Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 21 (1948)

Artikel: Areolar monogene und poyanalytische Funktionen.

Autor: Kriszten, Adolf

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18598

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 13.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Areolar monogene und polyanalytische Funktionen

Von Adolf Kriszten, Zürich

1. In den letzten Jahren wurden mehrfach Klassen von Funktionen untersucht, die in gewissem Sinn als Verallgemeinerungen der analytischen Funktionen aufgefaßt werden können. Die eine Möglichkeit, derartige Funktionen zu bilden, besteht darin, daß man die Dimension des betrachteten Raumes vergrößert; dies führt auf die sogenannten regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen oder noch allgemeiner auf die regulären hyperkomplexen Funktionen[1]). Zweitens kann man in der Ebene andere als die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zugrunde legen. In dieser Weise lassen sich die sogenannten *areolar monogenen* (besser *bianalytischen*) Funktionen definieren[2]). Es ist das Ziel dieser Arbeit die, den Cauchyschen Sätzen entsprechenden Integralsätze für diese Klasse von Funktionen herzuleiten. Trotz der einfachen Beweise sind diese Sätze meines Wissens neu. In einem zweiten Teil werden wir die erhaltenen Resultate auf die hier definierten *polyanalytischen* Funktionen verallgemeinern.

---

[1]) *Rud. Fueter*, Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variabeln, Comm. Math. Helv., vol. 7, S. 307.

Rud. Fueter, Die Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen, Comm. Math. Helv., vol. 16, S. 19.

Walter Nef, Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Fatou für Potentialfunktionen, Comm. Math. Helv., vol. 16, S. 215.

Walter Nef, Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Comm. Math. Helv., vol. 17, S. 83.

Adolf Kriszten, Funktionentheorie und Randwertproblem der Diracschen Differentialgleichungen, Comm. Math. Helv., vol. 20, S. 333.

[2]) *D. Pompeiu*, Sur une classe de fonctions d'une variable complexe, Rendiconti Circ. Mat. Palermo, vol. 33.

N. Cioranescu, Sur la définition de la monogénéité et les fonctions monogènes aréolairement, Mathematica Cluj, vol. 12.

Haskell, Areolar monogenic functions, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52.

Reade, On areolar monogenic functions, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 53.

2. Bekanntlich können die analytischen Funktionen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

definiert werden. Dieser einen komplexen Differentialgleichung entsprechen die zwei reellen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ . \tag{1a}$$

Definition. Die Funktion $f(z) = u + iv$ *heißt in einem Gebiet* H *areolar-monogen (a.-m.), wenn ihre Komponenten* u *und* v *in* H *zweimal stetig nach* x *und* y *differenzierbar sind, und wenn in* H *die Beziehungen gelten:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = 0 \ , \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0 . \tag{2a}$$

Um diese Gleichungen analog zu (1) bequem schreiben zu können, definieren wir

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \ , \qquad \overline{A} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \ ;$$

(1) nimmt die Form $Af = 0$ an, und (2a) können wir komplex zusammenfassen zu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2i\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = A^2 f = 0 \ . \tag{2}$$

Satz 1. *Die Komponenten* u *und* v *einer a.-m. Funktion* $f(z) = u + iv$ *sind biharmonisch:*

$$\Delta\Delta u = \Delta\Delta v = 0 \ .$$

Beweis. Es ist

$$\overline{A}^2 A^2 = \Delta\Delta \ , \qquad \text{also gilt} \qquad \Delta\Delta f = \Delta\Delta u + i\Delta\Delta v = 0 \ .$$

Satz 2. *Es sei* $u(x,y)$ *eine in einem Rechteck* R*, dessen Seiten parallel der* x*- resp.* y*-Axe sind, viermal stetig nach* x *und* y *differenzierbare, biharmonische Funktion. Dann existiert in* R *eine Funktion* $v(x,y)$ *derart, daß* $f(z) = u + iv$ *in* R *a.-m. ist.*

