Il punto di vista gruppale nei vari tipi de equivalenza sulle varietà algebriche.

Autor(en): **Severi, Francesco**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **21 (1948)**

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18606

Il punto di vista gruppale nei vari tipi di equivalenza sulle varietà algebriche

Di Francesco Severi, Roma

Il punto di vista gruppale nello studio delle equivalenze sulle varietà algebriche fu considerato una prima volta nel 1910 in una delle mie Memorie sulla base e precisamente quando introdussi il gruppo fondamentale della divisione delle curve di una data superficie per un numero intero [1]; e una seconda volta fu sfiorato nel 1933 in uno dei miei lavori sulla teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza (razionali) [2].

L'inquadramento gruppale dei vari tipi equivalenza in relazione alla scelta di un sottogruppo del gruppo (abeliano, infinito, discontinuo) formato dalle varietà virtuali pure, di data dimensione k, sopra una varietà ambiente M_r, in quanto tali varietà (o meglio i sistemi di varietà *uguali* ad una data [3])) si assumano ad elementi e come operazione generatrice si prenda la somma, è stato delineato in una brevissima Nota di *J. A. Todd* [4]), limitatamente, si può dire, alla definizione fondamentale.

Avendo ripreso la questione nelle mie lezioni all'Istituto Nazionale di Alta Matematica nel gennaio 1947, ho voluto spingerne a fondo lo studio, che si presenta interessante pei legami che stabilisce fra la geometria algebrica e la teoria dei gruppi astratti.

E' però naturale che questa visione gruppale, nei momenti risolutivi, debba esser fiancheggiata (come spiego anche dal n. 26 in poi) dagli apporti di carattere funzionale, senza i quali essa rimane una sistemazione elegante, ma non costruttiva.

In particolare, le questioni concernenti la ricerca della base dei gruppi abeliani dell'equivalenza algebrica, dell'equivalenza lineare, della divisione algebrica e lineare e della irregolarità superficiale, richiedono riferimenti alle questioni collegate di geometria sopra una varietà; ma una volta compiuto il riferimento, questo ne risulta armonizzato e affinato.

---

[1]) Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1910).

[2]) Ved. alcune Note lincee del 1933, citate nel n. 26.

[3]) Ved. per una precisa specificazione i nn. 1, 2, 3 della presente Memoria.

[4]) Some groups-theoretic considerations in algebraic geometry (Annals of mathematics, vol. 35, 1934; pp. 702—704).

Le considerazioni gruppali mi porgono inoltre l'occasione di esporre una elaborazione, che direi definitiva, del concetto di equivalenza algebrica e del relativo teorema di unicità e di approfondire ulteriormente la relazione di equivalenza razionale, le cui caratteristiche fondamentali non posson esser esaurite dalla visione gruppale.

Mostro anzi come si possa introdurre un concetto a priori meno ampio, che chiamo di *stretta equivalenza razionale*, il quale è, al pari della lata equivalenza, invariante per trasformazioni birazionali ; e di natura gruppale.

Esso è o non è, nel fatto, meno ampio del concetto di lata equivalenza, secondo che esistono o non esistono sistemi irriducibili non unirazionali di varietà effettive equivalenti razionalmente (in senso lato).

Un sistema algebrico irriducibile di equivalenza (in senso lato) di varietà virtuali è sempre razionale (e viceversa) : occorre indagare se le traccie di un tal sistema nel campo delle varietà effettive si ripartiscano in sistemi che sieno soltanto unirazionali (o razionali).

Così, con riferimento alle serie d'equivalenza di ordine uno sopra le superficie, si tratta di sapere se una superficie F contenente una tal serie è necessariamente razionale ; mentre finora ho potuto soltanto affermare ch'essa è regolare, di genere geometrico zero, e a divisione univoca delle sue curve.

Questioni dunque sostanziali, che non si può sperare di superare solamente con sistemazioni formali, sieno pure larghe, eleganti ed utili.

Preliminari

1. Consideriamo le varietà (algebriche) tracciate sopra una varietà irriducibile e riferiamoci ad un modello M_r di questa, privo di punti multipli in un conveniente spazio [5]).

Fissata una dimensione k per le varietà di M_r, attribuiamo un segno ad ogni varietà irriducibile V_k e denotiamo la varietà orientata con $+V_k$ (*varietà positiva*) o con $-V_k$ (*varietà negativa*), secondo che è associata al $+$ oppure al $-$ [6]).

---

[5]) Si ammette il teorema della risoluzione delle singolarità per varietà qualunque, teorema classico per $r = 1, 2$ e dimostrato di recente (1944) da *Zariski* per $r = 3$. O se non si vuol ammettere questo, ci si limita a considerare le M_r che posseggono trasformate birazionali senza punti multipli.

[6]) Topologicamente si può dare un significato suggestivo, ma non necessario alla presente esposizione, dell'orientamento di una V_k. Ved. le mie Lezioni sulle Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche (a cura di *F. Conforto* ed *E. Martinelli*, Roma, Edizioni Cremonese, t. I, 1942; p. 12). Ved. pure la mia Memoria I fondamenti della geometria numerativa (Annali di Matematica, t. 29_4, 1940, pag. 158).

Un insieme di un numero finito di varietà irriducibili orientate, della *stessa* dimensione k, dicesi una *varietà virtuale pura* di dimensione k: pura, per denotare che non contiene parti (complete) di dimensione $<k$. D'ora innanzi ometteremo l'attributo, perchè non tratteremo che di varietà pure.

Si dice altresì che quell'insieme è la *somma* delle l varietà irriducibili che lo costituiscono (*componenti* o addendi): somma che nasce dunque, per definizione, commutativa e associativa. Essa denotasi con $V'+V''+\cdots+V^l$, qualora nei simboli V delle varietà si voglia incorporare il segno, oppure con $(+V')+(+V'')+(-V''')+\cdots+(-V^l)$ o $V'+V''-V'''-\cdots-V^l$ (omettendo il segno della prima, se è positiva). Si ha così la varietà sotto aspetto di somma algebrica. E' poi ovvio il significato di *differenza* C di due varietà A, B ($B+C$ è identica ad A).

Se tutte le componenti hanno il medesimo segno, la varietà designasi anche con $+(V'+\cdots+V^l)$ o $-(V'+\cdots+V^l)$ e si ha una *varietà riducibile positiva* o *negativa.* La denominazione di *varietà effettive* si dovrebbe riserbare alle varietà irriducibili o riducibili, non orientate; ma è spesso conveniente di usarla anche per denotare le varietà positive, irriducibili o riducibili. Dal contesto del discorso si desume se trattasi di una varietà non orientata o di una varietà positiva.

Ogni varietà virtuale è *identica* (come insieme di varietà irriducibili orientate) alla differenza di due varietà effettive.

2. Definiamo ora l'*uguaglianza tra varietà virtuali.* Sieno le varietà virtuali $A-B$, $C-D$, ove A, B, C, D son varietà effettive (s'intende sempre della fissata dimensione k). Si dice ch'esse son *uguali* e si scrive:

$$A-B=C-D\ ,$$

se le varietà somme della parte positiva di ciascuna delle due e della parte negativa dell'altra, presa positivamente, son identiche; cioè se

$$A+D=B+C\ ,$$

dove qui $=$ sta per « identico ».

Si riconosce subito che l'uguaglianza è riflessiva, simmetrica e transitiva. Invero, per ciò che concerne la transitività (proprietà meno immediata delle altre due), se

$$A-B=C-D \quad \text{e} \quad C-D=E-F\ , \tag{1}$$

sicchè:

$$A+D=B+C\ , \qquad C+F=D+E\ , \tag{2}$$

si ricava:

$$A + D + F = B + C + F \,, \qquad B + C + F = B + D + E \tag{3}$$

e quindi, dato che qui si tratta di relazioni d'identità, epperò transitive:

$$A + D + F = B + D + E \,, \quad \text{cioè:} \quad A + F = B + E \,,$$

la quale esprime appunto che le $A - B$, $E - F$ son uguali.

Ne deriva che:

$$A - A = B - B = C - C = \cdots \,, \tag{4}$$

perchè:

$$A + B = A + B \,; \quad B + C = B + C \,; \ \ldots$$

Una qualunque delle varietà uguali (4) si chiama lo *zero dell'uguaglianza* tra varietà virtuali e si indica con 0.

Si verifica senz'altro che uguaglianze tra varietà virtuali possono sommarsi o sottrarsi a membro a membro e che $A + 0 = A$.

La somma di λ varietà uguali ad A, ove λ sia un intero positivo, s'indica con λA e si chiama il *multiplo di A secondo λ*. E' chiaro che $-\lambda A = \lambda(-A)$.

Se $A + B = 0$, sommando a membro a membro con $0 = A - A$, se ne trae $B = -A$. Inoltre da $A = B - C$ segue $-A = C - B$, perchè $(B - C) + (C - B) = 0$; ecc. ecc. Insomma si costruisce un'algebra delle varietà virtuali, la quale è analoga a quella dei numeri reali relativi. Analoga, non identica, perchè esistono varietà che non sono nè positive nè negative.

Gruppo dell'uguaglianza

3. Presi come elementi di un insieme G i *sistemi* di varietà virtuali uguali fra loro, l'insieme G è un gruppo (abeliano, infinito, discontinuo) rispetto alla somma; l'identità è il sistema delle varietà zero; l'inverso del sistema delle varietà uguali ad A è il sistema delle varietà uguali a $-A$ [7]).

Chiameremo questo il *gruppo G dell'uguaglianza* tra varietà virtuali.

---

[7]) Per le nozioni elementari sui gruppi astratti, che qui occorrono, rinvio al bel libro di *Gaetano Scorza:* Gruppi astratti (a cura di *Giuseppe Scorza Dragoni* e *Guido Zappa*, Edizioni Cremonese, 1942).

E' facile provare che *il gruppo dell'uguaglianza non ammette un numero finito di generatori.*

Se si assumono invero n elementi $A', \ldots, A^n$ di G, rappresentati dai simboli di altrettante varietà virtuali *individuanti* quegli elementi, le varietà $\lambda_1 A' + \cdots + \lambda_n A^n$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ interi arbitrari, positivi, negativi o nulli, hanno le componenti *fisse*, epperò non posson rappresentare tutte le varietà virtuali di M_r; e ciò qualunque sia il numero di varietà prefissate.

4. In particolare, quando l'ambiente M_r è uno spazio lineare proiettivo S_r a coordinate omogenee di punto $x_0, x_1, \ldots, x_r$ ed è inoltre $k = r - 1$, si può dare delle ipersuperficie virtuali un'interpretazione mediante le funzioni razionali *semiomogenee* del punto $x(x_0, x_1, \ldots, x_r)$. Una tal funzione è quoziente di due polinomi omogenei φ, ψ (di gradi qualunque) nelle x. Diremo *uguali* due di queste funzioni quando moltiplicate pel prodotto dei loro denominatori, dànno due polinomi differenti fra loro per un fattore costante non nullo. Il prodotto di due funzioni razionali semiomogenee è una funzione dello stesso tipo, sicchè, assunti i sistemi di funzioni uguali fra loro a elementi di un insieme, questo risulta un gruppo (rispetto all'operazione di prodotto delle funzioni) di cui l'identità è costituita dalle funzioni identicamente costanti. Ebbene, fatta corrispondere alla funzione $\frac{\varphi}{\psi}$ e alle funzioni uguali l'ipersuperficie virtuale $A - B$, ove A, B hanno per equazioni rispettive $\varphi = 0$, $\psi = 0$, e le ipersuperficie uguali ad $A - B$, tra il gruppo definito in relazione alle $\frac{\varphi}{\psi}$ e il gruppo G dell'uguaglianza nasce *un isomorfismo, la cui esistenza permette di assumere come imagini algebrico-funzionali delle* $A - B$ *le* $\frac{\varphi}{\psi}$.

