Une définition géométrique de l'anneau de cohomologie d'une multiplicité.

Une définition géométrique de l'anneau de cohomologie d'une multiplicité

(extrait d'une conférence faite à Bienne, le 26 mai 1946, à la Société mathématique suisse)

Par JEAN LERAY, Paris

L'anneau de cohomologie d'un espace possède la propriété remarquable d'avoir des définitions très diverses, comme l'ont montré M. de Rham[1]), puis, à la suite des travaux de M. Alexander[2]) et de M. Kolmogoroff[3]), l'école américaine[4]) et l'école russe[5]). J'ai été amené, en édifiant une théorie des équations valable dans les espaces non linéaires, à définir encore autrement cet anneau[6]) et en particulier à signaler[7]) une définition de l'anneau de cohomologie d'une multiplicité très analogue à la définition classique des groupes de Betti; cette définition, grâce à sa nature géométrique, est particulièrement commode quand on veut voir intuitivement l'anneau de cohomologie d'une multiplicité peu compliquée. Je me propose de l'énoncer dans toute sa simplicité, sans la rattacher aux définitions plus générales que j'ai citées.

Nous nommerons groupes d'homologie les groupes qu'il est usuel de nommer groupes de cohomologie, car leurs éléments seront des classes de cycles homologues; nous nommerons groupes de Betti les groupes qu'il est usuel de nommer groupes d'homologie.

Soit M une multiplicité fermée[8]) à N dimensions. La définition classique des groupes de Betti de M consiste à construire dans M des formes linéaires (nommées souvent: chaînes), des cycles et des classes d'homologie à l'aide d'éléments x_p de la nature suivante: x_p est constitué par une cellule convexe $|x_p|$ à p dimensions et une orientation de la variété linéaire contenant cette cellule. On peut édifier une théorie analogue à l'aide d'éléments X^p constitués par une cellule convexe $|X^p|$ à $N-p$

---

1) *De Rham:* Journal de Math. pures et appliquées 10, 1931, p. 115—220. — Enseignement math. 1936, p. 213—228. — Abhandl. math. Seminar 12, 1938, p. 313—339.

2) *Alexander,* Ann. of Math. 37, 1936, p. 698. — Proc. Nat. Acad. USA 22, 1936.

3) *Kolmogoroff:* C. R. Acad. Sc. 202, 1936, p. 1144, 1325, 1558, 1641.

4) *Lefschetz:* Algebraic topology, Amer. math. Soc. Coll. publ. 27

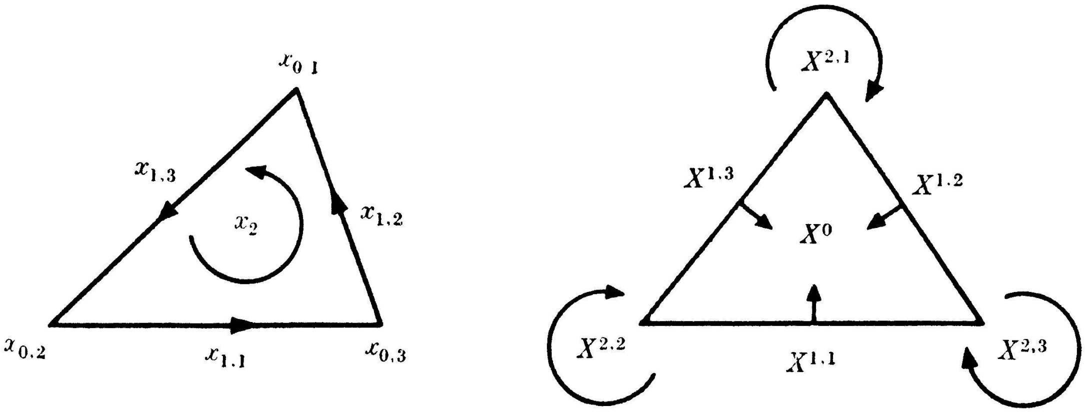
5) *Alexandroff:* Trans. Amer. Math. Soc. 49, 1941, p. 41.

6) Journal de Math. pures et appliquées, t. 24, 1945, p. 95—248.

7) l. c. 6), p. 187—189.

