Aire de l'Ellipse déterminée par cinq points.

Aire de l'Ellipse déterminée par cinq points

Par E. G. Rodeja F., Santiago de Compostela (Espagne)

L'objet de ce travail est l'obtention d'une formule permettant le calcul de l'aire d'une ellipse déterminée par cinq de ses points, sans calculer auparavant les éléments de la courbe. L'aire de l'ellipse est exprimée en fonction des aires des triangles déterminés par les cinq points; on a, donc, une formule qui demeure invariante dans les transformations d'équivalence affine. On peut regarder toute ellipse comme équivalente affine à un cercle; il suffit donc de trouver la formule pour le cercle, car elle restera valable pour l'ellipse.

Ces recherches ont été proposées dans les séances de la „*Seccion Matematica Duran Loriga*" de l'Observatoire de Santiago de Compostela (Espagne), en étudiant divers problèmes sur les orbites, et le procédé d'obtention s'accorde avec les idées de considérer une circonférence affine de l'ellipse, procédé employé par le Dr. Enrique Vidal Abascal dans le calcul des orbites des étoiles doubles visuelles[1]).

On peut considérer notre formule comme une généralisation des formules données par Steiner[2]) pour l'aire de l'ellipse en fonction du centre et de trois points, dans un cas, et en fonction du centre et de trois tangentes, dans un autre. Ces formules ont été démontrées nouvellement par Kollros[3]) qui, à son tour, donne une autre formule pour le cas où l'ellipse est déterminée par son centre et un triangle autopolaire.

Dans ce qui suit nous désignerons les points par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5; nous écrirons $(i\,j)$ pour désigner la distance du point i au point j; et, finalement, (ijk) indiquera l'aire du triangle dont les sommets sont i, j, k.

Rappelons un théorème de la Géométrie métrique. Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur sur le troisième côté. (Ce théorème se trouve déjà dans

---

1) El problema de la órbita aparente en las estrellas dobles visuales, por *Enrique Vidal Abascal*. — Publicaciones del Observatorio de Santiago II 1944.

2) Gesammelte Werke. — Reimer, Berlin 1882, Vol. 2, pag. 329.

3) Démonstrations de formules de Steiner. — Comment. Math. Helv. 16, 60—64 (1944).

l'Astronomie hindoue de Brahmagupta[4]). Ainsi, on peut calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle en fonction de ses côtés et de son aire :

$$2 r h_a = bc \ , \qquad 4r \tfrac{1}{2}\, a h_a = abc \ , \qquad 4r = \frac{abc}{\frac{1}{2} a h_a} \ ,$$

et, si 1, 2, 3 désignent les sommets, nous pouvons écrire avec la notation indiquée

$$4r = \frac{(12)\,(23)\,(31)}{(123)} \ . \tag{1}$$

Soient cinq points 1, 2, 3, 4, 5 sur une circonférence ; le problème consiste à calculer l'aire du cercle en fonction des aires des

$$\binom{5}{3} = 10$$

triangles qu'on peut former avec les cinq sommets. Chacun de ces dix triangles donne la même valeur pour le rayon r de la circonférence, moyennant la formule (1).

Ecrivons la valeur $4r$ obtenue au moyen des quatres triangles dont les sommets sont 1, 2, 3, 4. On a :

$$\frac{(12)\,(23)\,(31)}{(123)} = \frac{(23)\,(34)\,(42)}{(234)} = \frac{(34)\,(41)\,(13)}{(341)} = \frac{(41)\,(12)\,(24)}{(412)} \ .$$

En multipliant les deux premiers membres de ces égalités et les deux derniers, on trouve :

$$\frac{(12)\,(23)\,(31)\,(23)\,(34)\,(42)}{(123)\,(234)} = \frac{(34)\,(41)\,(13)\,(41)\,(12)\,(24)}{(341)\,(412)} \ ,$$

ce qui se réduit à

$$\frac{(23)^2}{(123)\,(234)} = \frac{(41)^2}{(341)\,(412)} \ . \tag{2}$$

Cette formule, ainsi que ses analogues, permet d'exprimer la longueur d'un des segments en fonction des aires de triangles et de la longueur d'un segment non contigu ;

$$(41)^2 = \frac{(341)\,(412)}{(123)\,(234)}\,(23)^2 \ . \tag{3}$$

---

[4]) Voir par exemple: Elementos de Matemáticas Dr. *Ricardo Baltzer*, Geometria. Primera parte; Planimetria XIV (134).

Maintenant, nous pouvons calculer la longueur d'un des segments en fonction d'aires et de la longueur d'un segment contigu ; par exemple, le (23) en fonction de (12). Pour cela, il suffit d'appliquer les formules semblables à (2) aux segments considérés et au (45) non contigu de l'un ni de l'autre

$$\frac{(23)^2}{(523)\,(234)} = \frac{(45)^2}{(345)\,(452)} \qquad \frac{(45^2)}{(245)\,(451)} = \frac{(12)^2}{(512)\,(124)}$$

d'où

$$(23)^2 = \frac{(523)\,(234)\,(245)\,(451)}{(345)\,(452)\,(512)\,(124)}\,(12)^2 = \frac{(523)\,(234)\,(451)}{(345)\,(512)\,(124)}\,(12)^2\,. \tag{4}$$