Geometricamente il quoziente $\frac{\varphi}{\psi}$ può caratterizzarsi mediante i suoi zeri e i suoi poli, considerati ciascuno col loro ordine di molteplicità, perchè il quoziente di due funzioni razionali semiomogenee aventi gli stessi zeri e gli stessi poli con le stesse molteplicità, essendo una funzione razionale di $x_0, x_1, \ldots, x_r$ priva di poli e di zeri per valori finiti (e, beninteso, non tutti nulli) delle x, riducesi a una costante non nulla. Sicchè l'insieme delle $\frac{\varphi}{\psi}$ uguali ad una data è definito dall'ipersuperficie effettiva V somma delle componenti irriducibili di $A + B$ e da una funzione numerica $N(x)$ del punto x di S_r, la quale esprime l'ordine di $\frac{\varphi}{\psi}$ in x: e cioè zero, quando x non appartiene a V e $\pm\lambda$ secondo che x è uno zero e rispettivamente un polo di ordine λ per $\frac{\varphi}{\psi}$. Pertanto si può anche assumere a imagine di $A - B$ l'associazione di V con le funzione numerica $N(x)$ [8]). In particolare l'ipersuperficie virtuale zero $A - A$ è caratterizzata dal fatto che la corrispondente $N(x)$ è identicamente nulla.

L'equivalenza algebrica e il suo gruppo

5. Prima di procedere oltre, conviene richiamare il concetto di equivalenza algebrica di varietà sopra M_r, risultante da precedenti miei lavori (dal 1904 in poi), onde aggiungervi precisazioni e complementi, i quali dànno ad esso una veste, che direi definitiva.

Occorre anzitutto fissar bene il concetto di *varietà totale* di un sistema algebrico irriducibile Σ, di varietà effettive V (di dimensione k) su M_r; concetto che figura già implicitamente od esplicitamente nelle definizioni da me date in passato dell'equivalenza algebrica [9]).

Le varietà di Σ sul modello M_r hanno lo stesso ordine: anzi, presa comunque in M_r una varietà effettiva (pura) W, di dimensione $r - k$ complementare di quella delle V, al variare di V in Σ resta addirittura costante il numero *virtuale* $[V, W]$ delle intersezioni di V, W [10]).

Supponiamo che la V generica di Σ non possegga che componenti *semplici* (così che l'ordine di V sia la somma degli ordini delle sue componenti irriducibili). Allora la sezione W, ∞^{r-k}, di V con un generico spazio lineare dell'ambiente proiettivo di M_r, di dimensione conveniente, stacca sulla generica V un gruppo (V, W) d'intersezioni semplici [11]).

---

[8]) E' questa sostanzialmente l'interpretazione contenuta in una Nota di *Spampinato*, Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell'S_r proiettivo complesso (Rend. dell'Accademia delle Scienze di Napoli, vol. XIV_4, 1946; vol. XV_4, 1947). La disarmonia che l'A. sembra riscontri nella definizione geometrica d'ipersuperficie virtuale, nella realtà non sussiste, perchè la somma di varietà deve sempre intendersi (sia nel campo delle varietà effettive come in quello delle varietà virtuali) quale sinonimo d'insieme delle varietà che la costituiscono; e, soltanto dopo definite a suo mezzo le varietà virtuali, essa diviene un'operazione interna del campo virtuale. Comunque l'accennata interpretazione algebrica acquisterebbe interesse maggiore se si estendesse a varietà di dimensione qualunque in un qualsiasi ambiente M_r: il che reputo possibile.

[9]) Ved. in particolare la Memoria citata, I fondamenti della geometria numerativa, pag. 159.

[10]) Serie d'equivalenza, ecc. p. 13. Le V di un sistema continuo hanno lo stesso ordine sopra ogni modello di M_r, nonostante che muti in generale il valore del loro ordine.

[11]) Serie d'equivalenza, ecc. p. 4.

Ciò posto, una varietà totale V_0 del sistema *irriducibile* Σ è definita dalle condizioni seguenti:

1) V_0 è, entro Σ, riguardato come insieme di elementi, un elemento di accumulazione di varietà V.

2) Ogni punto di V_0 è di accumulazione per punti di varietà V dell'intorno di V_0 in Σ.

3) Ogni componente irriducibile Z di V conta, come costituente di V_0, un certo numero $s \geq 1$ di volte e l'intero s si ottiene facendo tendere V a V_0 in Σ e contando quanti punti del gruppo (V, W) tendono ad uno qualunque (ché il risultato è lo stesso comunque si fissi un'intersezione di W con Z) dei punti del gruppo (Z, W) (ciascuno di questi, per la genericità di W, è un'intersezione semplice).

Si riconosce agevolmente che l'intero s è indipendente dal modello considerato di M_r, almeno se V_0 non è fondamentale per la trasformazione birazionale che fa passare da un modello all'altro. Se poi V possiede componenti multiple, si considererà il sistema irriducibile Σ' di varietà V' ottenute dalle V contando semplicemente le loro componenti. Quando V' è nell'intorno di una V_0' totale di Σ', ogni componente di V', che abbia la molteplicità t come componente di V, è prossima ad un gruppo determinato di componenti di V_0', ciascuna delle quali ha la propria molteplicità s entro V_0'. Ebbene, il prodotto st denota allora la molteplicità di questa componente di V_0', come parte della varietà totale V_0 di Σ, che prende origine da V_0'.

Fissato il concetto di varietà totale di un sistema Σ irriducibile, acquista senso pienamente rigoroso la definizione seguente:

a) Due varietà effettive A, B di M_r si dicono *algebricamente equivalenti* sopra M_r e si scrive

$$A \equiv B ,$$

quando son varietà totali di un medesimo sistema algebrico *irriducibile* di varietà di M_r oppure a tali si riducono aggiungendo una medesima varietà effettiva C.

Osservazione 1ª. La definizione di varietà totale di un sistema algebrico irriducibile Σ sopra M_r si può presentare in veste algebrica (e non infinitesimale, come si è qui fatto) proiettando genericamente sopra un S_{k+1} le V del dato sistema. Si ha ivi un sistema di ipersuperficie e per ciascuna di queste le molteplicità delle componenti son date dagli esponenti dei singoli fattori primi del primo membro della corrispondente equazione.

Osservazione 2ª. La necessità di ampliare la definizione *a*) con la seconda alternativa s'intravede fin dalla mia prima Memoria generale sulla base dei Mathematische Annalen, 1906, pp. 202, 203. La *a*) è adottata nella mia Memoria del 1934 sulla base delle varietà di dimensione qualunque contenuta in una data (Accademia d'Italia, 1934, p. 246); ma con la condizione (inutilmente più larga, come qui si vedrà) che il sistema contenente le due varietà sia connesso [12]). La definizione *a*) è la più ampia possibile. Essa è imposta, come vedremo, da ragioni essenzialmente gruppali [13]).

6. Diremo che un sistema algebrico Σ di varietà V di M_r è *connesso*, se non si può con talune sue componenti (cioè sistemi irriducibili *completi come parti di* Σ) formare un insieme di sistemi algebrici irriducibili non aventi varietà totali comuni con le componenti rimanenti di Σ.

E' facile vedere che *se* A, B *son due varietà totali di un sistema connesso* Σ, *esiste una successione di componenti di* Σ, *la prima delle quali contiene totalmente* A, *l'ultima totalmente* B *e due consecutive hanno qualche varietà totale comune.*

Poichè la proprietà è vera nel caso di una o di due sole componenti, ammettiamola per un sistema con meno di t componenti e dimostriamola per un Σ con t componenti. Se qualcuna delle componenti di Σ connesse con una componente Σ_1 di Σ, che contenga A, contiene B, il teorema è dimostrato; altrimenti si sopprima da Σ la componente Σ_1. Se il sistema Σ' residuo è ancora connesso, ed è Σ_2 una sua componente connessa con Σ_1, pel teorema ammesso esisterà una catena, come quella descritta nell'enunciato, da Σ_2 ad una componente di Σ' contenente B e questa catena potrà esser prolungata verso A, con l'aggiunta di Σ_1.

Se invece Σ' è sconnesso, ci sarà un sistema connesso Σ'' (eventualmente ridotto ad una sola componente) di componenti di Σ', contenente B, sconnesso colle componenti restanti di Σ', nessuna delle quali contiene B. E Σ'' dovrà esser connesso con Σ_1, altrimenti Σ non sarebbe connesso. Detta Σ_2 una componente di Σ'' connessa con Σ_1, poichè Σ'' contiene meno di t componenti, si conclude come prima.

---

[12]) Un esame di alcuni tipi di equivalenza algebrica di curve sopra una superficie, sopratutto nei riguardi dei sistemi algebrici considerati come luoghi di sistemi lineari, fu fatto da *Albanese* (Annali di Matematica, t. 24_3, 1915, p. 159).

[13]) Per le curve d'una superficie questa definizione «à peu près équivalente» a quella ch'io avevo data per la prima volta nei Math. Annalen, 1906, trovasi, con una lieve differenza inessenziale, in *Lefschetz*, L'analysis situs et la géométrie algébrique (Paris, Gauthier-Villars, 1924), p. 80. Ved. pure le mie Conferenze di geometria algebrica (raccolte da *B. Segre*, Roma, Tip. Genio Civile, 1927); p. 361.

7. Conseguenza della proprietà precedente è il teorema:

b) Se A, B son varietà effettive totali di un sistema algebrico connesso, esse son algebricamente equivalenti.

Invero o A, B appartengono ad una medesima componente del sistema connesso Σ e allora è soddisfatta la prima alternativa della a), oppure esiste in Σ, in forza del n. prec. una catena di sistemi irriducibili $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{t-1}, \Sigma_t$ il primo dei quali, Σ_1, contiene totalmente A, l'ultimo, Σ_t, contiene totalmente B; e inoltre Σ_1, Σ_2 hanno in comune almeno una varietà totale C_1; Σ_2, Σ_3 almeno una varietà totale C_2; ... ; Σ_{t-1}, Σ_t almeno una varietà totale C_{t-1}.

Ora le $A + C_1 + \cdots + C_{t-1}$, $C_1 + \cdots + C_{t-1} + B$, appartengono, come varietà totali, al sistema irriducibile (*prodotto* di $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_t$) costituito dalle varietà composte con t varietà totali tolte rispettivamente dai sistemi irriducibili $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_t$; cioè le A, B con l'aggiunta di una medesima varietà $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_{t-1}$, appartengono totalmente ad un sistema irriducibile e si verifica la seconda alternativa della a).

Osservazione. Se come definizione dell'equivalenza algebrica si assumesse la b), se ne dedurrebbe senz'altro la transitività della relazione stessa per le varietà effettive; ma, come vedremo nel n. 9 (Oss. 2ª), non se ne potrebbe ricavare altrettanto agevolmente la transitività della relazione per le varietà virtuali. D'altronde resta dubbio se la b) sia invertibile.

8. *Proviamo la transitività della relazione di equivalenza algebrica*, definita dalla a), per varietà effettive.

Siano A, B, C varietà effettive e sia

$$A \equiv B , \qquad B \equiv C .$$

Si deve dimostrare che $A \equiv C$. Invero, esiste qualche varietà effettiva D (che può non considerarsi, se già A, B appartengono totalmente allo stesso sistema irriducibile), tale che $A + D$, $B + D$ appartengono totalmente ad un sistema irriducibile; e, similmente, una E tale che $B + E$, $C + E$ son varietà totali di un sistema irriducibile. Ne deriva che $A + D + E$, $B + D + E$ son varietà totali di un sistema irriducibile Σ'; e $B + D + E$, $C + D + E$ varietà totali di un sistema irriducibile Σ''. Poichè Σ', Σ'' hanno in comune la varietà totale $B + D + E$; essi son componenti di un sistema connesso Σ; e, a norma del n. prec., risulta

$$A + D + E \equiv C + D + E , \qquad \text{cioè:} \qquad A \equiv C .$$

9. Estesa la relazione di equivalenza algebrica alle varietà virtuali; (al modo stesso con cui si passa (n. 2) dall'uguaglianza tra varietà effettive all'uguaglianza tra varietà virtuali), si dimostra *la transitività dell'equivalenza algebrica anche tra varietà virtuali*, come segue.

