hat man

$$\Phi(S) = \sum_1^k v\, m(M_v) = k\, m(A^0) \tag{10}$$

und

$$\psi(S) = \sum_1^k m(M_v) \leqq m(A^0[\Delta]) \ . \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt mit nachfolgender Verwendung von (3)

$$k\psi(S) - \Phi(S) = \sum_1^{k-1} (k - v)\ m(M_v) < \frac{k\varepsilon}{2k-2}\, m(A^0) \ . \tag{12}$$

Nun ist

$$\sum_{1}^{k-1} v m(M_v) \leqq (k-1) \sum_{1}^{k-1} (k-v)\, m(M_v) < \frac{k\varepsilon}{2} m(A^0) \tag{13}$$

und wegen (10) ist

$$m(M_k) = m(A^0) - \frac{1}{k} \sum_{1}^{k-1} v m(M_v) \tag{14}$$

und es folgt mit Berücksichtigung von (13)

$$m(M_k) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) m(A^0) \tag{15}$$

und im Hinblick auf (1) jetzt

$$m(M_k) > (1 - \varepsilon) m(A) \ . \tag{16}$$

Da nun aber $M_k$ offenbar mit der im Satz genannten Menge $M$ identisch ist, schließt (16) den Beweis des Satzes ab.

(Eingegangen den 13. August 1946.)