8) pour le cas des multiplicités ouvertes voir l. c. 7).

dimensions et une orientation des variétés planes à p dimensions contenant un point et un seul de $|X^p|$; cette orientation doit varier continûment avec cette variété; on la définira par la donnée de p vecteurs dont aucune combinaison linéaire ne sera nulle ni parallèle à $|X^p|$; l'ordre de ces vecteurs sera précisé; mais on pourra, sans changer le signe de X^p,



$\dot{x}_2 = x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3}$	$\dot{X}^0 = X^{1,1} + X^{1,2} + X^{1,3}$
$\dot{x}_{1,1} = x_{0,3} - x_{0,2}$	$\dot{X}^{1,1} = X^{2,3} - X^{2,2}$
$\dot{x}_{1,2} = x_{0,1} - x_{0,3}$	$\dot{X}^{1,2} = X^{2,1} - X^{2,3}$
$\dot{x}_{1,3} = x_{0,2} - x_{0,1}$	$\dot{X}^{1,3} = X^{2,2} - X^{2,1}$
$\dot{x}_{0,\alpha} = 0$	$\dot{X}^{2,\alpha} = 0$

Cas d'une multiplicité M à $N = 2$ dimensions

Figure 1

leur faire subir une substitution linéaire de déterminant positif ou ajouter à chacun d'eux un vecteur parallèle à $|X^p|$. La dérivée de l'élément X^p sera

$$\dot{X}^p = \sum_\alpha X^{p+1,\alpha} ,$$

les cellules $|X^{p+1,\alpha}|$ constituant la frontière de la cellule $|X^p|$, l'orientation de $X^{p+1,\alpha}$ étant définie par un vecteur dirigé vers l'intérieur de $|X^p|$ et par les p vecteurs définissant l'orientation de X^p; on voit aisément que la dérivée de $\dot{X}^p$ est nulle. On considère des formes $L^p = \sum_\alpha a_\alpha X^{p,\alpha}$, où les $X^{p,\alpha}$ sont de tels éléments et où les coéfficients a_α sont des éléments d'une groupe abélien A ; la dérivée de la forme $L^p = \sum_\alpha a_\alpha X^{p,\alpha}$ est la forme $\dot{L}^p = \sum_\alpha a_\alpha \dot{X}^{p,\alpha}$; une forme est nommée cycle quand sa dérivée est nulle; les dérivées des formes sont des cycles, qu'on dit homologues à zéro; les classes de cycles deux à deux homoogues sont nommées classes d'homologie; elles constituent des groupes abéliens: les groupes d'homologie de M relatifs à A.

Si M est orientable ou si on calcule mod. 2 on peut identifier chaque X^p à un x_{N-p}; le $p^{\text{ième}}$ groupe d'homologie s'identifie au $(N-p)^{\text{ième}}$ groupe de Betti.

On peut définir l'intersection

$$x_{q-p} = X^p \cdot x_q$$

d'éléments X^p et x_q en position générale l'un par rapport à l'autre: $x_{q-p} = 0$ si $|X^p| \cdot |x_q|$ est vide, en particulier si $q < p$; sinon $|x_{q-p}| = |X^p| \cdot |x_q|$ est une cellule convexe à $q-p$ dimensions; définissons l'orientation de x_q par q vecteurs parallèles à $|x_q|$ dont les p derniers définissent l'orientation de X^p et les $q-p$ premiers appartiennent à $|x_{q-p}|$; ils définiront l'orientation de x_{q-p}. De cette définition de $X^p \cdot x_q$ résulte une définition de l'intersection [9]) d'un élément Z^p du $p^{\text{ième}}$ groupe d'homologie par un élément z_q du $q^{\text{ième}}$ groupe de Betti: c'est un élément $Z^p \cdot z_q$ du $(q-p)^{\text{ième}}$ groupe de Betti. L'étude de cette intersection montre la dualité du $p^{\text{ième}}$ groupe d'homologie et du $p^{\text{ième}}$ groupe de Betti.

On peut définir l'intersection $X^p \cdot X^q$ de deux éléments X^p et X^q en position générale l'un par rapport à l'autre: $X^p \cdot X^q = 0$ si $|X^p| \cdot |X^q|$ est vide, en particulier si $N < p + q$; sinon $|X^p \cdot X^q| = |X^p| \cdot |X^q|$ est une cellule à $N - p - q$ dimensions; les p vecteurs définissant l'orientation de X^p, suivis des q vecteurs définissant l'orientation de X^q définiront l'orientation de l'élément $X^p \cdot X^q$. De cette définition de $X^p \cdot X^q$ résulte, quand A est un anneau, une définition de l'intersection [10]) de deux classes d'homologie Z^p et Z^q: c'est un élément $Z^p \cdot Z^q$ du $(p+q)^{\text{ième}}$ groupe d'homologie. On sait que l'intersection des éléments des groupes de Betti n'est définie que si M est orientable ou si l'on calcule mod. 2; alors ces éléments s'identifient aux classes d'homologie et leur intersection s'identifie à l'intersection des classes d'homologie que nous venons de définir. Les relations évidentes

