Zur inhomogenen Eliminationstheorie.

Zur inhomogenen Eliminationstheorie

Von Walter Habicht, Schaffhausen

Einleitung

Die formale Eliminationstheorie geht aus von einem System von n allgemeinen Polynomen $f_1, \ldots, f_n$ in m Variablen $x_1, \ldots, x_m$ von vorgeschriebenen Graden und sucht nach Kriterien für die Lösbarkeit des Gleichungssystems $f_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ bei Spezialisierung der un bestimmten Koeffizienten in einem algebraisch-abgeschlossenen Körper A[1]). Das Hauptresultat dieser Theorie bezieht sich auf den Fall $m = n - 1$; es besagt, daß in diesem Fall ein Polynom in den unbestimmten Koeffizienten existiert, dessen Verschwinden bei einer Spezialisierung in A notwendig und hinreichend ist dafür, daß entweder die Polynome f_k oder ihre höchsten homogenen Bestandteile h_k[2]) im affinen Koordinatenraum über A eine gemeinsame Nullstelle besitzen.

Dieses Polynom, die *Resultante* des Systems $(f_1, \ldots, f_n)$, wird auf formalem Wege durch Elimination aller x_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ gefunden. Ist Γ der Körper der rationalen Zahlen und fassen wir die unbestimmten Koeffizienten unter der Sammelbezeichnung u zusammen, so ist die Resultante $R(u)$ einerseits im Polynomring $\Gamma[u, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ als lineare Verbindung der f_k darstellbar, d. h. sie ist Element des Ideals $\mathfrak{f} = (f_1, \ldots, f_n)$; anderseits ist jedes Polynom aus $\mathfrak{f}$, das nur von den u abhängt, in $\Gamma[u]$ durch $R(u)$ teilbar (vgl. § 1, 1, 2).

Es ist naheliegend, den Eliminationsprozeß beim zweitletzten Schritt abzubrechen und nach solchen Polynomen des Ideals $\mathfrak{f}$ zu fragen, welche nur noch von einer der Variablen x_i, und zwar linear, abhängen. Unter diesen gibt es „triviale", welche durch Multiplikation von $R(u)$ mit einem Linearpolynom aus $\Gamma\,[u, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ entstehen. Im ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß es auch nichttriviale gibt, falls nicht alle f_k Konstanten aus $\Gamma[u]$ sind. — Dies ist an sich bemerkenswert, denn es bedeutet, wie man sich leicht über-

[1]) Wir schließen uns hier und im folgenden an die Darstellung der Eliminationstheorie in *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra II (Berlin 1940), Kap. XI, an.

[2]) Entweder-oder im nicht ausschließenden Sinn. Unter einer Nullstelle des Formensystems $(h_1, \ldots, h_n)$ verstehen wir immer eine nichttriviale Nullstelle.

zeugt, die Existenz eines mit $R(u)$ teilerfremden Polynoms $S(u)$ in den u allein, so daß gewisse dieser Linearpolynome zusammen mit $R(u)$ das Ideal $S(u)\cdot\mathfrak{f}$ erzeugen.

Wichtig und interessant wird unser Ergebnis aber erst durch die Anwendung auf Systeme von n allgemeinen Polynomen $f_1,\ldots,f_n$ *in* n *Variablen* $x_1,\ldots,x_n$ $(n\geqq 2)$ mit unbestimmten Koeffizienten v (§ 2). — Aus dem Resultat von § 1 wird die Existenz von n Polynomen der Gestalt

$$\begin{aligned} F_i &= c_i x_i + d_i(x_n) \qquad (i = 1,\ldots,n-1)\\ F_n &= \phantom{c_i x_i + {}} d_n(x_n) \end{aligned}$$

hergeleitet, welche einerseits im Ideal $\mathfrak{f} = (f_1,\ldots,f_n)$ des Polynomrings $\Gamma[v, x_1,\ldots,x_n]$ enthalten sind, andererseits bis auf einen von Null verschiedenen Faktor aus $\Gamma[v]$ eine Basis dieses Ideals bilden. Ein derartiges System $(F_1,\ldots,F_n)$ hat noch eine wesentliche Eigenschaft: ist nämlich g ein weiteres allgemeines Polynom in den x_i mit unbestimmten Koeffizienten w, so gibt es einen (rein quadratischen) Faktor a aus $\Gamma[v]$ und ein Polynom G aus $\Gamma[v, w, x_n]$, so daß $a\cdot g$ und G derselben Restklasse des Ideals $(F_1,\ldots,F_n)$ aus $\Gamma[v, w, x_1,\ldots,x_n]$ angehören. — Diese rein formalen Ergebnisse sind im ersten Reduktionssatz (cf. § 2, 4) zusammengestellt.

Im dritten Paragraphen wenden wir die Sätze des § 2 an auf spezielle Polynomsysteme mit Koeffizienten aus einem Körper K. Wir denken uns ein solches spezielles System $(f^*) = (f_1^*,\ldots,f_n^*)$ aus dem allgemeinen System $(f) = (f_1,\ldots,f_n)$ durch Spezialisierung der unbestimmten Koeffizienten in K hervorgegangen; zu (f) konstruieren wir das System $(F) = (F_1,\ldots,F_n)$ nach § 2 und führen die Spezialisierung der v sodann in den Koeffizienten der F_i durch, wodurch wir ein System $(F^*) = (F_1^*,\ldots,F_n^*)$ mit Koeffizienten aus K erhalten. Man erkennt nun den Sinn unserer Konstruktion aus der Tatsache, daß die Systeme (f^*) und (F^*) bei „fast allen" Spezialisierungen[3]) im n-dimensionalen affinen Koordinatenraum R^n über K *genau dieselben, endlich vielen Nullstellen* haben, welche überdies bezüglich beider Systeme einfach sind und sich aus den F_i^* explizit bestimmen lassen (§ 3, 2, Satz 7).

Wir haben damit das System (f^*) durch ein anderes, (F^*), ersetzt, welches in viel einfacherer Weise von den Variablen abhängt und eine wesentliche Eigenschaft mit (f^*) teilt. — In Weiterverfolgung dieses Gedankengangs stellt sich natürlicherweise die Frage, ob sich feinere

---

[3]) Das soll heißen: es gibt ein von Null verschiedenes Polynom $\Phi(v)$ in den v allein, dessen Nichtverschwinden bei einer Spezialisierung der v für die erwähnten Eigenschaften hinreichend ist.

Eigenschaften eines Polynomsystems ebenfalls in einem so einfach strukturierten Ersatzsystem widerspiegeln. Diesem Problem ist der restliche Teil von § 3 gewidmet; und zwar tragen die untersuchten Eigenschaften reell-algebraischen Charakter. Dementsprechend werden wir von hier an den Körper K als *angeordnet* voraussetzen[4]).

Wir betrachten nun nebeneinander Systeme (f^*) von n Polynomen und Systeme $((f^*))$ von $n+1$ Polynomen in n Variablen mit Koeffizienten aus K. Sie definieren *Punktabbildungen* des R^n über K in den R^n resp. R^{n+1} über K, indem dem Punkt $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ der Punkt $f^*(\xi) = (f_1^*(\xi), \ldots, f_m^*(\xi))$ $(m = n$ resp. $n+1)$ zugeordnet wird; wir wollen sie kurz als (n, n)-Abbildungen resp. $(n, n+1)$-Abbildungen bezeichnen. Als *Projektion* einer $(n, n+1)$-Abbildung f^* bezeichnen wir die (n, n)-Abbildung $\bar{f}^*$, die aus f^* durch Weglassung der letzten Komponente f_{n+1}^* entsteht.