Beweis. Es sei (a, b) ein fester, (x, y) ein variabler Punkt von R. Aus der ersten der Gleichungen (2a) folgt

$$v(x, y) = \frac{1}{2} \int_a^x \int_b^y \left\{ \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right\} d\xi \, d\eta + v_1(x) + v_2(y) \; ;$$

eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir

$$\frac{1}{2} \int_b^y \left\{ \frac{\partial^3 u(x, \eta)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u(x, \eta)}{\partial x \, \partial \eta^2} \right\} d\eta - \frac{1}{2} \int_a^x \left\{ \frac{\partial^3 u(\xi, y)}{\partial \xi^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u(\xi, y)}{\partial y^3} \right\} d\xi +$$

$$+ v_1''(x) - v_2''(y) + 2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \, \partial y} = 0 \; .$$

Um $v_1(x)$ zu bestimmen, differentieren wir nach x; unter Verwendung der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ können wir schreiben

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 u(x, \eta)}{\partial \eta^3} \bigg|_{\eta = b} + \frac{3}{2} \frac{\partial^3 u(x, \eta)}{\partial x^2 \, \partial \eta} \bigg|_{\eta = b} + v_1'''(x) = 0 \; . \tag{3}$$

Die Variable y tritt nicht mehr auf, somit kann $v_1(x)$ aus (3) bestimmt werden. Analog gehen wir zur Bestimmung von $v_2(y)$ vor. Durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten in $v_1(x)$ und $v_2(y)$ können wir erreichen, daß die Funktion $f(z) = u + iv$ die Gleichung (2) erfüllt.

Der Satz 2 läßt sich auch für allgemeinere Bereiche als Rechtecke aussprechen, doch gehen wir hierauf nicht ein.

3. *Der erste Integralsatz.* Wir betrachten zwei, in einem Gebiet H und auf dessen (genügend regulärem) Rande s zweimal stetig nach x und y differenzierbare, komplexe Funktionen $g(z)$ und $f(z)$. Es gilt in H

$$g A^2 f = A(g A f) - (A g)(A f) = A(g A f) - A(f A g) + f A^2 g \; ,$$

also

$$g A^2 f - f A^2 g = A(g A f - f A g) \; . \tag{4}$$

Aus der Identität (4) erhalten wir eine Art *Green*sche Formel

$$\iint_H (g A^2 f - f A^2 g) \, dx \, dy = -i \int_s (g A f - f A g) \, dz \; .$$

Satz 3. (*1. Integralsatz.*) *Es seien zwei, in einem Gebiet H und auf seinem Rande s, a.-m. Funktionen $g(z)$ und $f(z)$ gegeben. Dann gilt*

$$\int_s (gAf - fAg)\, dz = 0 \ . \tag{5}$$

Beweis. Unter den obigen Voraussetzungen ist $gA^2f - fA^2g = 0$ in H.

Ist speziell $g = 1$, so erhalten wir

$$\int_s Af\, dz = 0 \ , \tag{5'}$$

denn Af ist analytisch und (5′) ist der erste Integralsatz von Cauchy.

4. *Der zweite Integralsatz.* Wir betrachten wieder das einfach zusammenhängende Gebiet H und seine Randkurve s; z sei ein fester, *innerer* Punkt von H, $\zeta = \xi + i\eta$ ein variabler Punkt von H oder s. $f(z)$ sei eine beliebige in H und auf s a.-m. Funktion, als zweite Funktion wählen wir die Funktion von z und ζ

$$g(z,\zeta) = \frac{\overline{\zeta - z}}{2(\zeta - z)} \ ;$$

als Funktion von ζ $(\zeta \neq z)$ ist $g(z, \zeta)$ a.-m. Es gilt

$$A^{(\zeta)} g(z,\zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \ ; \qquad A^{(\zeta)} = \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \ .$$