Sieno le varietà virtuali $A - B$, $C - D$, $E - F$ e fra esse intercedano le equivalenze algebriche:

$$A - B \equiv C - D \ , \qquad C - D \equiv E - F \ ,$$

cioè:

$$A + D \equiv B + C \ , \qquad C + F \equiv D + E \ .$$

Da queste si deducono le:

$$A + D + E \equiv B + C + E \ , \qquad A + C + F \equiv A + D + E \ ;$$

e, per la transitività dell'equivalenza algebrica tra varietà effettive:

$$A + C + F \equiv B + C + E \qquad \text{cioè:} \qquad A + F \equiv B + E \ ,$$

la quale mostra che le $A - B$, $E - F$ son algebricamente equivalenti.

Osservazione 1ª. In particolare due varietà virtuali uguali son algebricamente equivalenti.

Osservazione 2ª. Il passaggio dalla penultima all'ultima delle equivalenze tra varietà effettive non sarebbe lecito se non avessimo aggiunto alla definizione *a*) la seconda alternativa; e d'altra parte la mancanza della transitività dell'equivalenza algebrica tra varietà virtuali impedirebbe di far rientrare questo tipo di equivalenza nel concetto gruppale del n. 4.

Osservazione 3ª. Nel caso delle curve d'una superficie M_r ($k = 1$, $r = 2$) l'equivalenza algebrica fra curve virtuali coincide coll'equivalenza topologica e la transitività dell'equivalenza algebrica con la transitività dell'equivalenza topologica.

L'identificazione delle equivalenze algebrica e topologica costituisce uno dei brillanti risultati di *Lefschetz* (loc. cit. p. 81), che l'ha conseguito con mezzi topologico-trascendenti. Nella mia prima Memoria generale sulla base (1906) era stabilito, per via algebrico-geometrico, che se due curve A, B dello stesso ordine sopra una superficie soddisfanno alle relazioni numerative $[A, A] = [A, B] = [B, B]$ esse o due loro equimultipli convenienti son equivalenti [nel senso della *a*)] e quindi omologicamente equivalenti. *Albanese*[14]) osservò che quando, viceversa, A, B son omologicamente equivalenti, poichè segano ogni ciclo bidimensionale di F nello stesso numero (algebrico = aritmetico) d'intersezioni, son per esse soddisfatte le ricordate relazioni numerative e ridusse così il teorema di *Lefschetz* ad una conseguenza ovvia di quelle relazioni. Interpretata l'equivalenza algebrica come equivalenza topologica, dall'esistenza di una base pei cicli bidimensionali della superficie ne seguiva allora subito il teorema fondamentale della base per le curve d'una superficie, che io nel 1906, *Poincaré* nel 1910, e *Lefschetz* nel 1924, avevamo stabilito con mezzi trascendenti.

La stessa possibilità d'identificare equivalenza algebrica ed equivalenza topologica dei cicli $2k$-dimensionali algebrici di una M_r, non è stata però dimostrata in generale; ma soltanto fatta discendere da un postulato, che attende la sua completa giustificazione [15]). Non può dunque considerarsi senz'altro acquisita la transitività dell'equivalenza algebrica, nè perciò si può passare subito all'aspetto gruppale della questione, senza le considerazioni esposte dal n. 5 in poi od altre simili.

10. Stabilite le proprietà simmetrica, riflessiva, transitiva dell'equivalenza algebrica, le varietà differenze delle coppie di varietà virtuali algebricamente equivalenti, costituiscono ovviamente un sottogruppo invariante H del gruppo G dell'uguaglianza, ed H è così *lo zero dell'equivalenza algebrica*, nel senso che in questo tipo di equivalenza tutti gli elementi di H si assumono nulli (e si rappresentano col simbolo 0).

Le somme di una varietà A di M_r e delle varietà di H, dànno luogo ad un *sistema gruppale di equivalenza algebrica* $\{\{A\}\}$, individuato da A; e l'insieme dei sistemi $\{\{A\}\}$ costituisce un gruppo abeliano $G' = G/H$, fattore di G rispetto ad H, che chiamiamo il *gruppo dell'equivalenza algebrica*. Ma $\{\{A\}\}$ non è nè algebrico nè dimensionale, in quanto consta di un'infinità discontinua di sistemi continui.

Qui si pone, pel gruppo abeliano G', il problema della base, che, come s'intende a priori e come vedremo con qualche dettaglio fra breve, riducesi al problema della base per le varietà V di M_r.

La risoluzione di tale problema incide però soltanto sui sistemi gruppali e lascia p. es. in ombra la questione, che pure interessa di risolvere,

---

[14]) Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve d'una superficie algebrica (Rend. dell'Acc. Nazionale dei Lincei, aprile 1927, p. 481). Ved. anche le mie citate Conferenze di geometria algebrica, p. 363.

[15]) Ved. la mia Memoria, La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque, ecc. (Mem. della Accademia d'Italia 1934, p. 239), e particolarmente il n. 13. L'identificazione accennata vale a tutto rigore per $k = 1$ e $k = r - 1$.

se esiste un teorema di unicità anche pei sistemi algebrici di equivalenza algebrica (ossia, se anche per questi valga la transitività).

11. Sia A una varietà effettiva (si sottintende sempre di dimensione k) su M_r. La totalità delle varietà *effettive* (algebricamente) equivalenti ad A, la quale si potrebbe chiamare la *traccia* del sistema gruppale $\{\{A\}\}$ nel campo delle varietà effettive, è essa un ente algebrico? E' facile rispondere affermativamente.

Invero, presa una varietà effettiva B equivalente ad A, dovendo esistere qualche varietà effettiva tale che $A + C$, $B + C$ appartengano allo stesso sistema irriducibile, una varietà qualsiasi W, di dimensione complementare alle A, B, C, tracciata su M_r, soddisfa alla relazione numerativa:

$$[A, W] + [C, W] = [B, W] + [C, W] , \qquad \text{cioè:} \qquad [A, W] = [B, W].$$

In particolare le A, B hanno lo stesso ordine m; epperò le varietà effettive algebricamente equivalenti ad A si distribuiscono nei sistemi algebrici irriducibili *completi* (cioè non contenuti in sistemi irriducibili più ampii, cui appartengano *totalmente* le loro varietà), che abbracciano sopra M_r la totalità delle V di ordine m. Tali sistemi sono in numero finito [16]). Se una varietà B equivalente algebricamente ad A appartiene ad uno Σ di questi sistemi, tutte le varietà totali di Σ sono algebricamente equivalenti a B epperò ad A, cioè tutto il sistema Σ è una componente del sistema delle varietà equivalenti ad A, che risulta così costituito da alcuni (o tutti) i sistemi irriducibili completi, che esauriscono le varietà V di ordine m di M_r. In conclusione:

Le varietà effettive algebricamente equivalenti ad una data varietà effettiva A riempiono un sistema algebrico completo $\{A\}$, individuato da una qualunque di esse (e che consta di un numero finito di sistemi irriducibili, completi come tali, connessi o no fra loro).

Non è detto che il sistema $\{A\}$ sia connesso, ma è certo che se esso non comprende tutte le varietà di ordine m di M_r, le varietà che ne sono escluse si distribuiscono in sistemi irriducibili non connessi con $\{A\}$.

Il teorema stabilito prova che *la transitività dell'equivalenza algebrica vale anche nel campo delle sole varietà effettive*; sicchè i sistemi algebrici di equivalenza algebrica di queste varietà formano un *semigruppo* rispetto all'addizione.

---

[16]) Ved. la Memoria ora citata: La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque, ecc. p. 242.

La base del gruppo abeliano dell'equivalenza algebrica

12. Il teorema fondamentale della base (ved. i miei citati lavori del 1906 e del 1934, nei riguardi rispettivamente delle curve di una superficie e delle varietà di una M_r) afferma che su M_r possono scegliersi ϱ convenienti varietà virtuali algebricamente indipendenti $V', \ldots, V^{\varrho}$ (ossia tali che una loro combinazione lineare a coefficienti interi positivi o negativi, non tutti nulli non è mai algebricamente nulla), in guisa che, se V è un'altra qualunque varietà (pura, di dimensione k) di M_r sussiste, per $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ convenienti interi (positivi, negativi o nulli), l'equivalenza:

$$\lambda V + \lambda_1 V' + \cdots + \lambda_\varrho V^{\varrho} \equiv 0 \,, \quad (\lambda \neq 0) \,. \tag{5}$$

Se al posto delle V pensiamo i sistemi gruppali $\{\{V\}\}$ — il che intenderemo sempre fatto (senza portarci dietro simboli ingombranti) dato che ogni $\{\{V\}\}$ è *individuato* da una V — la (5) s'interpreta come una relazione fra ϱ elementi convenientemente fissati del gruppo G' dell'equivalenza, un altro elemento qualunque di G' e l'identità. Non è però ancora una base di G' nel senso della teoria dei gruppi [17]).

L'ulteriore passaggio ad una base intermediaria delle V di M_r [18]), permette di affermare l'esistenza di ϱ varietà $V', V'', \ldots, V^{\varrho}$ (base intermediaria) tali che per ogni V il coefficiente λ divide $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$, sicchè ogni V differisce da un'opportuna combinazione lineare di $V', \ldots, V^{\varrho}$ per un *divisore dello zero*, cioè per un elemento che o appartiene ad H o ha un suo multiplo opportuno appartenente ad H.

L'insieme dei divisori dello zero, forma un gruppo abeliano *finito* G_σ, di un certo ordine σ, che, come ho già ricordato, considerai nel 1910 per le curve di una superficie, con un procedimento algebrico-geometrico, che non è tal quale estendibile alle V di M_r, ma che lo diviene quando si appoggi ad altre proposizioni di geometria sopra una varietà o si trasferisca al campo topologico (ved. i successivi nn. 21, 23). Chiamai G_σ *gruppo della divisione* (rispetto all'equivalenza algebrica). Lo chiameremo ora più specificamente, dovendo considerare altri gruppi della divisione, il *gruppo della divisione algebrica*. Di questo gruppo abeliano si può considerare una base normale $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\tau$ [19]), ossia un sistema di ele-

---

17) *Scorza*, loc. cit. p. 131.

18) Ved. per le superficie la mia Memoria sulla base negli Annales de l'Ecole Normale Sup. de Paris, 1908 e l'altra Memoria citata dell'Acc. d'Italia, 1934, per ciò che concerne le varietà.

19) *Scorza*, loc. cit. p. 138; ved. pure: *Bianchi*, Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois (Pisa, Spoerri, 1900, p. 73).

menti generatori di G_σ, a periodi $t_1, t_2, \ldots, t_\tau$, tali che $\sigma = t_1, t_2, \ldots, t_\tau$ (con t_1, divisore di t_2; t_2 divisore di $t_3, \ldots, t_{\tau-1}$, divisore di t_τ) e indipendenti tra loro, nel senso che una relazione del tipo:

$$\mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 + \cdots + \mu_\tau \Gamma_\tau \equiv 0 \tag{6}$$

a coefficienti interi positivi, negativi o nulli, non possa esser verificata, se non essendo $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau$ rispettivamente multipli di $t_1, t_2, \ldots, t_\tau$.