Sei $\bar{f}^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$ eine (n,n)-Abbildung und ξ eine einfache Nullstelle von $\bar{f}^*$ im R^n über K[5]). Dann verstehen wir unter dem *Index* $j(\bar{f}^*, \xi)$ von $\bar{f}^*$ im Punkte ξ das Vorzeichen der Funktionaldeterminante des Systems $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ im Punkte ξ[6]). — Weiter sei f^* eine $(n, n+1)$-Abbildung, $\bar{f}^*$ ihre Projektion und Q eine Punktmenge des R^n, auf welcher f^* keine und $\bar{f}^*$ höchstens endlich viele, und zwar lauter einfache Nullstellen besitzt (diese Bedingungen sind für fast alle (vgl. Anm. 3) Polynomabbildungen erfüllt; vgl. § 3, **3**, Satz 8). Dann verstehen wir unter dem *Indikator* von f^* bezüglich Q die Summe

$$\psi(f^*, Q) = \sum_{\xi} j(\bar{f}^*, \xi) \cdot \operatorname{sgn} f_{n+1}^*(\xi) \quad .$$

erstreckt über alle auf Q liegenden Nullstellen von $\bar{f}^*$. Der Indikator ist also im Sinne der Abbildungstheorie eine doppelte Schnittzahl[7]), genauer: die Summe der Schnittzahlen des Bildes $f^*(Q)$ mit zwei diametralen Halbstrahlen vom Nullpunkt des R^{n+1} aus.

Beispiele: K sei der reelle Zahlkörper, $\bar{f}^*$ eine (2,2)-Abbildung, ξ eine einfache Nullstelle von $\bar{f}^*$. Dann ist der Index $+1$ oder -1, je nachdem ein positiv umlaufenes infinitesimales Quadrat um ξ durch $\bar{f}^*$ in ein posi-

---

[4]) Vgl. hierzu: *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra I (Berlin 1941), Kap. X.

[5]) D. h. es ist $f_k^*(\xi) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, und die Nullstelle ist bezüglich des Systems $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ einfach.

[6]) Wir definieren den Index also nur für einfache Nullstellen und vernachläßigen ein durch die Orientierung des R^n gegebenes Vorzeichen. Dies genügt für die Zwecke der vorliegenden Arbeit; übrigens läßt sich der in § 3 beschriebene Reduktionsprozeß bei Spezialisierungen mit mehrfachen Nullstellen überhaupt nicht mehr durchführen.

[7]) Vgl.: *A. Alexandroff - H. Hopf*, Topologie, Kap. XIII.

tiv oder negativ umlaufenes Parallelogramm um den Nullpunkt überführt wird (positive oder negative Überdeckung des Nullpunkts durch $\bar{f}^*$ im Punkte ξ). — Sei f^* eine (2,3)-Abbildung, Q eine Punktmenge der euklidischen Ebene, $p^*(Q)$ die Zentralprojektion von $f^*(Q)$ auf die Oberfläche einer Kugel um den Nullpunkt des R^3. Dann ist der Indikator gleich der algebraischen Anzahl der Überdeckungen des Nordpols und des Südpols ($f_1^* = f_2^* = 0$) durch $p^*(Q)$.

Wir konstruieren nun in § 3, **3**, **4** zu einem System $((f))$ von $n+1$ allgemeinen Polynomen ein Ersatzsystem $((F))$, welches wieder sehr einfach von den Variablen abhängt, so daß bei fast allen Spezialisierungen die zugehörigen Abbildungen f^* und F^* bezüglich einer beliebigen Punktmenge Q des R^n *denselben Indikator* haben. — Daraus ziehen wir in § 3, **4** eine wichtige Konsequenz : aus $((F))$ läßt sich nämlich ohne weiteres ein System (h) von n Polynomen ableiten, so daß bei allen zulässigen Spezialisierungen *der Indikator der* $(n, n+1)$*-Abbildung* f^* *gleich der Indexsumme der* (n, n)*-Abbildung* $\bar{h}^*$, erstreckt über Q, ist (§ 3, **4**, spezieller Reduktionssatz). Aus diesem Resultat ergeben sich im Falle eines reell-abgeschlossenen Körpers K [8]) interessante Folgerungen für die Theorie der Polynomabbildungen, welche in einer späteren Arbeit ausführlich dargestellt werden sollen. An dieser Stelle diene lediglich das obige Beispiel zur Erläuterung :

Wir betrachten eine (2,2)-Abbildung $\bar{f}^*$ im Innern und auf dem Rand eines einfach geschlossenen Polygons der euklidischen Ebene ; auf dem Rand liege keine, im Innern höchstens endlich viele Nullstellen von $\bar{f}^*$. Dann ist nach dem *Kroneckerschen Abbildungssatz* [9]) die Indexsumme, erstreckt über das Innere des Polygons, gleich der Schnittzahl des Randbildes mit einem Halbstrahl vom Nullpunkt der Bildebene aus ; nun definiert aber $\bar{f}^*$ gewisse (1,2)-Abbildungen der Randstrecken, und die vorige Schnittzahl ist gleich der halben Summe der Indikatoren dieser Abbildungen bezüglich der Randstrecken. — Der Kroneckersche Abbildungssatz führt also die Indexsumme einer (2,2)-Abbildung zurück auf die Indikatoren gewisser (1,2)-Abbildungen, und analog für höhere Dimensionen. — Unser Reduktionssatz für Polynomabbildungen stellt ein Gegenstück zum Abbildungssatz dar ; beide Sätze zusammen erlauben es, unter gewissen Voraussetzungen über die geometrische Beschaffenheit der Punktmenge Q den Indikator einer (2,3)-Abbildung auf eine Summe von Indikatoren gewisser (1,2)-Abbildungen zurückzuführen, und analog für höhere Dimensionen.

---

[8]) Vgl. a. a. O.[4]), Kap. XI, § 67.

[9]) Vgl. a. a. O.[7]).

§ 1. Systeme von n Polynomen in $n-1$ Variablen

1[10]. Es seien

$$f_k = u_{k1} \cdot x_1^{l_k} + u_{k2} \cdot x_1^{l_k - 1} \cdot x_2 + \cdots + u_{k\omega} \cdot \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

n allgemeine Polynome in m Variablen $x_1, \ldots, x_m$ von den Graden $l_1, \ldots, l_n$; d. h. es sollen in ihnen alle möglichen Potenzprodukte mit *unbestimmten* Koeffizienten auftreten. Die letzten Koeffizienten sind dabei durchwegs mit dem zweiten Index ω bezeichnet. Die u_{kj} resp. x_i fassen wir im folgenden unter der Sammelbezeichnung u resp. x zusammen.

Definition 1[11]. *Ein Polynom t in den u und den x, welches sich in der Form*

$$t = \sum_{k=1}^{n} q_k f_k \qquad (2)$$

darstellen läßt, wobei die q_k ebenfalls Polynome in den u und den x bedeuten, heiße ein Trägheitspolynom des Systems $(f_1, \ldots, f_n)$.