$$X^p \cdot X^q = (-1)^{pq} X^q \cdot X^p \quad \text{et} \quad X^p \cdot (X^q \cdot x_r) = (X^p \cdot X^q) \cdot x_r$$

nous donnent, entre les classes d'homologie Z^p et les éléments z_r des groupes de Betti, les relations

$$Z^p \cdot Z^q = (-1)^{pq} Z^q \cdot Z^p \quad \text{et} \quad Z^p \cdot (Z^q \cdot z_r) = (Z^p \cdot Z^q) \cdot z_r .$$

---

[9]) Cette intersection peut être identifiée au „cap product" de Whitney.

[10]) Cette intersection peut être identifiée au „cup product" de Whitney.

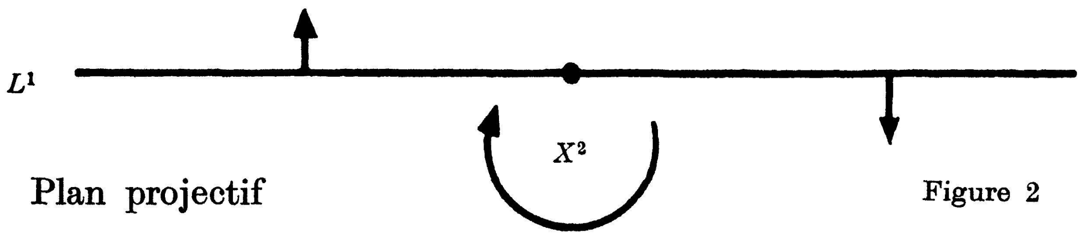
Soit m une sous-multiplicité à n dimensions de M ; on peut définir l'intersection $X^p \cdot m$ d'un élément X^p par m, quand $| X^p |$ est en position générale par rapport à m: $X^p \cdot m = 0$ si $| X^p | \cdot m$ est vide; sinon $| X^p \cdot m | = | X^p | \cdot m$ est une cellule à $n - p$ dimensions; les p vecteurs définissant l'orientation de l'élément X^p peuvent être pris dans m et définissent l'orientation de l'élément $X^p \cdot m$. De cette définition de $X^p \cdot m$ résulte la définition de l'intersection $Z^p \cdot m$ des classes d'homologie Z^p de M par la sous-multiplicité m ; cette intersection est un homomorphisme; si $m' \subset m \subset M$, alors $(Z^p \cdot m) \cdot m' = Z^p \cdot m'$.

Pour terminer, à titre d'exemple, déterminons les classes d'homologie Z^p du plan projectif, pour $p > 0$. Soit L^1 la forme constituée par: 1° une droite projective $| L^1 |$ et l'un de ses points, $| X^2 |$; 2° une orientation, variant continûment, des droites coupant $| L^1 |$ en un point unique, autre que $| X^2 |$. La dérivée de L^1 est $L^1 = 2X^2$, X^2 étant l'élément constitué par le point $| X^2 |$ et une orientation convenable de son voisinage.

On voit aisément que tout cycle Z^2 est homologue à un multiple aX^2 de X^2 et que tout cycle Z^1 est homologue à un multiple $a\,L^1$ de L^1, où $2a = 0$. Les classes d'homologie cherchées sont donc: la classe Z^2 qui contient l'élément X^2 ; les classes $Z^{1,\alpha}$ qui contiennent les cycles $a_\alpha L^1$, les a_α étant les éléments de A tels que $2a_\alpha = 0$.

On a

$$2Z^2 = 0\,;\quad 2Z^1 = 0\,;\quad Z^2 \cdot Z^2 = 0\,;\quad Z^2 \cdot Z^{1,\alpha} = 0\,;\quad Z^{1,\alpha} \cdot Z^{1,\beta} = a_\alpha a_\beta Z^2\ .$$



Plan projectif

Figure 2

Complément inséré lors de la correction des épreuves. Des définitions trés voisines des précédentes furent données en 1932 par M. G. *De Rham* (Comm. Math. Helv., 4, p. 151—157) ; notre travail cité (l. c. 7) prouve que ces définitions, sous la forme que nous leur donnons ci-dessus, sont des cas particuliers de définitions applicables aux espaces compacts ; aussi croyons-nous intéressant de les rappeler à ceux que rebute le caractère peu intuitif et peu géométrique des définitions usuelles de l'anneau de cohomologie.

(Reçu le 3 décembre 1946.)