Dreikreisesatz und Zentrumproblem

Von Hubert Cremer, Aachen

Das Zentrumproblem, das ist die Frage nach notwendigen oder hinreichenden Bedingungen dafür, daß die analytische Funktion der komplexen Veränderlichen z

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \qquad |a_1| = 1 \tag{1}$$

in der Umgebung des Nullpunktes als transformierte Drehung, d. h. in der Form

$$f(z) = \varphi(a_1 \varphi^{-1}(z)) \tag{2}$$

mit

$$z = \varphi(w) = c_1 w + c_2 w^2 + \cdots, \quad c_1 \neq 0 \tag{3}$$

dargestellt werden kann, ordnet sich in zwei große Ideenkreise organisch ein. Der eine ist die Theorie der Iteration der rationalen und der ganzen Funktionen, welche insbesondere von *Julia* und *Fatou* entwickelt worden ist; die lange ungelöste, erst jetzt durch *Siegel*[1]) entschiedene Hauptfrage dieser Theorie nach der Existenz nichtkonstanter Grenzfunktionen der Folge der Iterierten hängt auf das engste mit dem Zentrumproblem zusammen. Der andere ist die Uniformisierungstheorie; hier fand das Problem bei einem Versuch, die Abbildbarkeit der körperlichen Ecke auf die Kreisfläche zu beweisen, bereits das Interesse von *H. A. Schwarz*[2]).

Siegel bewies 1942[1]), daß die *Schrödersche* Funktionalgleichung (2) für fast alle Multiplikatoren, nämlich diejenigen, für welche

$$\log |a_1^n - 1| = O(\log n) \qquad (n \to \infty) \tag{4}$$

gilt, immer lösbar ist. Jede Funktion (1), deren Multiplikator $f'(0) = a_1$

[1]) *C. L. Siegel,* Iteration of analytic functions, Annals of Mathematics 43 (1942) S. 607 ff.

[2]) Eine Darstellung dieser Zusammenhänge sowie ausführliche Literaturangaben zur Geschichte des Zentrumproblems findet der Leser in der Arbeit des Verf.: *H. Cremer,* Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem, Leipziger Berichte 84 (1932) S. 291—324.

der Bedingung (4) genügt, läßt sich also als transformierte Drehung darstellen. Zu allen Multiplikatoren, welche die Bedingung

$$\limsup_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n} \log |a_1^n - 1| = \infty \tag{5}$$

erfüllen, lassen sich dagegen[3]) Funktionen (1) konstruieren, für die (2) unlösbar ist. Die der Bedingung (4) genügenden Multiplikatoren umfassen alle Punkte des Einheitskreises mit Ausnahme einer Menge $\mathfrak{A}$ vom Lebesgueschen Maße Null. Die Multiplikatoren von $\mathfrak{A}$ haben die Eigenschaft, daß ihre Potenzen a_1^n, $n = 1, 2, \ldots$ die 1 besonders gut approximieren. Für solche Multiplikatoren und verschiedene Klassen von Funktionen hatte der Verf. schon früher[2]) die Unlösbarkeit der Schröderschen Funktionalgleichung bewiesen.

Im Hinblick auf das *Siegelsche* Resultat dürfte ein kurzer Beweis des folgenden Satzes von Interesse sein, welcher — grob formuliert — besagt, daß eine nichtlineare ganze Funktion $g(z)$ sich jedenfalls dann nicht in der Form (2) darstellen läßt, wenn $g'(0) = a_1$ gewissen, nur vom Wachstum von $g(z)$ abhängenden Teilmengen von $\mathfrak{A}$ angehört[4]). Dieser Beweis wird durch die Anwendung des *Hadamardschen* Dreikreisesatzes[5]) besonders einfach und durchsichtig.

Satz. *Eine ganze Funktion* $g(z) = \sum_1^\infty a_\nu z^\nu$, *die sich*

(*I*) *in der Umgebung des Nullpunktes als transformierte Drehung, d. h. in der Form* $g(z) = \varphi\left(a_1 \varphi^{-1}(z)\right)$ *mit* $\varphi(z) = \sum_1^\infty c_\nu z^\nu$, $c_1 \neq 0$ *darstellen läßt,*

(*II*) *die langsamer wächst als eine vorgegebene (monoton wachsende) Vergleichsfunktion* $F(r) > r$ (*d. h. für alle genügend großen* r *der Ungleichung* $\operatorname{Max}_{|z| \leq r} |g(z)| < F(r)$ *genügt*), *und*

(*III*) *deren Multiplikatorpotenzen* $a_1^n = g'(0)^n$ *die* 1 *gemäß der für große* r *gültigen, nur von* $F(r)$, *d. h. von der vorgegebenen Schranke für das Wachstum von* $|g(z)|$ *abhängenden Bedingung*

$$\liminf_{n=1,2,\ldots} |a_1^n - 1| \, F_n(r)^{\log r} = 0 \tag{6}$$

„besonders gut" approximieren, ist linear: $g(z) = a_1 z$.

[3]) *H. Cremer,* Über die Häufigkeit der Nichtzentren, Math. Ann. **115** (1938) S. 578, (Formel 8).