Die Trägheitspolynome bilden im Polynomring $\Gamma[u, x]$[12] das Ideal $\mathfrak{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Der Grad eines Trägheitspolynoms in den x heiße seine *Ordnung*.

2. Unter den Trägheitspolynomen nehmen diejenigen nullter Ordnung eine besondere Stellung ein. Zunächst kann man zeigen, daß sie für $m \leqq n-1$ im Ring $\Gamma[u]$ ein nichtverschwindendes Hauptideal bilden[13]. Weiter gilt

Satz 1. *n allgemeine Polynome in $n-1$ Variablen haben eine Resultante R, die ein unzerlegbares ganzzahliges Polynom in ihren unbestimmten Koeffizienten ist, und als Basis des Ideals der Trägheitspolynome nullter Ordnung definiert werden kann. Die Resultante ist homogen in den Koeffizienten von f_1 vom Grade $L_1 = l_2 \ldots l_n$ usw. zyklisch; sie ist der größte gemeinsame Teiler in $\Gamma[u]$ von n bekannten Determinanten $D_1, \ldots, D_n$. Das Verschwinden von R bei einer Spezialisierung der u in einem alge-*

---

[10]) Vgl. zu den ersten drei Abschnitten: a. a. O.[1]), §§ 81, 82 (9—15).

[11]) Etwas allgemeiner als bei v. d. Waerden (a. a. O. 70); vgl. auch: A. Hurwitz, Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls, Ann. mat. 20 (1913).

[12]) Γ bedeute hier und im folgenden den rationalen Zahlenkörper.

[13]) Diese und die folgenden leicht beweisbaren Tatsachen, welche in Satz 1 zusammengestellt sind, zitieren wir ohne Beweis nach *v. d. Waerden* (a. a. O. [1], 9—15), mit dem Unterschied, daß wir sie nicht für Formen, sondern für Polynome aussprechen.

braisch-abgeschlossenen Körper A ist notwendig und hinreichend dafür, daß entweder die spezialisierten Polynome oder ihre höchsten homogenen Bestandteile[14]) *eine Nullstelle mit Koordinaten aus A besitzen.*

3. Die in Satz 1 genannten Determinanten $D_1, \ldots, D_n$ gehen auseinander durch zyklische Vertauschung der Polynome $f_1, \ldots, f_n$ hervor. $D_n = D$ wird dabei folgendermaßen erhalten[15]).

Wir setzen

$$\sum_{k=1}^{n} (l_k - 1) = l - 1 \,.$$

Die Gesamtheit der Potenzprodukte der x_i vom Grade $\leqq l$ läßt sich folgendermaßen anordnen:

Zuerst alle Potenzprodukte, die $x_1^{l_1}$ enthalten;
sodann alle, die $x_2^{l_2}$, aber nicht $x_1^{l_1}$ enthalten;
usw.; schließlich alle übrigbleibenden.

Die so erhaltenen Potenzprodukte bezeichnen wir mit

$$H_{1j} \cdot x_1^{l_1},\ H_{2j} \cdot x_2^{l_2}, \ldots, H_{n-1,j} \cdot x_{n-1}^{l_{n-1}},\ H_{nj} \,. \tag{3}$$

Insbesondere kommen in der letzten Kategorie nur Potenzprodukte von einem Grad $< l_1$ in $x_1, \ldots, < l_{n-1}$ in x_{n-1} vor; die letzte Kategorie umfaßt also genau $l_1 \cdot l_2 \ldots l_{n-1}$ Potenzprodukte. Unter diesen kommt genau eines, nämlich

$$H_{n0} = x_1^{l_1 - 1} \cdot x_2^{l_2 - 1} \ldots x_{n-1}^{l_{n-1} - 1} \,,$$

vom Grade

$$\sum_{k=1}^{n-1} (l_k - 1) = l - l_n$$

vor, welches wir als *singuläres Potenzprodukt* für spätere Zwecke auszeichnen wollen; alle übrigen Potenzprodukte der letzten Kategorie sind von kleinerem Grad. — Wir bilden nun alle Polynome

$$H_{kj} \cdot f_k \;;$$

dies sind gleich viel Polynome wie Potenzprodukte (3), *und sie sind alle von Graden* $\leqq l$, ihre Koeffizientenmatrix ist also eine quadratische,

---

[14]) Vgl. Anmerkung 2.

[15]) Die folgende Konstruktion, fast wörtlich zitiert nach *v. d. Waerden* (a. a. O. 13), ist für das Folgende grundlegend und setzt keine Vorkenntnisse voraus.

deren Determinante bei der Spezialisierung $f_k = x_k^{l_k}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, $f_n = 1$ den Wert 1 erhält, also nicht identisch verschwinden kann. Multipliziert man die Gleichungen

$$H_{kj} \cdot f_k = \sum_{\nu=1}^{\omega} u_{kj\nu} H_\nu \tag{5}$$

mit den Minoren M_{kj} der letzten Spalte von D und addiert, so kommt

$$\sum_{k,j} M_{kj} H_{kj} \cdot f_k = D \ ; \tag{6}$$

D ist demnach ein Trägheitspolynom nullter Ordnung des Systems $(f_1, \ldots, f_n)$, homogen in den Koeffizienten jedes einzelnen Polynoms f_k, und zwar insbesondere in den Koeffizienten von f_n vom Grad $L_n = l_1 \ldots l_{n-1}$.

4. **Satz 2.** *Ist* $(f_1, \ldots, f_n)$ *ein System von* n *allgemeinen, nicht sämtlich konstanten Polynomen in* $x_1, \ldots, x_{n-1}$, *so gibt es* $n-1$ *Trägheitspolynome der Gestalt*

$$t_i = c_0(u) \cdot x_i + c_i(u) \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \ ; \tag{7}$$

dabei hängt t_i *außer von den* u *nur von* x_i *ab, und der gemeinsame Linearkoeffizient* $c_0(u)$ *der* t_i *besitzt in* $\Gamma[u]$ *mit der Resultante* $R(u)$ *keinen gemeinsamen Teiler.*

Beweis. Wir können annehmen, daß f_n nicht vom Grade 0 ist. — Unter den Minoren M_{kj} der letzten Spalte von D (cf. **3**) greifen wir den zum singulären Potenzprodukt H_{n0} gehörigen M_{n0} heraus und bezeichnen ihn als *singulären Minor.* Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz.
Der singuläre Minor M_{n0} *verschwindet nicht identisch.*

Wir spezialisieren wie in **3** f_k zu $x_k^{l_k}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, hingegen f_n nur zu

$$-\sum_{\nu=1}^{n-1} v_\nu x_\nu + 1 \ ,$$

wo die v_ν unbestimmt bleiben. Bezeichnen wir die spezialisierten Determinanten durch Sterne, so geht (6) dabei über in

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Big(\sum_j M_{kj}^* \cdot H_{kj} \Big) \cdot x_k^{l_k} + \Big(\sum_j M_{nj}^* \cdot H_{nj} \Big) \cdot \Big(-\sum_{\nu=1}^{n-1} v_\nu x_\nu + 1 \Big) = D^* \ . \tag{6*}$$

Wir fassen nun die H_{nj} nach absteigenden Graden in Kategorien zusammen:

$$H_{n0} = H_{n0}^{(l-l_n)}, \ldots, H_{nj}^{(\lambda)}, \ldots, H_{n\omega}^{(0)} = 1 \; .$$