Allora gli elementi $V', \ldots, V^\varrho$ di una base intermediaria e i τ divisori dello zero $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\tau$ costituiscono nel loro complesso una base minima per le V di M_r e nello stesso tempo un insieme di elementi generatori di G', indipendenti fra loro, nel senso che una relazione del tipo:

$$\lambda_1 V' + \lambda_2 V'' + \cdots + \lambda_\varrho V^\varrho + \mu_1 \Gamma_1 + \cdots + \mu_\tau \Gamma_\tau \equiv 0 \tag{7}$$

fra gli elementi aperiodici $V', V'', \ldots, V^\varrho$ e gli elementi periodici $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\tau$ non è possibile se non essendo

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_\varrho = 0 \,,$$

$$\mu_1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ t_1), \ldots, \mu_\tau \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ t_\tau) \,.$$

Invero, moltiplicando i due membri della (7) per σ se ne ricava

$$\sigma \lambda_1 V' + \sigma \lambda_2 V'' + \cdots + \sigma \lambda_\sigma V^\varrho \equiv 0 \,,$$

e quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\varrho = 0$. Dopo ciò la (7) diviene la (6) e si perviene alla parte ulteriore della conclusione. Dunque:

Il gruppo abeliano dell'equivalenza algebrica è generabile con un numero finito di $\varrho + \tau$ elementi ed ammette come sottogruppo (finito) il gruppo della divisione algebrica.

L'equivalenza lineare e il suo gruppo

13. Quando le V di M_r sieno ipersuperficie ($k = r - 1$), oltre all'equivalenza algebrica si deve considerare l'equivalenza lineare.

Due varietà effettive (s'intende ipersuperficie) A, B, sono *linearmente equivalenti* e si scrive $A \equiv B$, allorchè son varietà totali di un medesimo sistema lineare (e quindi sono anche algebricamente equivalenti). L'equivalenza lineare delle varietà virtuali si riduce a quella delle varietà effettive al solito modo (n. 2).

L'unicità del sistema lineare completo che contiene totalmente una data A — lo si indica, com'è noto, con $|A| - o$, ciò che è lo stesso, la transitività della relazione $\equiv$, appartengono ai fondamenti elementari della teoria.

Conviene osservare che queste proprietà (e il teorema invariantivo del resto, che ne consegue) possono stabilirsi con elegante semplicità con un tipo di argomentazione analoga a quella del n. 7, che fu diretta (n. 10) a dimostrare il teorema di unicità pei sistemi algebrici di equivalenza algebrica. Ed ecco come.

Sieno $|A|$, $|B|$ due sistemi lineari distinti (anche incompleti) aventi in comune una varietà totale C. La varietà delle coppie di elementi di $|A|$, $|B|$ è ovviamente razionale; a questa varietà appartengono le $A + C$, $B + C$. Ma le varietà di un sistema razionale su M_r stanno, come varietà totali, in uno stesso sistema lineare [20]), dunque le $A + C$, $B + C$ son varietà totali di un medesimo sistema lineare. E siccome la condizione imposta alle varietà di un sistema lineare di contenere una parte fissa è lineare, le varietà di quest'ultimo contenenti C, fatta astrazione da C, costituiscono un sistema lineare di cui le varietà di $|A|$, $|B|$ sono varietà totali; cioè un sistema più ampio dei due, che li contiene totalmente. L'unicità del sistema lineare completo è così acquisita.

14. La transitività della relazione $\equiv$ (insieme all'evidente riflessività e simmetria) fa rientrare l'equivalenza lineare nel concetto gruppale del n. 3, essendo sottogruppo zero di questo tipo di equivalenza l'insieme L delle varietà virtuali linearmente equivalenti a zero, ossia differenze di varietà linearmente equivalenti.

I sistemi di varietà ottenuti dalle singole varietà virtuali, in particolare effettive, di M_r, aggiungendovi le varietà di L, son individuati ciascuno da una varietà (ipersuperficie) A di M_r. Si perviene anche qui a insiemi di varietà a due a due linearmente equivalenti, che non sono algebrici: li chiameremo i *sistemi gruppali lineari* (e non già perchè sieno lineari !). Designeremo uno di essi con $\|A\|$. L'insieme degli $\|A\|$, considerati come elementi, costituisce il gruppo abeliano $G'' = G/L$, fattore di G rispetto ad L: è il *gruppo dell'equivalenza lineare* [21]).

E' chiaro che L è un sottogruppo di H, perchè le varietà linearmente nulle son particolari varietà algebricamente nulle.

---

[20]) Proprietà che si stabilisce con un tratto di penna. Ved. p. es. a pag. 86 delle mie Lezioni *Serie di equivalenza*, ecc.

[21]) Così G è il gruppo dell'uguaglianza, H il sottogruppo zero dell'equivalenza algebrica; $G' = G/H$ il gruppo dell'equivalenza algebrica; L il sottogruppo zero dell'equivalenza lineare; $G'' = G/L$ il gruppo dell'equivalenza lineare.

15. Proviamo che:

Affinchè il gruppo dell'equivalenza lineare ammetta un numero finito di generatori è necessario e sufficiente che la varietà ambiente sia superficialmente regolare.

Ricordiamo che la varietà M_r è *superficialmente regolare* quando ogni suo sistema irriducibile completo di varietà ad $r-1$ dimensioni consta di varietà linearmente equivalenti.

Se la M_r è superficialmente regolare, l'equivalenza algebrica (tra varietà ad $r-1$ dimensioni) riducesi all'equivalenza lineare e il gruppo G'' ammette un numero finito di generatori (n. 12). Supponiamo, viceversa, che G'' ammetta un numero finito di operatori; ciò che in ultima analisi equivale a supporre che esista una base per le varietà (ad $r-1$ dimensioni) di M_r, di fronte all'equivalenza lineare. Si posson dunque fissare in M_r ϱ convenienti varietà $V', \ldots, V^\varrho$ tali che per ogni altra V sussiste l'equivalenza

$$\lambda V + \lambda_1 V' + \cdots + \lambda_\varrho V^\varrho \equiv 0 \ , \qquad (8)$$

$\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho$, essendo interi (positivi negativi o nulli) dipendenti soltanto da V $(\lambda \neq 0)$.

Sia V effettiva (non nulla), variabile in un sistema algebrico irriducibile Σ. Gl'interi $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho$, non potendo variare con continuità, restano costanti; ossia λV (con λ intero che si può supporre positivo, dopo aver cambiato eventualmente il segno a tutti i termini della (8)), si conserva linearmente equivalente alla varietà *fissa* $-\lambda_1 V' - \cdots - \lambda_\varrho V^\varrho$; cioè le λV son varietà effettive totali di un medesimo sistema lineare; epperò (n. succ.) le V sono esse stesse linearmente equivalenti, come volevasi dimostrare.

16. Nel n. prec. si è fatto uso della proprietà che *se le ipersuperficie V d'un sistema algebrico tracciato sopra una varietà ambiente M_r son tali che i loro multipli secondo un certo intero λ sono linearmente equivalenti, le V stesse appartengono totalmente ad un sistema lineare.*

Questa proprietà fu incidentalmente dimostrata per $r = 2, 3$ (con ragionamento di ovvia estensione) in una mia Nota del 1906 [22]). Attraverso ai criteri di equivalenza [23]) essa riducesi in sostanza al caso $r = 1$ [24]). Le dimostrazioni per $r = 1$ sono una trascendente e l'altra

[22]) Atti dell'Istituto Veneto, t. 35.

[23]) Serie di equivalenza, ecc. p. 190.

[24]) Serie di equivalenza, ecc. p. 195.

algebrica. Ma si può anche dare (e per r qualunque) una dimostrazione differenziale, come segue.

Se le varietà λV appartengono al sistema lineare staccato su M_r da un certo sistema lineare di forme dell'ambiente lineare di M_r (fuori eventualmente di talune varietà base) ed è $\bar{F}$ la forma che segna su M_r una $\lambda \bar{V}$ genericamente fissata nel sistema delle λV, sicchè $\bar{F}$ o tocca M_r lungo $\bar{V}$ o ha in $\bar{V}$ una varietà multipla (variabile con $\bar{V}$), ogni forma del sistema delle F infinitamente vicina ad $\bar{F}$ passa per $\bar{V}$. Detta pertanto $\lambda \bar{V}_1$ la varietà infinitamente vicina a $\lambda \bar{V}$ segnata da una delle predette $\bar{F}$, ne segue $(\lambda - 1)\bar{V} \equiv (\lambda - 1)\bar{V}_1$, onde il passaggio da una $(\lambda - 1)V$ del sistema ad una infinitamente vicina fa rimanere nel sistema lineare $|(\lambda - 1)V|$ e le $(\lambda - 1)V$ son perciò linearmente equivalenti, e dunque lo sono le V, quali differenze delle λV e delle $(\lambda - 1)V$.

Il gruppo dell'irregolarità superficiale d'una varietà e la base del gruppo dell'equivalenza lineare

17. Il risultato del n. 15 non illumina la struttura del gruppo dell'equivalenza lineare quando la varietà M_r ha l'irregolarità superficiale $q > 0$, cioè contiene sistemi algebrici completi (come sistemi irriducibili) non lineari, di varietà effettive V (ad $r - 1$ dimensioni).

Per indagare in qual modo si può costruire mediante generatori il gruppo G'' anche sopra una M_r irregolare, occorre premettere alcune proprietà dei sistemi di equivalenza algebrica e di equivalenza lineare.

Imaginiamo anzitutto su M_r un sistema algebrico irriducibile Σ di varietà effettive (ad $r - 1$ dimensioni) A, che sia completo come sistema irriducibile. Il sistema lineare completo $|A|$, individuato dalla generica A, sta in Σ (nell'ipotesi contraria infatti Σ starebbe totalmente in un sistema irriducibile più ampio, descritto da $|A|$) ; ma non è escluso che, per particolari A, il sistema esorbiti da Σ, pel fatto che cresce di dimensione[25]). Comunque, il sistema Σ dà luogo ad un sistema irriducibile completo Σ' di sistemi lineari (considerati come elementi), individuati dalle sue varietà, anche se Σ', quale insieme di varietà, contiene altre varietà, oltre quelle di Σ.

Il sistema Σ' è *connesso*, come insieme delle sue varietà, le quali sono dunque tutte algebricamente equivalenti.

---

[25]) L'accrescimento di dimensione di $|A|$ non porta però come conseguenza necessaria l'esorbitanza. Ho considerato altra volta questi fenomeni: non mi dilungo nelle citazioni.

Sia i l'infinità dei sistemi lineari di Σ (o di Σ'). Il primo fatto importante che occorre ricordare è che i ammette un massimo finito, che è appunto l'*irregolarità superficiale* q di M_r ($q = 0$ quando M_r non contiene che sistemi lineari completi).

A prescindere dal significato che q possiede rispetto ad altri caratteri (geometrici, topologici, trascendenti) di M_r, l'esistenza di un massimo finito segue subito considerando una curva C sezione spaziale generica di M_r ed osservando che le V di un sistema algebrico segnano su C una serie algebrica di gruppi di punti distribuiti al più in ∞^p serie lineari distinte, p essendo il genere di C; e che, in virtù dei criteri d'equivalenza, le varietà d'un sistema continuo che segnano su C gruppi di una medesima serie lineare, son equivalenti tra loro.

Si pone ora la questione: Il sistema Σ' è esso completo come sistema algebrico di varietà effettive algebricamente equivalenti ad una, A, di esse? Coincide cioè esso col sistema $\{A\}$, di cui al n. 10? La risposta non è sempre affermativa, ma lo è tutte le volte che l'infinità i dei sistemi lineari di Σ' raggiunge il massimo q. Insomma:

Un sistema irriducibile completo di sistemi lineari di varietà A ad $r-1$ dimensioni, sopra una varietà M_r d'irregolarità q, è certamente completo, anche come totalità di varietà A algebricamente equivalenti, se l'infinità dei suoi sistemi lineari raggiunge il massimo q (ed esso è pertanto individuato da una qualunque delle sue varietà o dei suoi sistemi lineari).