[4]) Vgl. *Cremer,* Leipziger Berichte **84** (1932) S. 299 ff.

[5]) Cf. *J. Hadamard,* Selecta (Paris 1935), p. 94—95, Fußnote 2. — *E. Landau,* Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 76.

$F(r)$ soll hierbei eine im übrigen frei vorgebbare positive Funktion der positiv-reellen Variabeln r, $F_n(r)$ ihre n-te Iterierte bedeuten $\big(F_n(r) = F(F_{n-1}(r)\ ,\ F_1(r) = F(r)\big)$.
Die Menge der Zahlen a_1, die der Bedingung (6) genügen, ist auf dem Einheitskreis überall dicht und besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums (bei jeder Wahl von $F(r)$) .

Auf Grund des eben formulierten Satzes lassen sich u. a. leicht Beispiele ganzer Funktionen jeder Ordnung und jedes Typus mit $|g'(0)| = 1$, $g'(0)^n \neq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ angeben, die keine Darstellung (2) gestatten. Nach dem *Siegel*schen Satze kann man aber durch eine beliebig kleine Änderung von $a_1 = g'(0)$ allein (wobei die Bedingung $|a_1| = 1$, $a_1^n \neq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ erfüllt bleibt) für die abgeänderte Funktion eine solche Darstellung erreichen.

Beweis des Satzes: Es genügt zu zeigen, daß für eine passende Teilfolge $g_{n_\nu}(z)$ der Iterierten von $g(z)$ in der ganzen Ebene

$$\lim_{\nu \to \infty} g_{n_\nu}(z) = z \tag{7}$$

gilt. Denn aus $g(z_1) = g(z_2)$ folgt $g_n(z_1) = g_n(z_2)$ und hieraus dann wegen (7) $z_1 = z_2$, also die Einwertigkeit und aus dieser die Linearität von $g(z)$.

Aus der Gültigkeit von (2) gewinnen wir zunächst eine Abschätzung für $M_n(r) = \underset{|z|=r}{\mathrm{Max}}\, |g_n(z) - z|$ in der Nähe des Nullpunktes. Durch $z = \varphi(w)$ wird ein passender, zum Nullpunkt konzentrischer Kreis $\mathfrak{K}$ der w-Ebene auf eine Umgebung $\mathfrak{Z}$ des Nullpunktes der z-Ebene schlicht abgebildet. Einem kleineren (mit $\mathfrak{K}$ konzentrischen) Kreise $\mathfrak{K}_1$ entspricht hierbei eine ganz im Innern von $\mathfrak{Z}$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{Z}_1$ des Nullpunktes. Da $\varphi'(w)$ in der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{K}_1$ beschränkt ist, gibt es eine Schranke K_1, derart, daß in $\mathfrak{K}_1$

$$|\varphi(w_2) - \varphi(w_1)| < K_1\, |w_2 - w_1|$$

gilt. Nun ist $g_n(z) = \varphi(a_1^n\, w)$ (z in $\mathfrak{Z}$), also haben wir für alle z in $\mathfrak{Z}_1$

$$|g_n(z) - z| = |\varphi(a_1^n\, w) - \varphi(w)| < K_1\, |a_1^n\, w - w| < K\, |a_1^n - 1|\ .$$

Die eben bewiesene Abschätzung

$$M_n(r) < K\, |a_1^n - 1| \tag{8}$$

gelte für $r \leq \varrho$, $0 < \varrho < 1$.

Für große r gilt

$$M_n(r) < F_n(r) + r < 2F_n(r) \ . \tag{9}$$

Der Beweis läßt sich nun mit Hilfe des *Hadamard*schen „Dreikreisesatzes" sofort erbringen. Dieser gestattet eine Abschätzung des absoluten Betrages $M(r) = \underset{|z|=r}{\mathrm{Max}} \, |f(z)|$ einer in einem Kreisring $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$ regulären und eindeutigen analytischen Funktion $f(z)$, wenn Schranken für $M(r_1)$ und $M(r_2)$ bekannt sind. Ist nämlich $M(r_1) \leqq M_1$, $M(r_2) \leqq M_2$, so gilt nach *Hadamard*[5]) für $r_1 \leqq r \leqq r_2$:

$$M(r) \leqq M_1^{\frac{\log \frac{r}{r_2}}{\log \frac{r_1}{r_2}}} \cdot M_2^{\frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}}} \ . \tag{10}$$

Wegen (8) und (9) liefert (10) mit $r_1 = \varrho$, $r_2 = 3r\varrho$ unmittelbar

$$M_n(r\varrho) \leqq K^{\frac{\log 3}{\log 3r}} \left| a_1^n - 1 \right|^{\frac{\log 3}{\log 3r}} \left[2F_n(3r\varrho) \right]^{\frac{\log r}{\log 3r}} \tag{11}$$

und hieraus folgt wegen (6) nach einer leichten Umformung (man ersetze dabei in (6) r durch $3r$) die Behauptung (7).

(Eingegangen den 7. Juli 1947.)