Dabei enthält die erste und die letzte Kategorie *nur je ein Potenzprodukt.* Jetzt vergleichen wir in der Identität (6*) links und rechts die Koeffizienten aller Potenzprodukte $H_{nj}^{(\lambda)}$ $(\lambda = l - l_n, \ldots, 1)$ und erhalten so für jeden Minor $M_{nj}^{(\lambda)*}$ eine rekursive Beziehung

$$M_{nj}^{(\lambda)*} = \sum_{\kappa} v_\kappa M_{nj_\kappa}^{(\lambda-1)*} \; , \tag{8}$$

wobei κ gewisse Zahlen zwischen 1 und $n-1$ durchläuft und die Summe nicht leer ist, und für den letzten

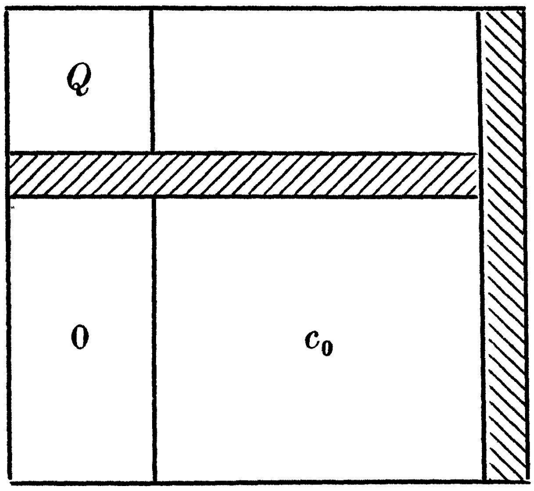
$$M_{n\omega}^{(0)*} = D^* \; . \tag{8*}$$

Aus (8*) erhält man durch sukzessive Anwendung von (8):

$$M_{n0}^* = \varphi(v_1, \ldots, v_{n-1}) \cdot D^*;$$

dabei bedeutet φ eine nicht verschwindende Form in den v mit natürlichen Zahlenkoeffizienten. D^* verschwindet auch nicht, da es bei der Spezialisierung $v_1 = \cdots = v_{n-1} = 0$ den Wert 1 erhält (cf. 3). Also verschwindet M_{n0}^* und somit auch M_{n0} nicht identisch, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir suchen nun unter den Polynomen (4) diejenigen heraus, welche in den x_i vom Maximalgrad l sind. — Unter den Potenzprodukten (3) vom Grad $\leqq l$ sind diejenigen vom Grad l alle in den ersten $n-1$ Kategorien; in der letzten Kategorie kommt genau eines, nämlich das singuläre, mit dem Grad $l - l_n$ vor, während die andern von kleinerem Grade sind. Ist deshalb r die Anzahl aller möglichen Potenzprodukte vom Grad l, so gibt es genau $r+1$ Polynome (4) vom Grad l, welche wir im Gleichungssystem (5) an den Anfang stellen wollen. Ist s die Ordnung der Koeffizientenmatrix, so bilden dann die letzten $s - r - 1$-Zeilen eine Teilmatrix, welche nur in den letzten $s - r$ Spalten von Null verschiedene Glieder enthält.



Die aus diesen Zeilen und Spalten gebildete Matrix heiße $\mathfrak{C}$, der Minor ihrer letzten Spalte c_0 (vgl. das nebenstehende Schema). Nun entsteht aus D durch Streichung der singulären Zeile und der letzten Spalte der singuläre Minor M_{n0}, und nach Vorigem zerfällt er in das Produkt zweier Determinanten, wovon eine c_0 ist: $M_{n0} = Q \cdot c_0$. Da nach dem Hilfssatz M_{n0} nicht verschwindet, *kann also auch* c_0 *nicht verschwinden.*

Multiplizieren wir nun die $s - r - 1$ letzten Gleichungen (5) mit den $(s - r - 2)$-reihigen Minoren von c_0, welche durch Streichung der zu x_i $(i = 1, \ldots, n - 1)$ gehörigen Spalte entstehen, und addieren, so erhalten wir $n - 1$ Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ik} f_k = c_0 \cdot x_i + c_i \qquad (i = 1, \ldots, n - 1) \; ; \tag{9}$$

dabei bedeuten die q_{ik} Polynome aus $\Gamma[u, x]$, die c_i Formen aus $\Gamma[u]$, und zwar insbesondere c_i $(i = 1, \ldots, n - 1)$ den zur Spalte x_i gehörigen Minor von $\mathfrak{C}$. Die Polynome $c_0 \cdot x_i + c_i$ sind demnach nicht verschwindende Trägheitspolynome des Systems $(f_1, \ldots, f_n)$, welche wir mit t_i bezeichnen.

Da unter den letzten $r - s - 1$-Gleichungen (5) genau $l_1 \cdot l_2 \ldots l_{n-1} - 1$ mit dem linksseitigen Faktor f_n auftreten, ist der Homogenitätsgrad von c_0 in den Koeffizienten von f_n gleich $l_1 \cdot l_2 \ldots l_{n-1} - 1$. Andererseits ist die Resultante R in diesen Koeffizienten vom Grad $l_1 \cdot l_2 \ldots l_{n-1}$ und unzerlegbar (cf. 1, Satz 1); also haben c_0 und R im Ring $\Gamma[u]$ keinen gemeinsamen Teiler. Damit ist Satz 2 bewiesen.

§ 2. Systeme von n Polynomen in n Variablen; Transformationssätze

1. Sei $(f) = (f_1, \ldots, f_n)$ $(n \geqq 2)$ ein System von n allgemeinen Polynomen *in n Variablen* $x_1, \ldots, x_n$, deren unbestimmte Koeffizienten mit v bezeichnet seien. Ein solches System geht aus einem System (1) von Polynomen in $n - 1$ Variablen mit denselben Gradzahlen folgendermaßen hervor: gehört der unbestimmte Koeffizient $u_{k\lambda}$ in (1) zu einem Potenzprodukt vom Grade m, so ersetze man ihn durch ein allgemeines Polynom des Parameters x_n vom Grade $l_k - m$; so verfahre man mit allen Koeffizienten von (1). Man bemerkt, daß die höchsten homogenen Bestandteile $h_1, \ldots, h_n$ der Polynome (1) von dieser Substitution unberührt bleiben (genauer: ihre Koeffizienten werden durch algebraisch-äquivalente Unbestimmte ersetzt); sie bilden ein System von n allgemeinen, vom Parameter x_n unabhängigen Formen in $n - 1$ Variablen. Ist deshalb A ein beliebiger algebraisch-abgeschlossener Erweiterungs-

körper von $\Gamma(v)$, so haben $h_1, \ldots, h_n$ bei keiner Spezialisierung des Parameters x_n aus A eine gemeinsame nichttriviale Nullstelle im R^{n-1} über A.

Bei dieser Substitution geht die Resultante R des Systems (1) über in ein Polynom $R(x_n)$ der Variablen x_n mit Koeffizienten aus $\Gamma[v]$, dessen Verschwinden bei spezieller Wahl von x_n aus A nach Satz 1 (cf. § 1, 2) und dem Vorigen hinreichend ist dafür, daß die spezialisierten Polynome f_k^* im R^{n-1} eine gemeinsame Nullstelle haben.