Wir schließen z durch einen kleinen Kreis k aus dem Gebiet H aus und erhalten

$$\int_s \left\{ \frac{\overline{\zeta - z}}{2(\zeta - z)} Af(\zeta) - f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} \right\} d\zeta =$$

$$= \int_k \left\{ \frac{\overline{\zeta - z}}{2(\zeta - z)} \ Af(\zeta) - f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} \right\} d\zeta \ .$$

$g(z, \zeta)$ ist für $z = \zeta$ zwar unstetig, bleibt aber endlich; indem wir k gegen z konvergieren lassen, ergibt sich

Satz 4. (*2. Integralsatz.*) *Es sei $f(z)$ eine, in einem einfach zusammenhängenden Gebiet H und auf seinem Rande s a.-m. Funktion. Dann kann der Funktionswert $f(z)$ in jedem innern Punkt z von H aus den Werten von $f(\zeta)$ und $Af(\zeta)$ auf s berechnet werden als*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s}\left\{\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{\overline{\zeta - z}}{2(\zeta - z)}\,Af(\zeta)\right\}d\zeta \;.$$

5. *Polyanalytische Funktionen. Definition: Eine Funktion $f(z) = u + iv$ heißt in einem Gebiete H polyanalytisch, wenn ihre Komponenten u und v in H n-mal stetig differenzierbar sind, und $f(z)$ in H der Differentialgleichung*

$$A^n f(z) = 0 \qquad (n \text{ feste, natürliche Zahl})$$

genügt.

Die a.-m. Funktionen sind identisch mit den bianalytischen Funktionen ($n = 2$). Die Komponenten einer polyanalytischen Funktion genügen der Differentialgleichung

$$\Delta^n u = \Delta^n v = 0 \;.$$

Es gilt die folgende Identität:

$$gA^n f = A(gA^{n-1}f) - AgA^{n-1}f =$$

$$= A[gA^{n-1}f - AgA^{n-2}f + \cdots + (-1)^{n-1}A^{n-1}gf] + (-1)^n A^n gf \;,$$

also

$$gA^n f + (-1)^{n-1}A^n gf = A\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k A^k g A^{n-1-k} f\right] \quad (A^0 = 1) \;,$$

wobei g und f zwei n mal stetig partiell differenzierbare, komplexe Funktionen bedeuten. Aus dieser Identität folgt der

Satz 3*. *Es seien zwei in einem Gebiet H und auf seinem Rande s polyanalytische Funktionen gegeben. Dann gilt*

$$\int\limits_{s}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k A^k g\, A^{n-1-k} f\right]dz = 0 \;.$$

Um den zweiten Integralsatz herzuleiten, verwenden wir als Hilfsfunktion g die Funktion

$$g_n(z,\zeta) = \frac{\overline{(\zeta - z)}^{\,n-1}}{2^{n-1}(n-1)\,!\,(\zeta - z)}\,.$$

$g_n(z, \zeta)$ ist in z und ζ polyanalytisch, und es gilt

$$A g_n = g_{n-1} \qquad \text{(Ableitungen nach } \zeta\text{)}\,.$$

Die Funktionen g_n bleiben in $z = \zeta$ für $n > 1$ endlich.

Satz 4*. *Es sei $f(z)$ eine, in einem einfach zusammenhängenden Gebiet H und auf dessen Rand s polyanalytische Funktion. Dann kann der Funktionswert $f(z)$ in jedem innern Punkt z von H aus den Werten von $f(\zeta)$, $Af(\zeta), \ldots, A^{n-1}f(\zeta)$ auf s berechnet werden als:*

$$f(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \int\limits_s \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, g_{n-k}(z,\zeta) \, A^{n-1-k} f(\zeta) \right] d\zeta \;;$$

und es bedeutet

$$g_k(z,\zeta) = \frac{\overline{(\zeta - z)}^{\,k-1}}{2^{k-1}(k-1)\,!\,(\zeta - z)}\,.$$

(Eingegangen den 13. Mai 1947.)