Un teorema molto vicino a questo trovasi per $r = 2$ nella mia Nota citata degli Atti dell'Istituto Veneto, 1906; ivi è data una proprietà per le curve di una superficie, che da un lato è più significativa e da un altro meno.

Da un lato per concludere che il sistema è individuato da una sua curva basta invero di sapere che si tratta di una curva *aritmeticamente effettiva* (cioè i cui caratteri numerativi soddisfanno ad una certa disuguaglianza); d'altro lato però non si sa se la conclusione sia applicabile a tutti i sistemi di ∞^q sistemi lineari quando le curve che li costituiscono non son aritmeticamente effettive; nè si sa se esistano altre curve algebricamente equivalenti alla data in un sistema sconnesso con quello da essa individuato. Il teorema di unicità per un sistema formato da ∞^q sistemi lineari su M_r trovasi in una mia Nota recente[26]).

Per passare al teorema qual'è sopra enunciato basta dunque provare che se $\{A\}$ — od $\{\,|\,A\,|\,\}$, come anche scriveremo, quando il sistema si

---

[26]) Sulla irregolarità superficiale d'una varietà algebrica (Rendiconti dell'Acc. d'Italia, 1942), p. 553.

consideri quale insieme dei suoi sistemi lineari — consta di ∞^q sistemi lineari ed è B una varietà algebricamente equivalente ad una A, essa appartiene ad $\{A\}$.

Invero, esiste una C tale che $A + C$, $B + C$ appartengono allo stesso sistema irriducibile Δ, almeno ∞^1, del quale diciamo D la varietà variabile. L'insieme dei sistemi lineari $|D|$ è irriducibile, come Δ. Le varietà somme di C e delle singole varietà A stanno in ∞^q sistemi lineari distinti $|A + C|$, epperò, pel citato teorema di unicità, il loro sistema completo irriducibile è individuato dal sistema lineare $|A + C|$, relativo alla A prescelta. D'altronde a questo sistema completo appartiene la varietà irriducibile dei sistemi lineari $|D|$, in quanto tra essi vi è $|A + C|$, e quindi anche il sistema $|B + C|$, che è un particolare $|D|$. Ciò significa che esiste qualche A, sia A_0, tale che $|A_0+C|=|B+C|$; epperò $B \equiv A_0$.

18. Ma c'è di più. Nella Nota del 1905 in cui introdussi la nozione di curve virtuali [27]) assegnai un criterio numerativo (sufficiente) per riconoscere quand'è che fra le curve linearmente equivalenti ad una data curva virtuale ce n'è qualcuna effettiva (basta che la data curva virtuale sia aritmeticamente effettiva). Un criterio analogo per le varietà ad $r - 1$ dimensioni e per le curve di una M_r si può formulare [28]) almeno limitatamente all'equivalenza algebrica, che è meno esigente, mentre non si conosce affatto per varietà di dimensione diversa da 1, $r - 1$; ma esso è certo meno maneggevole di quello relativo alle curve di una superficie. Comunque il criterio cui s'allude permetterebbe di rispondere alla questione se un sistema gruppale $\{\{A\}\}$ abbia o no una propria traccia $\{A\}$ nel campo delle varietà effettive.

E' certo che vi sono sistemi gruppali che non contengono alcuna varietà effettiva. Un esempio elementare è dato, sopra una quadrica (non specializzata) F dello spazio ordinario, dalla curva virtuale $A=A_1+A_2-B$, ove A_1, A_2 sieno due generatrici d'una schiera e B una generatrice dell'altra schiera. Non può esistere alcuna curva effettiva C algebricamente (anzi linearmente, perchè siamo sopra una superficie razionale e dunque regolare) equivalente ad A. Invero, una tal curva sarebbe del 1^o ordine; ossia una retta, e dovrebbe dunque appartenere alla prima o alla seconda schiera; mentre non appartiene alla prima, perchè segherebbe le rette della seconda in un numero negativo (-1) di punti; nè può appartenere alla seconda, perchè segherebbe in due punti le rette della prima.

---

[27]) Rend. dell'Ist. Lombardo, 1905, p. 859.

[28]) Ho accennato ciò alla fine di pag. 251 della mia Memoria sulla base della Accademia d'Italia, 1934; ma il procedimento ha bisogno di essere sviluppato.

19. Tuttavia, a prescindere dal criterio per riconoscere quando fra le varietà virtuali di un sistema $\{\{A\}\}$ ve ne sono delle effettive, possiamo affermare qualcosa di preciso, ai nostri fini.

Diciamo per brevità che una varietà virtuale (ad $r-1$ dimensioni) su M_r è *linearmente effettiva*, se fra le varietà ad essa linearmente equivalenti ce n'è qualcuna effettiva. Sussiste allora il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni varietà virtuale di un sistema gruppale di equivalenza algebrica di varietà V ad $r-1$ dimensioni sia linearmente effettiva, è che il sistema contenga varietà effettive e ch'esse si distribuiscano in ∞^q sistemi lineari, q essendo l'irregolarità superficiale della varietà ambiente M_r.

Dimostriamo prima la sufficienza. Sia dunque $\{A\}$ un sistema irriducibile completo, costituito da ∞^q sistemi lineari completi $|A|$ (formanti una totalità forse riducibile, ma connessa) di varietà effettive.

Si tratta di dimostrare che, preso un qualunque operatore di H (zero dell'equivalenza algebrica), cioè una qualunque varietà virtuale, algebricamente nulla, $B-C$, fra le varietà algebricamente equivalenti alla varietà virtuale A_0+B-C, ove A_0 sia una varietà effettiva totale di $\{A\}$, ve ne sono delle effettive.

Osserviamo anzitutto che le varietà effettive B, C algebricamente equivalenti, con le quali si definisce la varietà virtuale nulla $B-C$, posson supporsi, previa l'eventuale aggiunta ad entrambe di una medesima varietà [n. 5, def. *a*)], appartenenti totalmente ad un medesimo sistema algebrico irriducibile Δ, almeno ∞^1. Dicasi D la generica varietà di Δ. Poichè i sistemi lineari $|A+D|$, somme di una D fissata e dei sistemi $|A|$, sono ∞^q come gli $|A|$, così, variando D in Δ, quegli ∞^q sistemi si muovono entro la totalità irriducibile ∞^q $\{|A+D|\}$, che contiene tutti quelli provenienti da una D fissata; e restano perciò, nel loro insieme, invariati. In particolare, tale totalità coincide coll'insieme dei sistemi lineari $|A+C|$, per A variabile in $\{A\}$; e siccome ad essa appartiene altresì $|A_0+B|$, vi sarà qualche posizione di A, sia A_1, per cui $|A+C|$ si identifica con $|A_0+B|$, onde $A_0+B\equiv A_1+C$, ossia $A_0+B-C\equiv A_1$, varietà effettiva. Ciò dimostra che esistono varietà effettive linearmente equivalenti ad A_0+B-C.

Dimostriamo ora la necessità dell'enunciata condizione. Sia $\{\{A\}\}$ un sistema gruppale coincidente, a meno di equivalenze lineari, col sistema algebrico $\{A\}$ definito da una delle sue varietà effettive. Una varietà virtuale algebricamente nulla, aggiunta ad una qualunque A non dà, per l'ipotesi, che varietà linearmente effettive. Se si assumono due varietà effettive B, C, che sieno varietà totali di un medesimo sistema $\{C\}$ luogo di ∞^q sistemi lineari distinti, e si tien fissa nel sistema la B, facendovi variare C, i sistemi lineari $| A + B - C |$, di varietà effettive, sono ∞^q e constano ciascuno di varietà effettive del sistema $\{\{A\}\}$, cioè di $\{A\}$, e questo sistema è dunque formato da ∞^q sistemi lineari distinti.

Corollario. *Ogni varietà algebricamente nulla è linearmente equivalente alla differenza di due convenienti varietà di un qualsiasi sistema* $\{A\}$ *contenente* ∞^q *sistemi lineari effettivi.*

20. I sistemi lineari $| A |$ tolti da un sistema completo $\{A\}$ di varietà effettive, costituito da ∞^q sistemi lineari, formano una varietà algebrica irriducibile V_q, birazionalmente equivalente a quella proveniente dai sistemi lineari $| B |$ di un analogo sistema completo $\{B\}$; la *varietà di Picard* inerente ad M_r. Invero, fissata nel sistema $\{B\}$ una varietà B_1 e considerata una varietà B in esso variabile, i sistemi lineari effettivi $| A + B_1 - B |$, sono tutti gli $| A |$ e corrispondono biunivocamente (birazionalmente) ai $| B |$. In particolare, prendendo $\{B\}$ coincidente con $\{A\}$, si costruisce il gruppo continuo abeliano ∞^q, G_q, di trasformazioni birazionali di $\{| A |\}$, cioè di V_q, in sè. Che le trasformazioni siano esattamente ∞^q, e non più, e che formino un gruppo si dimostra come segue.

Le varietà algebricamente nulle differenze delle coppie di varietà effettive di $\{A\}$, sono ∞^{2q}, ma esse riduconsi ad ∞^q linearmente distinte, appunto perchè, presa una, $A_1 - A_2$, di quelle differenze, ce ne sono ∞^q altre, $B_1 - B_2$, ad essa linearmente equivalenti, in quanto, variando $| B_2 |$ in $\{A\}$ vi sono ∞^q sistemi lineari $| B_1 | = | A_1 + B_2 - A_2 |$. La totalità degli ∞^q elementi $| A_1 - A_2 |$ costituisce un gruppo rispetto alla somma, perchè presi due, $| A_1 - A_2 |$, $| B_1 - B_2 |$ di questi elementi, ne esiste un altro $| C_1 - C_2 |$ dello stesso insieme, tale che

$$(A_1 - A_2) + (B_1 - B_2) = (C_1 - C_2) \ . \tag{9}$$

E invero, $A_1 + B_1 - A_2 \equiv C_1$, ove C_1 è una conveniente varietà effettiva di $\{A\}$; sicchè posto $C_2 = B_2$, sussiste l'equivalenza lineare (9). Nel gruppo ottenuto $| A_2 - A_1 |$ è l'elemento inverso di $| A_1 - A_2 |$ e $| A_1 - A_1 |$ è l'identità.

Come subito si constata dall'accennata costruzione di G_q, il gruppo degli elementi $| A_1 - A_2 |$ è isomorfo al gruppo G_q.

Il gruppo degli ∞^q sistemi lineari differenze delle coppie di sistemi lineari di una ∞^q di sistemi lineari tracciati su M_r, è indipendente dalla totalità dei sistemi lineari da cui si muove e costituisce quello che chiameremo *il gruppo continuo abeliano,* ∞^q, *dell'irregolarità superficiale di* M_r. Lo indicheremo col simbolo stesso G_q con cui abbiamo designato il gruppo, ad esso isomorfo, appartenente alla varietà di *Picard* V_q. Si constata subito che:

Il gruppo dell'irregolarità superficiale è il gruppo fattore dello zero dell'equivalenza algebrica rispetto allo zero dell'equivalenza lineare.

Infatti, un sistema laterale di L in H è formato dalle varietà linearmente equivalenti ad una data varietà V algebricamente nulla e tra le varietà linearmente equivalenti a V, ve ne è sempre, per quanto precede, qualcuna differenza di una coppia di varietà di un sistema $\{A\}$, costituito da ∞^q sistemi lineari, per guisa che ogni elemento di $\frac{H}{L}$ può esser rappresentato da un elemento di G_q e viceversa. La corrispondenza biunivoca fra i due gruppi è evidentemente un isomorfismo [29]).