Die in § 1, 4 konstruierten Polynome t_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ gehen bei der Substitution über in Polynome der Gestalt

$$t_i(x_i, x_n) = c_0(v, x_n) \cdot x_i + c_i(v, x_n) \; ; \tag{7'}$$

sie sind Trägheitspolynome des Systems (f). Wir fassen nun $R(x_n)$ und $c_0(x_n)$ auf als Polynome in x_n mit Koeffizienten aus $\Gamma[v]$ und beweisen:

Hilfssatz 1. *$R(x_n)$ ist über dem Koeffizientenkörper $\Gamma(v)$ irreduzibel und nicht durch $c_0(x_n)$ teilbar.*

Beweis. Wäre eine der beiden Behauptungen nicht erfüllt, so wäre $R(x_n)$ auch im Ring $\Gamma[v, x_n]$ zerlegbar resp. durch $c_0(x_n)$ teilbar; $R(0)$ wäre also in $\Gamma[v]$ zerlegbar resp. durch $c_0(0)$ teilbar; dies ist nicht der Fall, da diese Ausdrücke aus den ursprünglichen $R(u)$, $c_0(u)$ dadurch hervorgehen, daß man das System der Unbestimmten u durch ein algebraisch-äquivalentes System gewisser anderer Unbestimmten (der Absolutglieder der oben eingesetzten Polynome) ersetzt.

2. *Definition 2.* *Unter einem Fundamentalpolynom (bezüglich x_n) des Systems (f) verstehen wir ein Trägheitspolynom des Systems von der Gestalt*

$$F = c(v) \cdot x_i + d(v, x_n) \; , \tag{10}$$

wobei $c(v)$ ein nicht verschwindendes Polynom aus $\Gamma[v]$, $d(v, x_n)$ ein Polynom aus $\Gamma[v, x_n]$ und i einen Index zwischen 1 und $n-1$ bedeutet. Zu den Fundamentalpolynomen rechnen wir ferner noch die Resultante $R(x_n)$ des Systems.

Den Faktor $c(v)$ bezeichnen wir oft kurz als *Linearkoeffizient.*

Die Fundamentalpolynome zerfallen nach dem Index i in $n-1$-Klassen; dazu kommt noch die aus $R(x_n)$ allein gebildete Klasse. Ein System $(F) = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ von n Fundamentalpolynomen heiße ein *Fundamentalsystem* von (f), wenn es aus jeder Klasse einen Repräsentanten enthält.

Satz 3. *Sind nicht alle Polynome des Systems* (f) *konstant, so gibt es ein zugehöriges Fundamentalsystem* (F).

Beweis. Wir konstruieren nach Satz 2 (cf. § 1, **4**) die Polynome (7′) (cf. **1**). Nach dem zweiten Teil von Hilfssatz 1 verschwindet die Sylvestersche Resultante $c(v)$ der beiden Polynome $R(x_n)$ und $c_0(x_n)$ nach x_n nicht. Nun gibt es in $\Gamma[v, x_n]$ zwei Polynome $p(x_n)$ und $q(x_n)$, so daß

$$c(v) = p(x_n) \cdot c_0(x_n) + q(x_n) \cdot R(x_n) \ .$$

Wir bilden nun die Trägheitspolynome

$$F_i(x_i, x_n) = p(x_n) \cdot t_i(x_i, x_n) + q(x_n) \cdot R(x_n) = c(v) \cdot x_i + d_i(v, x_n) \ ;$$
$$(i = 1, \ldots, n-1) \ ;$$

sie bilden zusammen mit $R(x_n)$ ein Fundamentalsystem.

3. *Definition 3. Ein System von n Polynomen* $(P_1, \ldots, P_n)$ *aus* $\Gamma[v, x]$ *heiße eine* $\Gamma(v)$*-Basis des Systems* (f), *wenn sich jedes Polynom* f_k *in der Form*

$$a_k \cdot f_k = \sum_{l=1}^{n} Q_{kl} P_l$$

darstellen läßt, wobei die a_k *nichtverschwindende Polynome aus* $\Gamma[v]$, *die* Q_{kl} *Polynome aus* $\Gamma[v, x]$ *bedeuten.*

Satz 4. *Jedes Fundamentalsystem des Systems* (f) *ist* $\Gamma(v)$*-Basis von* (f).

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz 2. Diejenigen Trägheitspolynome von (f), *welche außer von den* v *nur von* x_n *abhängen, bilden in* $\Gamma[v, x_n]$ *ein Hauptideal mit der Basis* $R(x_n)$.

Beweis. Das Polynom $P(v, x_n)$ erfülle die Voraussetzungen des Hilfssatzes. Ist A ein algebraisch-abgeschlossener Körper über $\Gamma(v)$ und ξ_n eine beliebige Nullstelle von $R(v, x_n)$ aus A, so besitzen die spezialisierten Polynome $f_k(v, x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n)$ nach **1** im R^{n-1} über A eine gemeinsame Nullstelle; da $P(v, x_n)$ sich als Trägheitspolynom in $\Gamma[v, x]$ als lineare Verbindung der f_k darstellen läßt, so muß $P(v, \xi_n)$ verschwinden; demnach ist $P(v, x_n)$ in $\Gamma(v)[x_n]$, also auch in $\Gamma[v, x_n]$ durch $R(v, x_n)$ teilbar, q. e. d.

Nun sei

$$\begin{aligned} F_i &= c_i x_i + d_i(x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \\ F_n &= \qquad\quad R(x_n) \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem und zunächst $p_i(v, x)$ ein beliebiges Polynom aus $\Gamma[v, x]$, welches außer von den v nur von $x_i, \ldots, x_n$ abhängt ($1 \leqq i \leqq n-1$). Dann gibt es eine natürliche Zahl ϱ und ein Polynom q aus $\Gamma[v, x]$, so daß

$$c_i^\varrho \cdot p_i - q \cdot F_i = p_{i+1} \,, \tag{11}$$

wobei p_{i+1} außer von den v nur noch von $x_{i+1}, \ldots, x_n$ abhängt.

Ist nun f_k ein Polynom des Systems (f) $(k = 1, \ldots, n)$, so erhält man durch sukzessive Anwendung des Reduktionsprozesses (11):

$$a_k \cdot f_k = c_1^{\varrho_{k,1}} \cdot c_2^{\varrho_{k,2}} \ldots c_{n-1}^{\varrho_{k,n-1}} \cdot f_k = Q_{k1} \cdot F_1 + \cdots + Q_{k,n-1} F_{n-1} + P_k$$
$$(k = 1, \ldots, n) \,. \tag{12}$$

Dabei sind die Q_{kl} und P_k Polynome aus $\Gamma[v, x]$, und zwar hängt P_k außer von den v nur von x_n ab. Da die f_k und die F_l Trägheitspolynome sind, so auch die P_k; also sind die letzteren nach Hilfssatz 2 in $\Gamma[v, x_n]$ durch $R(x_n) = F_n$ teilbar:

$$P_k = Q_{k,n} \cdot F_n \qquad (k = 1, \ldots, n) \,. \tag{13}$$

Aus den Gleichungen (12) und (13) folgt nach Definition 3 die Behauptung von Satz 4.

Zusatz zu Satz 4. Die Faktoren a_k (cf. Def. 3) können als Potenzprodukte der Linearkoeffizienten c_i des Fundamentalsystems gewählt werden.

