Mitteilung betreffend meine Note:

Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers

Von H. HADWIGER, Bern

In der genannten kürzlich erschienenen Note[1]) habe ich einen Beweis einer von *K. Borsuk* stammenden Vermutung mitgeteilt. Nach dieser Vermutung läßt sich jede Menge A des n-dim. euklidischen Raumes vom Durchmesser $D(A) = 1$ durch $n+1$ Mengen $A_i (i = 0, 1, \ldots n)$ der Durchmesser $D(A_i) < 1$ überdecken.

Da nach einem bekannten Satz die Menge A Teilmenge eines n-dim. Körpers K konstanter Breite $B(K) = 1$ ist, habe ich mich darauf beschränkt, die fragliche Aussage für solche Körper zu beweisen.

Anläßlich erneuter Lektüre meines Beweises[2]) habe ich die Feststellung gemacht, daß sich in der Beweiskonstruktion ein Fehlschluß vorfindet[3]). Damit wird mein Beweis ungültig, und die Frage der Richtigkeit dieser *Borsuk*'schen Vermutung bleibt ungeklärt.

---

[1]) Comm. math. helv. **18**, 1945/46, 73—75.

[2]) Die Beweiskonstruktion stützte sich u. a. auf die Tatsache, daß die Berührungsmenge KR von K mit der Umkugelfläche R von K nicht in einer Halbkugelschale von R liegt. In einem mir am 30. 1. 1946 zugegangenen Schreiben von Herrn *N. T. Hamilton*, Princeton, wird dargelegt, daß diese Aussage nur für die offene, i. a. nicht aber für die abgeschlossene Halbkugelschale zutrifft. Es wird ein von Herrn *R. H. Fox*, Princeton, konstruiertes Beispiel mitgeteilt:

Die Menge der Punkte, deren Zylinderkoordinaten die Relationen

$$3\varrho^2 + 4z^2 = 1\,, \quad \varrho \geqq 0\,, \quad \vartheta = 0\,, \frac{2\pi}{3}\,, \frac{4\pi}{3}$$

erfüllen, hat den Durchmesser 1. Man kann beweisen, daß ein beliebiger konvexer Körper konstanter Breite 1, der diese Menge enthält, die Umkugelfläche

$$\varrho^2 + z^2 = \frac{1}{3}$$

stets in den drei Punkten

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,, 0\,, 0\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \frac{2\pi}{3}\,, 0\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \frac{4\pi}{3}\,, 0\right)$$

berührt.

Dieser Möglichkeit Rechnung tragend, hat Herr *N. T. Hamilton* eine kleine Ergänzung zu meinem Beweis verfaßt. Von einer Veröffentlichung dieser Note mußte im Hinblick auf die später erfolgte, im Haupttext erwähnte Feststellung abgesehen werden.

[3]) Die auf Seite 74 unten bzw. Seite 75 oben gemachte Feststellung über den maximalen Winkel $\overline{\omega}$ ist irrtümlich erfolgt.

Dagegen kann der fragliche Satz unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen leicht bewiesen werden. Es sei mir gestattet, an dieser Stelle einen Beweis für Körper konstanter Breite mit regulärem Rand vorzutragen. Ein Randpunkt eines konvexen Körpers heißt bekanntlich regulär, wenn nur *eine* Stützebene durch diesen Randpunkt gelegt werden kann. Ein Körper konstanter Breite wird von jeder Stützebene in *nur* einem Punkt berührt. — Nennen wir ein Punktepaar, das durch die beiden Berührungspunkte paralleler Stützebenen gebildet wird, antipodisch, so kann der Durchmesser $D(K) = 1$ des Körpers konstanter Breite K nur durch antipodische Punktepaare realisiert werden. Der Rand S von K weise nun keine Singularitäten auf. In diesem Falle gibt es eine eineindeutige, stetige und antipodentreue Abbildung, die den Rand S auf die Oberfläche S^0 einer n-dim. Kugel K^0 abbildet. Nun läßt sich S^0 durch $n+1$ abgeschlossene Mengen $S_i^0 (i = 0, 1, \ldots n)$ überdecken, von denen keine ein antipodisches Punktepaar enthält. Die $n+1$ Mengen S_i, die den Mengen S_i^0 auf Grund der Abbildung auf S entsprechen, sind abgeschlossen und überdecken ihrerseits den Rand S. Wegen der Antipodentreue der Abbildung kann keine der Mengen S_i ein antipodisches Punktepaar enthalten, so daß alle Durchmesser $D(S_i) < 1$ sind.

Es sei nun P ein beliebiger innerer Punkt von K, und es bezeichne A_i die abgeschlossene Hülle der Menge $P + S_i$. Offenbar wird der Körper K durch die $n+1$ Mengen A_i der Durchmesser $D(A_i) < 1$ überdeckt, w. z. b. w.

(Eingegangen den 17. Juni 1946.)