Ne deriva che, essendo [30]):

$$G'' : \frac{H}{L} = \frac{G}{L} : \frac{H}{L} = \frac{G}{H} ,$$

si può enunciare:

Il gruppo dell'equivalenza lineare è il prodotto di un gruppo isomorfo al gruppo (discontinuo) dell'equivalenza algebrica pel gruppo continuo ∞^q *dell'irregolarità superficiale.*

A prescindere dal linguaggio della teoria dei gruppi astratti presa una base minima $V', \ldots, V^\varrho, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\tau$ dell'equivalenza algebrica (n. 12), per ogni altra V di M_r è

$$V \equiv \lambda_1 V' + \cdots + \lambda_\varrho V^\varrho + \mu_1 \Gamma_1 + \cdots + \mu_\tau \Gamma_\tau ;$$

e poichè la varietà differenza dei due membri di quest'equivalenza è algebricamente nulla, esiste qualche varietà Z di G_q, siffatta che:

$$V \equiv \lambda_1 V' + \cdots + \lambda_\varrho V^\varrho + \mu_1 \Gamma_1 + \cdots + \mu_\tau \Gamma_\tau + Z . \qquad (10)$$

Tale è il significato geometrico del teorema precedente.

Si può dire che *la base del gruppo dell'equivalenza lineare è data da* $V', \ldots, V^\varrho, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\tau, G_q$.

---

[29]) *Scorza,* Gruppi astratti, p. 39.

[30]) *Scorza,* Gruppi astratti, p. 44.

Il gruppo della divisione lineare

21. Innanzi di determinare i divisori dello zero nel campo (dell'equivalenza) lineare, proviamo che effettivamente anche per r qualunque (e non soltanto per $r = 2$, in cui la proprietà fu data nella mia Memoria sulla base del 1910) *il gruppo fondamentale della divisione (algebrica) fra varietà di dimensione* $r - 1$ *di* M_r *è finito:* proprietà usata nel n. 12.

Sia Z un divisore dello zero algebrico ed F la superficie sezione generica di M_r con uno spazio lineare di dimensione conveniente, dell'ambiente lineare di M_r. Possiamo porre $Z = A - B$ (A, B varietà effettive). Dico che se λ è il periodo di Z, cioè il più piccolo intero positivo per cui $\lambda Z \equiv 0$, la curva virtuale (Z, F) sezione di Z con F, è, sopra F, un divisore di periodo λ dello zero algebrico.

Invero, esiste una C tale che $\lambda A + C$, $\lambda B + C$ appartengono ad un sistema irriducibile, il quale sega F secondo un sistema irriducibile di curve contenenti $\lambda(A,F) + (C,F)$, $\lambda(B,F) + (C,F)$. Perciò $\lambda(A,F) \equiv \lambda(B,F)$, cioè $\lambda(Z,F) \equiv 0$. Il ragionamento s'inverte in virtù di una proprietà che ho altrove dimostrato [31]; e dunque i periodi di Z, (Z,F) son uguali.

Similmente si prova (sul fondamento della proprietà citata) che due o più divisori dello zero algebrico in M_r, indipendenti o dipendenti secondo certi interi non multipli dei loro periodi, dànno per traccie su F altrettanti divisori dello zero indipendenti o dipendenti secondo gli stessi interi.

Perciò i divisori dello zero algebrico sopra M_r — o più esattamente i loro sistemi gruppali, elementi del gruppo G_σ della divisione — son tanti quanti i divisori dello zero algebrico su F e i due gruppi della divisione su M_r e su F sono isomorfi e quindi ambedue finiti.

22. Sia ora su M_r un *divisore* Z *dello zero lineare* (ossia dello zero dell'equivalenza lineare). Esso è definito a meno di una varietà additiva linearmente nulla, cioè quando parliamo di Z alludiamo al sistema lineare gruppale $||Z||$. Invece il divisore Z, considerato a meno d'un'equivalenza algebrica, cioè come elemento $\{\{Z\}\}$ di G_σ, appartiene ad un sottogruppo G_{σ_0} del gruppo G_σ della divisione algebrica : lo chiameremo il *gruppo della divisione algebrico-lineare.*

Un elemento $||Z||$ di G_{σ_0} ha un periodo λ come divisore dello zero lineare ed un periodo, generalmente diverso, $\mu \leq \lambda$, come divisore $\{\{Z\}\}$ dello zero algebrico. E' facile riconoscere che λ è un multiplo di μ. E invero posto $\lambda = \mu\,\theta + \xi$ (μ, ξ quoziente e resto della divisione $\lambda : \mu$),

---

[31]) Ved. a pag. 1138 della mia Memoria Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche (Atti dell'Istituto Veneto, 1916).

da $$\mu \theta Z + \xi Z \equiv 0 ,$$

essendo $\mu \theta Z \equiv 0$, segue $\xi Z \equiv 0$ e quindi $\xi = 0$, perchè $\xi < \mu$.

Nel gruppo d'irregolarità G_q esistono poi dei divisori dello zero lineare (non linearmente, ma algebricamente nulli) : essi sono gli elementi periodici di G_q. Com'è ben noto dalle proprietà classiche del gruppo G_q della varietà di *Picard* V_q, per ogni dato valore intero del periodo vi è un gruppo finito di siffatti elementi, i quali dunque formano, nel loro complesso, un gruppo infinito discontinuo K, che si chiamerà il gruppo della divisione entro il gruppo d'irregolarità o più brevemente il *gruppo della divisione irregolare.*

Dimostriamo che :

Il gruppo dei divisori dello zero lineare (gruppo della divisione lineare) è il prodotto di un gruppo isomorfo al gruppo finito della divisione algebrico-lineare pel gruppo infinito discontinuo della divisione irregolare.

Ogni elemento $||Z||$, individuato da un divisore Z dello zero lineare, appartiene infatti ad uno dei sistemi gruppali d'equivalenza algebrica lineare di G_{σ_0} e differisce da un altro divisore Z' dello zero lineare, appartenente allo stesso sistema, per un elemento Z'', che, a meno d'un'equivalenza lineare, si può intendere quale elemento del gruppo d'irregolarità G_q. D'altronde tale elemento, essendo periodico, appartiene a K. La relazione $Z \equiv Z' + Z''$ dimostra l'asserto.

La base del gruppo della divisione lineare si può dunque formare aggregando ad una base di G_{σ_0} gli elementi di K.

23. Aggiungiamo qualche considerazione circa l'interpretazione topologica dei divisori dello zero algebrico e l'indicazione di alcuni altri legami colla topologia.

Anzitutto, siccome ogni divisore di periodo λ dello zero algebrico, è rappresentato sulla riemanniana di M_r da un ciclo $(2r - 2)$-dimensionale, il cui multiplo secondo λ è omologo a zero, i divisori dello zero algebrico, in quanto definiti a meno d'una equivalenza algebrica, sono necessariamente in numero finito, perchè sono in numero finito i divisori dello zero topologico di quella dimensione [32]). Si ritrova così la finitezza del gruppo della divisione algebrica, che abbiamo stabilita nel n. 21 per via algebrico-geometrica.

Si sa che i divisori dello zero topologico sopra una superficie sono tutti

---

[32]) Ved. p. es. le mie citate Conferenze di geometria algebrica, pp. 313—317.

algebrici (a meno di un'omologia; *Lefschetz*)[33]) e che pertanto la divisione (algebrica) ha per imagine topologica la *torsione* (*Poincaré*).

Il notevole risultato di *Lefschetz* si estende alle varietà ad $r-1$ dimensioni di M_r. All'uopo (conformemente a quanto accennai nella mia Memoria del 1934 sulla base, alla fine di pag. 251), basta osservare che per le varietà ad $r-1$ dimensioni di M_r l'equivalenza topologica coincide coll'equivalenza algebrica, come segue ovviamente (allo stesso modo che sulle superficie) dalla proposizione del n. 7 della mia citata Memoria sulla geometria numerativa (1916); epperò si può asserire che *i divisori dello zero algebrico esauriscono i divisori dello zero topologico di* M_r.

La proprietà vale anche per $k<r-1$, ammesso il postulato cui ho accennato nel n. 9.

I divisori dello zero lineare non hanno invece alcuna specifica interpretazione sul terreno topologico. Essi posson essere caratterizzati sul terreno trascendente, mediante gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti a M_r, considerando p. es. i loro gruppi d'intersezione con una curva sezione spaziale generica di M_r, e, naturalmente, mediante gl'integrali doppi di 1ª specie che li caratterizzano come divisori dello zero algebrico. Ma di ciò dirò diffusamente in altra occasione.

Il gruppo dell'equivalenza aritmetica e la sua base

24. Torniamo alle varietà V di dimensione k qualunque di M_r e ricordiamo[34]) che due tali varietà A, B si dicono *aritmeticamente equivalenti* quando, presa su M_r una *qualsiasi* varietà W di dimensione complementare $r-k$, è sempre

$$[A, W] = [B, W] .$$

Sono ovvie la simmetria, la riflessività e la transitività dell'equivalenza aritmetica. Poste in un insieme N le varietà aritmeticamente equivalenti a zero, ossia le differenze di coppie di varietà aritmeticamente equivalenti, i *sistemi gruppali di equivalenza aritmetica*, che indichiamo col simbolo $[[V]]$, si ottengono dalle singole varietà di M_r con le operazioni del sottogruppo N di G. I sistemi $[[V]]$ formano il *gruppo* $G''' = G/N$ *della equivalenza aritmetica.*

Se V è effettiva, le varietà effettive aritmeticamente equivalenti hanno lo stesso ordine, epperò (n. 11) costituiscono un *sistema algebrico di equivalenza aritmetica* $[V]$, individuato da V.

---

[33]) Ved. le predette Conferenze di geometria algebrica, p. 375.

[34]) Ved. la mia citata Memoria sulla base dell'Accademia d'Italia, 1934, p. 247.

La base di G''' si ottiene senz'altro da una base intermediaria di G', perchè due varietà aventi opportuni multipli algebricamente equivalenti, son aritmeticamente equivalenti. Non c'è dunque luogo a considerare qui i divisori dello zero.

25. Poichè G''' costituisce forse uno dei pochi elementi di carattere gruppale donde si possa sperare di poter trarre qualche tenue aiuto per una dimostrazione algebrico-geometrica dell'esistenza della base per le V di M_r, val la pena di avviarne lo studio con talune osservazioni preliminari.

All'insieme delle V corrisponde un insieme di interi relativi, che sono i numeri delle intersezioni delle V colle W di dimensione complementare. In particolare *alle V di un sistema gruppale* $[[V]]$ *corrisponde un gruppo abeliano infinito di interi* (gruppo, al solito, rispetto alla somma).

Invero, presi due a, b di questi numeri, esistono su M_r coppie di varietà V, W; V', W', tali che $[V, W] = a$, $[V', W'] = b$, con le V, V' aritmeticamente equivalenti. Perciò è anche $[V, W'] = b$ e quindi $[V \pm V', W'] = a \pm b$; onde $a \pm b$ appartiene allo stesso insieme di interi.

Si riconosce d'altronde subito che il gruppo numerico $\mathfrak{G}$, così ottenuto (come ogni gruppo abeliano infinito di numeri interi) consta di multipli del minimo intero > 0, appartenente a $\mathfrak{G}$ [35]).

Ad ogni $[[V]]$ corrisponde dunque un intero positivo m, la base di $\mathfrak{G}$, che è il minimo valore assoluto non nullo di tutti gli interi $[V, W]$, per V variabile in $[[V]]$ e W qualunque. In conclusione:

Sopra M_r, i numeri virtuali $[V, W]$ delle intersezioni delle varietà W_{r-k} con le V_k di un dato sistema di equivalenza aritmetica, sono tutti i multipli di un numero positivo non nullo determinato dal sistema.

Fra le infinite basi dei vari $\mathfrak{G}$ ve n'è poi una minima, che dà, in valore assoluto, il numero minimo non nullo d'intersezioni virtuali di tutte le coppie di varietà di dimensioni complementari k, $r - k$ di M_r.