Sei (F) ein Fundamentalsystem von (f), g ein weiteres allgemeines Polynom in den x mit unbestimmten Koeffizienten w, und $\mathfrak{F}$ das von den Polynomen F_i im Ring $\Gamma[v, w, x]$ erzeugte Ideal. Dann folgt durch dasselbe Reduktionsverfahren wie oben:

Satz 5. *Zu dem allgemeinen Polynom g gibt es in $\Gamma[v]$ ein Polynom a und in $\Gamma[v, w, x]$ ein außer von den v, w nur von x_n abhängiges Polynom G, so daß in $\Gamma[v, w, x]$ die Kongruenz*

$$a \cdot g \equiv G \qquad (\text{mod. } \mathfrak{F})$$

gilt. Dabei kann a als Potenzprodukt der Linearkoeffizienten c_i des zugrundegelegten Fundamentalsystems gewählt werden, und zwar etwa mit lauter geraden Exponenten.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen im

1. (*allgemeinen*) *Reduktionssatz. Zu n allgemeinen, nicht sämtlich konstanten Polynomen* $f_1, \ldots, f_n$ *in n Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *mit unbestimmten Koeffizienten v gibt es n Polynome* $F_1, \ldots, F_n$ *in den v und den x mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es ist*

$$\begin{aligned} F_i &= c_i x_i + d_i(x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n-1) , \\ F_n &= R(x_n) , \end{aligned}$$

wobei die c_i von den x, die d_i und R von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ unabhängig sind; $R(x_n)$ ist die Resultante von $f_1, \ldots, f_n$ nach $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

2. *In $\Gamma[v, x]$ gelten zwei Systeme von Identitäten*

$$F_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} \cdot f_k \qquad (i = 1, \ldots, n) ,$$

$$a_k \cdot f_k = \sum_{l=1}^{n} Q_{kl} \cdot F_l \qquad (k = 1, \ldots, n) ,$$

wobei die a_k nicht verschwindende Polynome aus $\Gamma[v]$ bedeuten.

3. *Jedes weitere allgemeine Polynom g in den x mit unbestimmten Koeffizienten w läßt sich in $\Gamma[v, w, x]$ bis auf einen nicht verschwindenden Faktor a aus $\Gamma[v]$ mod. $(F_1, \ldots, F_n)$ auf ein von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ unabhängiges Polynom G reduzieren:*

$$a \cdot g \equiv G \qquad (F_1, \ldots, F_n) .$$

a kann dabei als Potenzprodukt der c_i mit lauter geraden Exponenten gewählt werden.

Der Satz gilt trivialerweise auch noch für $n = 1$.

§ 3. Anwendungen

1. Im folgenden sei K ein Körper von der Charakteristik 0[16]) und (f^*) ein System von n Polynomen $f_1^*, \ldots, f_n^*$ in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus K $(n \geqq 2)$.

[16]) Man könnte auf diese Voraussetzung verzichten, da in den Koeffizienten der in § 2 konstruierten Polynome nur ganze Zahlen auftreten. Dies ist jedoch für die Anwendungen unwesentlich.

Definition 4. Das System (f^*) heiße reduzibel, wenn es im Ring $K[x]$ n Polynome der Gestalt

$$\begin{aligned} F_i^* &= c_i^* \cdot x_i + d_i^*(x_n) \\ F_n^* &= \phantom{c_i^* \cdot x_i +{}} d_n^*(x_n) \end{aligned} \qquad (c_i^* \neq 0\,,\ i = 1\,,\ldots,n-1) \tag{10*}$$

gibt, welche in $K[x]$ das Ideal $(f^*,\ldots,f_n^*)$ erzeugen:

$$(f_1^*,\ldots,f_n^*) = (F_1^*,\ldots,F_n^*)\ .$$

Das System (F^*) heiße ein *zugeordnetes Linearsystem.*

Satz 6. *Ist das System (f^*) reduzibel und (F^*) ein zugeordnetes Linearsystem, so haben die Systeme (f^*) und (F^*) im n-dimensionalen affinen Koordinatenraum R^n über K genau dieselben Nullstellen.*

Denn aus Definition 4 folgt, daß sich in $K[x]$ die f_k^* linear in die F_i^* und umgekehrt die F_i^* linear in die f_k^* transformieren lassen.

Ist ein zugeordnetes Linearsystem durch (10*) gegeben, so lassen sich sämtliche Nullstellen von (F^*) und damit von (f^*) explizit bestimmen: man wähle nämlich für ξ_n irgendeine Wurzel des Polynoms $F_n^* = d_n^*(x_n)$ aus K; diese läßt sich auf genau eine Weise zu einer Nullstelle (ξ) von (F^*) ergänzen, indem man setzt

$$\xi_i = -\frac{d_i^*(\xi_n)}{c_i^*} \qquad (i = 1\,,\ldots,n-1)\ . \tag{14}$$

Die Reduzibilität impliziert also, daß das System in einer Hyperebene $x_n = \xi_n$ höchstens eine Nullstelle besitzt.

2. *Definition 5. Das System (f^*) heiße einfach, wenn es reduzibel ist und im R^n lauter einfache Nullstellen besitzt*[17]).

Satz 7. *Zu einem System (f) von n allgemeinen, nicht sämtlich konstanten Polynomen existieren zwei Polynome $\Phi_1(v)$ resp. $\Phi(v)$ in den unbestimmten Koeffizienten, deren Nichtverschwinden für spezielle Werte der v aus K hinreichend ist für die Reduzibilität resp. Einfachheit des spezialisierten Systems (f^*). Ein zugeordnetes Linearsystem erhält man in beiden Fällen durch Spezialisierung aus einem Fundamentalsystem (F) von (f).*

---

[17]) Eine Nullstelle heißt einfach, wenn in ihr die Funktionaldeterminante des Systems nicht verschwindet.

Beweis. Sei (F) ein Fundamentalsystem von (f) (cf. § 2, 2) und $c_i(v)$ seine Linearkoeffizienten. Dann gelten im Polynomring $\Gamma(v)[x]$ über dem rationalen Funktionenkörper $\Gamma(v)$ zwei Reihen von Identitäten

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{k=1}^{n} q_{ik} \cdot f_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ f_k &= \sum_{l=1}^{n} Q'_{kl} \cdot F_l \qquad (k = 1, \ldots, n); \end{aligned} \tag{15}$$

Nenner aus $\Gamma[v]$ treten dabei nur in den Koeffizienten der Q'_{kl} auf, und zwar können diese nach dem Zusatz zu Satz 4 (cf. § 2, 3) als Potenzprodukte der $c_i(v)$ gewählt werden. Man setze nun

$$\Phi_1(v) = \prod_{i=1}^{n-1} c_i(v) .$$

Verschwindet Φ_1 bei einer Spezialisierung der v in K nicht, so auch kein $c_i(v)$, und die Identitäten (15) gehen über in Identitäten in $K[x]$; (F^*) wird also zugeordnetes Linearsystem von (f^*), womit der erste Teil von Satz 7 bewiesen ist.