La formule analogue pour (31) en fonction de (12) est :

$$(31)^2 = \frac{(513)\,(134)\,(452)}{(345)\,(521)\,(214)}\,(12)^2\,. \tag{5}$$

La substitution de (23) et de (31), que nous venons d'obtenir, dans la formule (1), permet le calcul du rayon de la circonférence en fonction de la longueur d'un seul segment et des aires de triangles ;

$$16r^2 = \frac{(12)^2\,(23)^2\,(31)^2}{(123)^2} = \frac{(523)\,(234)\,(451)\,(513)\,(134)\,(452)}{(345)\,(512)\,(124)\,(345)\,(521)\,(214)}\,\frac{(12)^6}{(123)^2} \tag{6}$$

en simplifiant et ordonnant :

$$16r^2 = \left[\frac{(134)\,(145)\,(153)\,(234)\,(245)\,(253)}{(123)^2\,(124)^2\,(125)^2\,(345)^2}\right](12)^6\,. \tag{7}$$

Nous indiquerons l'expression comprise entre les crochets avec le symbole [1—2], et de même les analogues.

$$(12) = \sqrt[6]{\frac{16r^2}{[1-2]}} = \frac{\sqrt[3]{4r}}{\sqrt[6]{[1-2]}}\,. \tag{8}$$

Nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{aligned}
[1-2] &= \frac{(134)\,(145)\,(153)\,(234)\,(245)\,(253)}{(123)^2\,(124)^2\,(125)^2\,(345)^2} \\
[2-3] &= \frac{(214)\,(245)\,(251)\,(314)\,(345)\,(351)}{(123)^2\,(234)^2\,(235)^2\,(145)^2} \\
[3-1] &= \frac{(234)\,(345)\,(352)\,(124)\,(145)\,(152)}{(123)^2\,(314)^2\,(315)^2\,(245)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

En multipliant et simplifiant, on trouve :

$$[1-2]\,[2-3]\,[3-1] = \frac{1}{(123)^6} \,. \tag{10}$$

La formule de Heron, qui donne l'aire d'un triangle en connaissant les côtés,

$$\left.\begin{array}{ll} A = \sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \;, & \\ 2p = a+b+c \;, & 2(p-a) = -a+b+c \;, \\ 2(p-b) = a-b+c \;, & 2(p-c) = a+b-c \end{array}\right\} \tag{11}$$

appliquée à un des triangles, par exemple le (123), donne

$$16(123)^2 = \left[(12)+(23)+(31)\right]\left[-(12)+(23)+(31)\right]$$

$$\left[(12)-(23)+(31)\right]\left[(12)+(23)-(31)\right] \,. \tag{12}$$

Si l'on remplace la longueur des côtés par leurs valeurs déduites de (8) et ses analogues on a :

$$16(123)^2 = (\sqrt[3]{4r})^4 \left[\frac{1}{\sqrt[6]{[1-2]}} + \frac{1}{\sqrt[6]{[2-3]}} + \frac{1}{\sqrt[6]{[3-1]}}\right]$$

$$\left[-\frac{1}{\sqrt[6]{[1-2]}} + \frac{1}{\sqrt[6]{[2-3]}} + \frac{1}{\sqrt[6]{[3-1]}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt[6]{[1-2]}} - \frac{1}{\sqrt[6]{[2-3]}} + \frac{1}{\sqrt[6]{[3-1]}}\right] \cdot$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt[6]{[1-2]}} + \frac{1}{\sqrt[6]{[2-3]}} - \frac{1}{\sqrt[6]{[3-1]}}\right] \cdot \tag{13}$$

Nous effectuons le calcul du premier crochet, ayant égard aux expressions (9) des $[1-2]$, $[2-3]$, $[3-1]$; on a des résultats analogues pour les crochets restants.

On trouve

$$\frac{\sqrt{(123)}}{\sqrt[6]{P}}\left[\sqrt{L} + \sqrt{M} + \sqrt{N}\right] ,$$

où P désigne le produit des aires des dix triangles

$$P = (123)\,(124)\,(125)\,(134)\,(135)\,(145)\,(234)\,(235)\,(245)\,(345)\ ,$$

et (14)

$$L = (124)\,(125)\,(345)\ ,\quad M = (234)\,(235)\,(145)\ ,\quad N = (314)\,(315)\,(245)\ .$$

Les valeurs obtenues dans la formule (13) donnent :

$$16(123)^2 = (\sqrt[3]{4r})^4 \frac{(123)^2}{\sqrt[3]{P^2}} (\sqrt{L} + \sqrt{M} + \sqrt{N})\ (-\sqrt{L} + \sqrt{M} + \sqrt{N})$$
$$(\sqrt{L} - \sqrt{M} + \sqrt{N})\ (\sqrt{L} + \sqrt{M} - \sqrt{N})\ . \tag{15}$$

D'où, en simplifiant, on obtient pour r la valeur qui en πr^2 exprime l'aire du cercle au moyen de la formule

$$A = \pi r^2 = \tag{16}$$
$$= \frac{4\pi P}{\left[(\sqrt{L}+\sqrt{M}+\sqrt{N})\ (-\sqrt{L}+\sqrt{M}+\sqrt{N})\ (\sqrt{L}-\sqrt{M}+\sqrt{N})\ (\sqrt{L}+\sqrt{M}-\sqrt{N})\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Puisque, comme il a été dit, cette formule reste invariante dans une équivalence affine, on déduit finalement :

L'aire d'une ellipse déterminée par cinq points 1, 2, 3, 4, 5 *est exprimée par la formule antérieure, dont les notations appartiennent maintenant à ces points.*

Le dénominateur de l'expression précédente n'est pas symétrique par rapport aux sommets, car nous avons employé pour l'obtenir le triangle 123 d'une manière particulière dans l'application de la formule de Heron ; on en obtiendra, donc, d'autres analogues en employant les triangles restants.

(Reçu le 9 décembre 1946.)