Se $V', \ldots, V^{\varrho}$; $W', \ldots, W^{\varrho}$ è una coppia di basi intermediarie per l'equivalenza algebrica delle varietà di dimensione k e di quelle di dimensione $r - k$ [36]), l'insieme dei $\mathfrak{G}$ coincide coll'insieme dei numeri interi

---

[35]) Fatto elementare ben noto. Comunque eccone l'ovvia dimostrazione. Se è m il minimo intero di $\mathfrak{G}$, non è possibile trovare in $\mathfrak{G}$ un numero n (che può supporsi positivo) non multiplo di m, perchè altrimenti, detto θ il m. c. d. di m, n, l'intero θ si potrebbe esprimere come combinazione lineare a coefficienti interi di m, n e apparterrebbe dunque a $\mathfrak{G}$, contro l'ipotesi che m sia il minimo intero positivo di $\mathfrak{G}$.

[36]) Ved. la Memoria sulla base del 1934, pp. 249—250.

$$n = [V, W] = \sum_{i,j=1}^{\varrho} \lambda_i \mu_j [V^i, W^j] , \tag{11}$$

(ove, a meno dei divisori dello zero algebrico, $V \equiv \lambda_1 V' + \cdots + \lambda_\varrho V^\varrho$, $W \equiv \mu_1 W' + \cdots + \mu_\varrho W^\varrho$), che posson esser rappresentati dalla forma bilineare sopra scritta a coefficienti interi $[V^i, W^j]$ [37]).

Denotato con ν il minimo in valore assoluto degl'interi $[V, W]$ non nulli, tutti i multipli interi (positivi o negativi) di ν son rappresentabili sotto la forma (11) per convenienti λ, μ, perchè c'è un gruppo $\mathfrak{G}$, quello che corrisponde al sistema $[[V]]$ individuato da una V, che dia (con W) quel minimo, il quale comprende appunto tutti i multipli di ν.

L'insieme dei $\mathfrak{G}$ coincide pertanto con l'insieme dei multipli interi (positivi o negativi) di ν (e dunque è esso stesso un gruppo).

In particolare per $\nu = 1$, l'insieme dei $\mathfrak{G}$ coincide colla totalità di tutti gl'interi (positivi o negativi), epperò ognuno di questi si può rappresentare sotto la forma (11). E perchè $\nu = 1$, basta che esistano due V aritmeticamente equivalenti, siano V, V', e due convenienti W, W', tali che i numeri $[V, W]$, $[V', W]$ risultino primi tra loro, giacchè in tal caso il gruppo $\mathfrak{G}$ associato al sistema $[[V]]$ comprende tutti gl'interi.

Osservazione. Un altro elemento di carattere gruppale, che sarebbe decisivo per una dimostrazione algebrico-geometrica dell'esistenza della base per le ipersuperficie di M_r, è il seguente.

Sopra una curva irriducibile C, consideriamo la totalità dei gruppi virtuali di un numero finito qualsiasi di punti, che appartengono ad un dato corpo algebrico K. Essi costituiscono un gruppo $\mathfrak{G}$, rispetto alla somma (algebrica), perchè, se due gruppi effettivi di punti appartengono a $\mathfrak{G}$, vi appartiene anche il loro insieme (il loro gruppo somma).

Invero, le funzioni simmetriche elementari di ciascuna delle coordinate dei punti del gruppo somma si esprimono con polinomii plurilineari nelle corrispondenti funzioni simmetriche delle coordinate omonime dei gruppi addendi.

L'insieme $\mathfrak{A}$ dei gruppi virtuali nulli (di ordine nullo) forma in $\mathfrak{G}$ un sottogruppo e si tratta di determinare la base del gruppo $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ delle serie di equivalenza rispetto ad $\mathfrak{A}$ (a ciascuna delle quali appartiene la serie lineare completa individuata da ognuno dei suoi gruppi).

Una volta provato che $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ammette una base finita, se ne deduce agevolmente il teorema della base per le V di dimensione $r-1$ di M_r.

---

[37]) Un cangiamento di una o di ambedue le basi intermediarie non fa che assoggettare la forma ad una sostituzione o a due sostituzioni lineari unimodulari sulle variabili λ, μ corrispondenti e non muta l'insieme dei numeri rappresentabili con quella forma.

L'equivalenza razionale ed il suo gruppo

26. Cominciamo a richiamare il concetto generale di sistema d'equivalenza di varietà V (s'intende sempre *pure*), di dimensione k, o, come si dice, di un sistema d'equivalenza di specie k sopra M_r. Si dovrebbe aggiungere un attributo alla parola equivalenza per differenziarla dalle altre, e precisamente l'attributo *razionale* (per la ragione che risulterà dal seguito); ma lo omettiamo, quando non vi sia ambiguità, perchè in quest'ultima parte non tratteremo di regola di altre specie d'equivalenza [38]).

Anzitutto occorre ricordare che, se $|A^1|, |A^2|, \ldots, |A^{r-k}|$ son $r-k$ sistemi lineari di ipersuperficie effettive sopra M_r, col simbolo $(A^1, A^2, \ldots, A^{r-k})$ si rappresenta la varietà V a k dimensioni comune alle $A^1, A^2, \ldots, A^{r-k}$ tolte da quei sistemi (contando ciascuna parte di V con la sua molteplicità, in guisa cioè da avere la varietà totale); e, se questa varietà possiede parti di dimensione $>k$, una varietà di dimensione k ottenuta in modo conveniente col principio dell'equivalenza funzionale (in sostanza con un opportuno passaggio al limite). Se poi $A^1, A^2, \ldots, A^{r-k}$ non s'incontrano affatto, com'è anche possibile [39]), il simbolo $(A^1, A^2, \ldots, A^{r-k})$ denota una *varietà zero* a k dimensioni del nostro tipo di equivalenza, cioè una varietà che si può del tutto trascurare nell'equivalenza che stiamo per definire.

Variando le A nei rispettivi sistemi lineari, la $V = (A^1, A^2, \ldots, A^{r-k})$ descrive quel che chiamiamo un *sistema intersezione completa* o *sistema elementare d'equivalenza*. In particolare, se alcune delle A son fisse, la V non varia in tutto l'ambiente M_r, ma in una varietà subordinata, descrivendo ivi un sistema d'intersezione completa, che è tale anche in M_r.

Dato un numero finito di sistemi elementari e prefissato un segno per le varietà di ciascuno di essi, un *sistema irriducibile d'equivalenza* di varietà (effettive o virtuali) è l'insieme descritto dalla somma delle varietà prese coi segni fissati una per ciascuno da quei sistemi, quando gli addendi variano nei sistemi medesimi.

---

[38]) Rinvio, ove non occorrano specifiche citazioni, alle mie Lezioni Serie di equivalenza, ecc. e all'eccellente Monografia di *Conforto,* Lo stato attuale della teoria dei sistemi di equivalenza e della teoria delle corrispondenze algebriche tra varietà (Atti del Congresso matematico tenuto a Roma nel 1942; pubblicazioni dell'Istituto di Alta Matematica, Roma, 1945).

[39]) Si pensi p. es. ad una M_r luogo generico di una ∞^1 razionale di S_{r-1} (che non s'incontrino a due a due) e ad $r-k$ sistemi lineari $|A|$ coincidenti col sistema degli spazi generatori.

Un tal sistema è birazionalmente equivalente al prodotto dei dati sistemi elementari ed è perciò *razionale*.

Ed ecco ora la definizione generale:

a) Un *sistema d'equivalenza* di varietà V (effettive o virtuali) è un insieme di varietà tali che due qualunque di esse appartengono ad un sistema irriducibile di equivalenza.

Da osservare che a norma della a) *è un sistema di equivalenza ogni insieme di varietà V tali che due qualunque di esse siano linearmente equivalenti sopra una qualche varietà W_{k+1} subordinata all'ambiente M_r*. E' questo un aspetto dell'equivalenza (razionale) che avevo additato fin dal primo lavoro del 1932 sulla teoria.

La definizione stabilisce di per sè il carattere gruppale di questo tipo di equivalenza, che denoteremo col segno $\equiv$ [40]). Ciò deriva senz'altro dal fatto che la somma o la differenza di due sistemi d'equivalenza (s'intende sempre della stessa specie k) è, per definizione, un sistema d'equivalenza, e questo assicura anche a priori che, se A, B, C son varietà virtuali tali che $A \equiv B$ e $B \equiv C$, risulta $A \equiv C$. Verifichiamolo. Siano [41]):

$$A \equiv \sum_i V^{a_i}\,, \qquad B \equiv \sum_j V^{b_j}\,, \qquad C \equiv \sum_h V^{c_h}$$

ove le V, variabili in sistemi d'intersezione completa, son prese con segni opportuni. L'ipotesi è che:

$$B \equiv \sum_i V^{a_i}\,, \qquad B \equiv \sum_h V^{c_h}\,.$$

Allora viene:

$$A + B \equiv \sum_i V^{a_i} + \sum_h V^{c_h}\,, \qquad C + B \equiv \sum_h V^{c_h} + \sum_i V^{a_i}$$

e quindi:

$$A \equiv \sum_i V^{a_i} + \sum_h V^{c_h} - \sum_j V^{b_j} \equiv C\,.$$

La definizione a) segna il punto d'arrivo delle mie ricerche in proposito dal 1932 al 1934 ed è stata per la prima volta succintamente indicata in una mia Nota preventiva del 1934 [42]). E' naturale che *J. A. Todd*, dan-

---

40) Il segno $\equiv$ è suggerito dalla circostanza che per $k = r - 1$ si ricade ovviamente nell'equivalenza lineare.

41) Cfr. colla pag. 407 delle mie Serie di equivalenza, ecc.

42) Comptes rendus de l'Ac. des Sciences, 15 janvier 1934. La definizione è completamente indipendente dalla teoria dei sistemi d'equivalenza sulle varietà riducibili, che del resto nelle mie Lezioni, Serie di equivalenza, ecc. è sviluppata dopo.

dola di nuovo poco dopo (per le serie d'equivalenza sulle superficie) [43]), anzi con una lieve variante, che la rende, soltanto in apparenza, più restrittiva della mia originaria, dovesse trovare ch'essa coincide in sostanza con altra definizione meno maneggevole ch'io avevo dato in precedenza (Lincei, 1933). Nell'occasione avevo anche sfiorato (come ho detto) l'aspetto gruppale [44]), che poi *Todd* [45]) ha esplicitamente posto in rilievo.

Ma, a parte la circostanza che molti assaggi erano necessari in una direzione del tutto sconosciuta, per arrivare alla definizione più semplice e più ampia, è chiaro ch'essa avrebbe avuto scarsa portata costruttiva, se, dopo aver cercato di collegarla ai sistemi simultanei di più funzioni razionali del punto di M_r, attraverso ai sistemi elementari, non l'avessi altresì avvicinata ai sistemi razionali di varietà V, conservando così dei sistemi lineari (la cui nozione non può trasportarsi ai sistemi di V con $k < r - 1$, senza abbandonare la linearità), i soli attributi conservabili (relazione colle funzioni razionali, razionalità del sistema).

27. Discutiamo alcune altre circostanze della definizione.

In primo luogo consideriamo un sistema irriducibile d'equivalenza Σ. Può darsi che Σ possegga varietà effettive, cioè che lasci una *traccia nel campo delle varietà effettive*, come talora diremo, con frase più suggestiva: questo accade tutte le volte che nel sistema di equivalenza somma dei sistemi elementari componenti positivi di Σ, esistono varietà spezzate in varietà variabili nel sistema somma dei componenti negativi e in varietà residue, che sono appunto le varietà effettive di Σ. Un esempio tipico in tal senso è dato dalle curve sghembe di dato ordine, costituenti un unico sistema d'equivalenza differenza di due fissati sistemi intersezioni complete [46]).

Si può dunque parlare di *sistemi irriducibili d'equivalenza di varietà effettive*, cioè di sistemi irriducibili di varietà che appartengono alla traccia nel campo effettivo di un sistema come Σ.