Es ist insbesondere $F_n = R(v, x_n)$ die Resultante von (f) nach $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Nach dem ersten Teil von Hilfssatz 1 in § 2, 1 ist $R(v, x_n)$ irreduzibel über $\Gamma(v)$; seine Diskriminante $\Phi_2(v)$ ist also von Null verschieden. Verschwindet Φ_2 bei einer Spezialisierung der v in K nicht, so besitzt das spezialisierte Polynom $R(x_n)$ in K nur (endlich viele) *einfache* Wurzeln. Wir setzen nun

$$\Phi(v) = \Phi_1(v) \cdot \Phi_2(v)$$

und betrachten eine solche Spezialisierung von (f), bei welcher $\Phi(v)$ nicht verschwindet. Für die spezialisierten Polynome gelten dann in $K[x]$ die Identitäten

$$F_i^* = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}^* \cdot f_k^* \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{15*}$$

sowie die Formeln (10*) (cf. 1), wobei insbesondere $d_n^*(x_n) = R(x_n)$ zu setzen ist; nach Konstruktion besitzt $d_n^*(x_n)$ höchstens endlich viele Wurzeln, welche alle einfach sind.

Ist nun $(\xi) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ eine Nullstelle von (f^*) und (F^*) im R^n, so führen wir neue Variable y ein durch

$$y_i = x_i - \xi_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und entwickeln die Polynome f_k^*, F_i^*, q_{ik}^* nach aufsteigenden Potenzen der y[18]):

$$\left.\begin{array}{llll} f_k^* \equiv & \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}^* y_l & (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{y}^2) & (k = 1, \ldots, n-1) \\ F_i^* \equiv & c_i^* y_i + b_i^* y_n & (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{y}^2) & (c_i^* \neq 0, i = 1, \ldots, n-1) \\ F_n^* \equiv & c_n^* y_n & (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{y}^2) & (c_n^* \neq 0) \\ q_{ik}^* \equiv \gamma_{ik} & & (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{y}\ ) & \end{array}\right\} \quad (16)$$

Aus (15*) folgt nun durch Vergleichung der Glieder ersten Grades:

$$c_i^* y_i + b_i^* y_n = \sum_{k,l} \gamma_{ik} a_{kl}^* \cdot y_l \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

$$c_n^* y_n = \sum_{k,l} \gamma_{nk} a_{kl}^* \cdot y_l$$

und daraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung für die Determinanten $||\gamma_{ik}||$ und $||a_{kl}^*||$:

$$||\gamma_{ik}|| \cdot ||a_{kl}^*|| = c_1^* c_2^* \ldots c_n^* \neq 0 , \qquad (17)$$

also insbesondere $||a_{kl}^*|| \neq 0$; da $||a_{kl}^*||$ die Funktionaldeterminante des Systems (f^*) an der Stelle (ξ) ist, so ist damit Satz 7 bewiesen.

Zusatz 1. Verschwindet Φ bei einer Spezialisierung nicht, so sind die Nullstellen von (f^*) und (F^*) auch bezüglich (F^*) einfach.

Denn mit den gleichen Bezeichnungen wie oben ist die Funktionaldeterminante von (F^*) an einer Nullstelle gleich $c_1^* c_2^*, \ldots, c_n^* \neq 0$.

Zusatz 2. Ist $\Delta(v, x)$ die Determinante der linearen Polynomtransformation, welche (f) in (F) überführt, und verschwindet Φ bei einer Spezialisierung nicht, so verschwindet $\Delta^*(x)$ an keiner Nullstelle von (f^*) und (F^*).

Denn es ist cf. 2 ((15) und (15*)): $\Delta = ||q_{ik}||$, also $\Delta^* = ||q_{ik}^*||$; an einer Nullstelle wird also mit den obigen Bezeichnungen nach Formel (17): $\Delta^* = ||\gamma_{ik}|| \neq 0$.

3. Im folgenden nehmen wir zu einem System (f^*) von n Polynomen aus $K[x]$ $(n \geqq 2)$ ein weiteres Polynom f_{n+1}^* aus $K[x]$ hinzu, betrachten also Systeme $(f_1^*, \ldots, f_n^*, f_{n+1}^*)$ von $n+1$ Polynomen in n Variablen.

---

[18]) $\mathfrak{y}$ bedeutet das Ideal $(y_1, \ldots, y_n)$ aus $K[y]$.

Wir werden ein solches System durch eine Doppelkammer symbolisieren: $(f_1^*, \ldots, f_{n+1}^*) = ((f^*))$. Das System $(f^*) = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$ bezeichnen wir als *Projektion*, das Polynom f_{n+1}^* zuweilen als *Applikate* des Systems $((f^*))$.

Das System $((f^*))$ heiße *bezüglich einer Punktmenge Q des R^n über K definit*, wenn an keiner Nullstelle seiner Projektion in Q seine Applikate verschwindet; ein bezüglich des ganzen R^n definites System heiße kurz definit.

Wir setzen von nun an voraus, daß der Körper K *angeordnet* sei[19]).

Definition 6. Das System $((F^*))$ heiße ein äquivalentes Linearsystem von $((f^*))$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Beide Systeme sind definit.*

2. *Die Projektion (F^*) ist zugeordnetes Linearsystem der Projektion (f^*), und die gemeinsamen Nullstellen sind bezüglich (f^*) und (F^*) einfach.*

3. *Die Applikate F_{n+1}^* hängt nur von x_n ab.*

4. *An jeder Nullstelle (ξ) von (f^*) und (F^*) gilt*

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial (f^*)}{\partial (x)} \cdot \operatorname{sgn} f_{n+1}^* = \operatorname{sgn} \frac{\partial (F^*)}{\partial (x)} \cdot \operatorname{sgn} F_{n+1}^* ,$$

wobei $\frac{\partial (f^*)}{\partial (x)}$ und $\frac{\partial (F^*)}{\partial (x)}$ die Funktionaldeterminanten der beiden Projektionen bedeuten.

Nun sei $((f))$ ein System von $n+1$ *allgemeinen* Polynomen in n Variablen; die unbestimmten Koeffizienten seien wieder mit v bezeichnet. Die Projektion sei nicht konstant.

Satz 8. *Zu $((f))$ gibt es ein System $((F))$ von $n+1$ Polynomen aus $\Gamma[v, x]$ und ein Polynom Ψ aus $\Gamma[v]$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Projektion (F) ist ein Fundamentalsystem der Projektion (f).*

2. *Die Applikate F_{n+1} hängt außer von den v nur von x_n ab.*

3. *Bei jeder Spezialisierung der v in einem angeordneten Körper K, bei welcher $\Psi(v)$ nicht verschwindet, sind die spezialisierten Systeme $((f^*))$ und $((F^*))$ äquivalent.*

---

[19]) Vgl. a. a. O. [4]).

Beweis. Sei (F) ein Fundamentalsystem von (f) und $\Delta(v, x)$ die Determinante der linearen Polynomtransformation, welche (f) in (F) überführt. Wir bilden nun in $\Gamma[v, x]$ das Polynom

$$\bar{g} = \Delta(v, x) \cdot f_{n+1}(v, x) \ ; \tag{18}$$

es geht aus einem allgemeinen Polynom g vom selben Grad mit unbestimmten Koeffizienten w durch Spezialisierung der w in $\Gamma[v]$ hervor. Zu g konstruieren wir nach dem allgemeinen Reduktionssatz (cf. § 2, **3**) das Polynom G und den rein quadratischen Faktor a aus $\Gamma[v]$. Bei der Spezialisierung von g zu $\bar{g}$ geht G über in ein Polynom $\bar{G}$ aus $\Gamma[v, x_n]$, während a von dieser Spezialisierung nicht berührt wird. Wir setzen nun $F_{n+1} = \bar{G}$; es gilt dann in $\Gamma[v, x]$ die Kongruenz

$$a \cdot \Delta(x) \cdot f_{n+1}(x) \equiv F_{n+1}(x_n) \qquad (F_1, \ldots, F_n) \ . \tag{19}$$

Nun sei $\Phi_3(v)$ die Resultante des Systems $((f))$ (cf. § 1, **2**, Satz 1, angewandt auf den Index $n + 1$) und

$$\Psi(v) = \Phi(v) \cdot \Phi_3(v) \ ,$$

wobei $\Phi(v)$ dieselbe Bedeutung hat wie in Satz 7 (cf. **2**). Ferner liege eine Spezialisierung der v in K vor, bei welcher $\Psi(v)$ nicht verschwindet; es verschwinden dann weder $\Phi(v)$ noch $\Phi_3(v)$. Wir haben nachzuweisen, daß die spezialisierten Systeme die vier Eigenschaften von Definition 6 erfüllen. — 3) ist nach Konstruktion erfüllt, ebenso der erste Teil von 1) wegen der Bedeutung der Resultante. 2) ergibt sich aus der Bedeutung von Φ nach Satz 7 und dem Zusatz 1.

Nach der Konstruktion von Φ (cf. **2**, Beweis von Satz 7) und der Bedeutung von a (cf. § 2, **3**, allgemeiner Reduktionssatz) verschwindet a^* nicht und ist ein positives Element von K; an einer beliebigen Nullstelle (ξ) von (f^*) und (F^*) kann Δ^* nach dem Zusatz 2 zu Satz 7 nicht verschwinden, und aus (19) folgt: $F^*_{n+1}(\xi) \neq 0$ und

$$\operatorname{sgn} \Delta^*(\xi) \cdot \operatorname{sgn} f^*_{n+1}(\xi) = \operatorname{sgn} F^*_{n+1}(\xi) \ .$$

Daraus und aus Formel (17) (cf. **2**) ergibt sich die Behauptung 4) durch Multiplikation mit $\operatorname{sgn} \Delta^*(\xi) \cdot \operatorname{sgn} \dfrac{\partial(f^*)}{\partial(x)}(\xi) = \operatorname{sgn} \dfrac{\partial(F^*)}{\partial(x)}(\xi)$.

4. Die Bedeutung des Äquivalenzbegriffs liegt in den Anwendungen auf die Theorie der Polynomabbildungen (vgl. die Einleitung). Ein System $((f^*))$ resp. (f^*) definiert eine Abbildung f^* resp. $\bar{f}^*$ des R^n über K in den R^{n+1} resp. R^n über K. Ist das System (f^*) Projektion des Systems $((f^*))$, so ist die Abbildung $\bar{f}^*$ Projektion der Abbildung f^*.

Definition 7. Sei (f^*) ein System von n Polynomen in n Variablen über K und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ eine einfache Nullstelle des Systems im R^n über K. Dann verstehen wir unter dem Index der zugehörigen Abbildung $\bar{f}^*$ im Punkte ξ das Vorzeichen

$$j(\bar{f}^*, \xi) = \operatorname{sgn} \frac{\partial (f^*)}{\partial (x)} (\xi) \quad .$$

Im folgenden bedeute Q eine beliebige Punktmenge des R^n über K.

Definition 8. Ist ein System $((f^*))$ von $n+1$ Polynomen in n Variablen über K bezüglich Q definit und besitzt seine Projektion (f^*) in Q höchstens endlich viele Nullstellen, welche alle einfach sind, so verstehen wir unter dem Indikator der zugehörigen Abbildung f^* bezüglich Q die ganze Zahl

$$\psi(f^*, Q) = \sum_{\xi} j(\bar{f}^*, \xi) \cdot \operatorname{sgn} f^*_{n+1}(\xi) \ ,$$

wobei die Summe über die in Q liegenden Nullstellen der Projektion zu erstrecken ist.

2. (*spezieller*) *Reduktionssatz. Zu einem System $((f))$ von $n+1$ allgemeinen Polynomen in n Variablen x $(n \geqq 2)$ mit unbestimmten Koeffizienten v gibt es ein Polynom $\Psi(v)$ und ein System (h) von n Polynomen aus $\Gamma[v, x]$ mit folgender Eigenschaft: bei jeder Spezialisierung der v in einem angeordneten Körper K, bei welcher $\Psi(v)$ nicht verschwindet, besitzen (h^*) und die Projektion (f^*) von $((f^*))$ im R^n über K dieselben endlich vielen Nullstellen; diese sind bezüglich (f^*) und (h^*) einfach, und an keiner von ihnen verschwindet die Applikate f^*_{n+1}; der Indikator der Abbildung f^* bezüglich einer beliebigen Punktmenge Q des R^n ist gleich der Indexsumme der Abbildung $\bar{h}^*$, erstreckt über die auf Q liegenden Nullstellen.*

Beweis. Seien zunächst nicht alle Polynome der Projektion (f) Konstanten aus $\Gamma[v]$. Wir konstruieren zu $((f))$ das System $((F))$ und das Polynom $\Psi(v)$ nach Satz 8. Dann gilt bei jeder zulässigen Spezialisierung bezüglich einer beliebigen Punktmenge Q des R^n nach den Definitionen 6, 7 und 8: $\psi(f^*, Q)$ und $\psi(F^*, Q)$ sind definiert, und es ist

$$\psi(f^*, Q) = \psi(F^*, Q) \ . \tag{20}$$

Jetzt setzen wir

$$\begin{aligned} h_1 &= F_1 \cdot F_{n+1} \\ h_i &= F_i \end{aligned} \qquad (i = 2, \ldots, n) \ .$$

Da F_n^* und F_{n+1}^* *nur von der einzigen Variablen* x_n *abhängen*, haben sie in K keine gemeinsame Wurzel; denn eine solche könnte man nach **1.** zu einer Nullstelle des Systems $((F))$ im R^n ergänzen, während doch dieses System definit ist. Daraus folgt unmittelbar, daß das spezialisierte System (h^*) und die Projektion (F^*) (also nach Satz 6 auch (f^*)) im R^n *genau dieselben Nullstellen* haben[20]. Weiter gilt an jeder dieser Nullstellen:

$$\frac{\partial (h^*)}{\partial (x)} = \frac{\partial (F^*)}{\partial (x)} \cdot F_{n+1}^* \ .$$

Daraus und aus der Formel (20) ergibt sich die Behauptung nach den Definitionen 7 und 8.

Der Satz gilt auch noch, falls die Projektion (f) von $((f))$ aus lauter Konstanten besteht; man setze dann einfach $(h) = (f)$ und nehme für Ψ das Produkt dieser Konstanten.

Hingegen ist der Satz für $n = 1$ nicht mehr richtig; um den Indikator eines Systems von zwei Polynomen in einer Variablen auf ähnliche Weise zu charakterisieren, genügt ein einzelnes Polynom h nicht, sondern es tritt an dessen Stelle eine ganze Polynomkette. Diesen Fall habe ich in einer andern Arbeit behandelt[21].

(Eingegangen den 14. Mai 1947.)

[20]) Hier benützen wir zum erstenmal, daß $n \geqq 2$ sein soll.

[21]) *W. Habicht*, Eine Verallgemeinerung des Sturmschen Wurzelzählverfahrens, Comm. Math. Helv. dieses Heft, p. 99, insbesondere § 3, Reduktionssatz.