Ha pure senso la nozione di *sistema irriducibile completo di equivalenza*, ossia di un sistema non ampliabile in un sistema di varietà (virtuali o effettive) con le componenti tratte coi debiti segni, dagli stessi sistemi

---

[43]) Ved. la Nota citata del maggio 1934.

[44]) Lincei, 5 marzo 1933, p. 492.

[45]) Il quale ha successivamente arrecato interessanti contributi sostanziali alla teoria dei sistemi d'equivalenza.

[46]) Serie d'equivalenza, ecc., p. 47.

elementari, quando questi son completi, cioè non ampliabili in sistemi elementari che li contengano totalmente.

Ma tali limitazioni del concetto delineato dalla *a*), giovevoli in taluni aspetti dei problemi (specialmente quando si considerano le varietà nel campo effettivo), priverebbero la definizione generale delle migliori capacità costruttive.

28. Bisogna dunque interpretare la *a*) nella sua più ampia accezione, cioè sotto l'aspetto gruppale che le è caratteristico, considerando le relazioni di equivalenza a meno di *varietà zero dell'equivalenza* (*razionale*), varietà differenze di varietà virtuali equivalenti e quindi anche (come subito si riconosce) di varietà effettive appartenenti ad un medesimo sistema irriducibile d'equivalenza.

Le varietà razionalmente nulle costituiscono un sottogruppo Q del gruppo G dell'uguaglianza e una V virtuale qualsiasi di M_r dà luogo ad un *sistema gruppale d'equivalenza* (*razionale*) $||V||$ [47]). I sistemi $||V||$, presi come elementi, costituiscono (rispetto alla somma algebrica) il *gruppo* G^{IV} *dell'equivalenza razionale*, che è poi il gruppo G/Q.

Si osserverà inoltre che Q è un sottogruppo del gruppo H delle varietà algebricamente nulle, poichè due varietà A, B di uno stesso sistema d'equivalenza sono rappresentabili con una medesima somma algebrica d'intersezioni complete e quindi sono algebricamente equivalenti.

I sistemi $||V||$, esattamente come accade per gli altri tipi di equivalenza, non sono nè algebrici nè dimensionali e ciascuno è individuato da una delle sue varietà.

Questo modo di vedere, che è il solo compatibile con la maggior generalità della *a*), importa la conseguenza che *le varietà di un sistema di equivalenza sono suscettibili di infinite rappresentazioni quali somme algebriche di varietà effettive variabili in sistemi d'intersezione completa:* esse si ottengono da una di esse aggiungendovi tutte le possibili varietà razionalmente nulle, differenze di varietà di sistemi elementari. Così nel n. 26, quando abbiamo esplicitamente indicato come da $A \equiv B$, $B \equiv C$, derivi $A \equiv C$, siamo passati da certe due distinte rappresentazioni delle A (e B) a una comune rappresentazione, la quale però presenta un numero maggiore di componenti delle rappresentazioni iniziali. Nè in generale è possibile fare altrimenti, senza perdere il carattere transitivo (gruppale) dell'equivalenza.

Pertanto tutte le volte che si confrontano due varietà di un sistema

---

[47]) Lo designamo col simbolo stesso dei sistemi gruppali lineari, perchè a un tal sistema si riduce per $k = r - 1$.

$||V||$, esse posson sempre riguardarsi come varietà di un sistema irriducibile di equivalenza ; ma la rappresentazione muta a seconda della coppia di varietà considerate ; e similmente per una terna, quaderna,..., per un numero finito qualunque di varietà di $||V||$. Nulla c'è di anormale in tutto questo, rispetto a quel che accade per gli altri tipi di equivalenza ed essenzialmente per l'equivalenza algebrica e per l'equivalenza lineare.

L'unica differenza è legata all'intima natura delle cose e non alla scelta più o meno felice delle definizioni.

E invero, se nell'equivalenza razionale bisogna in generale trascinarsi dietro, onde esprimere una varietà virtuale d'un sistema di equivalenza, più di una varietà positiva e più di una varietà negativa, mentre nell'equivalenza algebrica e nell'equivalenza lineare ogni varietà virtuale può sempre esprimersi colla differenza di due sole varietà effettive, ciò dipende dal fatto che nel campo algebrico o lineare la somma di più varietà effettive può sostituirsi con una sola varietà, perchè questa, in ciascuno dei campi considerati, è automaticamente della stessa natura delle componenti (la somma di più sistemi algebrici o lineari è invero contenuta totalmente in un sistema algebrico o rispettivamente lineare) ; mentre nel campo dell'equivalenza razionale la somma di più sistemi elementari (costituiti ognuno dalle varietà di livello di più funzioni razionali del punto di M_r) non è in generale contenuta totalmente in un sistema elementare (non può cioè definirsi come insieme di varietà di livello simultaneo di più funzioni razionali)[48]. Sicchè bisogna creare una categoria più vasta di enti (i sistemi di equivalenza), di cui i sistemi d'intersezione completa siano così particolari, la quale si chiuda rispetto alla somma.

Resta comunque il fatto che nelle equivalenze algebriche e lineari una varietà virtuale è suscettibile di *infinite rappresentazioni*, come nel caso dell'equivalenza razionale.

Si aggiunga che la transitività dell'equivalenza algebrica o dell'equivalenza lineare da A a B e da B a C, implica, esattamente come per l'equivalenza razionale, l'ampliamento del sistema algebrico o del sistema lineare a cui B viene ad appartenere insieme ad A, C.

29. Si può superare a priori nell'equivalenza razionale l'eterogeneità fra le componenti e il risultato di una somma algebrica di varietà, senza

---

[48]) La questione, posta a pag. 37 delle mie Lezioni Serie di equivalenza, se la somma di due serie intersezioni complete sopra una superficie qualunque sia sempre un'intersezione completa, questione per la quale ragioni topologico-trascendenti (p. 39) m'inducevano a considerare come probabile una risposta negativa, è stata risolta da *Morin* (Rend. Acc. Italia, 1941, p. 289), provando che le sole superficie per cui ciò accade sono le superficie razionali e le rigate.

esser costretti a creare l'omogeneità attraverso un concetto più largo? E' questo un aspetto importante che tocca le radici della teoria.

Un passo notevole in tale direzione, col quale si raggiunge il punto culminante della teoria generale quale oggi è, è dato dal teorema che *ogni sistema razionale (od anche soltanto unirazionale) di varietà (virtuali o effettive) è un sistema di equivalenza:* il che dunque nel caso di un sistema razionale afferma non soltanto l'equivalenza delle varietà, ma la identità delle loro rappresentazioni, come combinazioni lineari di un numero finito di sistemi elementari [49]).

Il valore del teorema è accentuato dal suo confronto con la identificazione [50]), possibile soltanto nel campo virtuale, dei sistemi di equivalenza coi sistemi intersezione completa di sistemi lineari virtuali d'ipersuperficie sopra M_r, a meno di varietà fisse o di varietà *semifisse* (descriventi sistemi di equivalenza su varietà fisse subordinate). E invero quest'identificazione non soltanto mantiene in evidenza, se non la razionalità, la unirazionalità dei sistemi irriducibili completi di equivalenza, ma *dà di tali sistemi una definizione omogenea, che non occorre ampliare di fronte alla operazione di somma.*

Prendendo il teorema come definizione si ottiene in verità un modo ricorrente di definire i sistemi d'equivalenza, perchè, l'impossibilità di escludere l'esistenza di varietà semifisse, descriventi sistemi di equivalenza su varietà subordinate, rende necessario di sapere già che cosa sono questi sistemi sulle varietà di dimensione $<r$. E perciò basta sapere che cosa sono sulle curve irriducibili, ove essi riduconsi alla serie lineari.

Inoltre la possibilità di ottenere un sistema irriducibile di equivalenza di specie k come intersezione completa di sistemi lineari virtuali, prova che *due varietà (effettive o virtuali) del sistema son equivalenti linearmente sopra una varietà (virtuale ed effettiva) di dimensione* $k+1$ *dell'ambiente.*

Vi è un altro teorema, che offre un modo ricorrente e omogeneo di definire i sistemi di equivalenza di *varietà effettive* V (dalle quali si può poi passare al solito modo — n. 2 — alle varietà virtuali) ed è quello che afferma la possibilità di staccare sopra M_r un tal sistema di varietà V per intersezione di M_r con una famiglia di varietà *effettive* W_{s-r+k} dell'ambiente lineare S_s di M_r, fuori di varietà fisse e di varietà semifisse descriventi sistemi di equivalenza su varietà subordinate, teorema che, in verità,

[49]) Quest'aspetto della questione sembra sia sfuggito a *Todd,* quando, al principio della sua Nota, afferma che la stessa generalità del concetto di serie di equivalenza sopra una superficie trasferisce l'importanza del concetto dalle serie alle relazioni di equivalenza.

[50]) Ved. Serie di equivalenza, p. 84.

ho potuto finora dimostrare soltanto per $r = 2$, $k = 0$ [51]), ma che certamente vale in generale. Però tale definizione ha a priori carattere proiettivo e dà poi luogo a difficoltà quando si vuole stabilire il carattere invariantivo per trasformazioni birazionali dei sistemi d'equivalenza, mentre nel caso dei sistemi lineari di ipersuperficie su M_r, il carattere invariantivo è già contenuto nella loro definizione proiettiva mediante sistemi lineari di forme dello spazio ambiente, perchè risulta subito che si tratta di sistemi di varietà di livello delle singole funzioni razionali del punto di M_r.

30. Un'altra considerazione essenziale avvicina forse di più la teoria ad una sistemazione poggiata sopra una definizione a priori omogenea e mostra meglio il valore sostanziale delle difficoltà inerenti, che nessuna sistemazione formale, gruppale o no, potrà ignorare.

b) Chiamiamo equivalenti razionalmente in senso stretto due varietà effettive A, B a k dimensioni di M_r quando son varietà totali d'un medesimo sistema unirazionale o a tali si riducono aggiungendo a ciascuna una medesima varietà C.

Le A, B a norma del teorema fondamentale ricordato nel n. prec., sono razionalmente equivalenti anche nel senso lato della a).

Ebbene, partendo dalla b), si può ripetere tal quale il procedimento dei nn. 6, 7, 8, 9, col mutare soltanto la relazione di equivalenza algebrica nella relazione di stretta equivalenza razionale e i sistemi algebrici in sistemi unirazionali.

Si arriva così alla conclusione che la stretta equivalenza razionale è transitiva e si estende tale transitività alla stretta equivalenza razionale fra varietà virtuali (n. 9), dopo essere passati, come nel n. 2, dalle relazioni fra varietà effettive alle relazioni fra varietà virtuali. *La definizione di stretta equivalenza razionale diviene così del tutto simile a quelle di equivalenza algebrica e di equivalenza lineare. Essa è non soltanto gruppale, ma omogenea fin dall'inizio e nel suo ambito vale altresì il concetto di sistema algebrico completo di varietà effettive equivalenti e il relativo teorema di unicità.*

Si potrebbe dunque limitare lo studio dei sistemi di equivalenza razionale a quelli di stretta equivalenza, i quali soddisfanno evidentemente anche alla definizione a) del n. 26; ma così si restringerebbe a priori il campo senza

---

[51]) Ved. la mia Memoria, Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza sulle superficie algebriche (Commentationes della Pontificia Accademia delle Scienze, vol. VI, 1942, p. 992).

prima aver risposto alla questione fondamentale se si tratta o no di un'effettiva limitazione, che potrebbe anche nella realtà non esserci.

Il gruppo Q' delle varietà razionalmente equivalenti a zero in senso stretto è insomma un sottogruppo di Q o coincide con Q?

La questione si può presentare sotto quest'altra veste.

Ogni sistema irriducibile completo di lata equivalenza razionale, dato dalla *a*), è un sistema razionale; ma la sua eventuale traccia, nel campo delle varietà effettive, è o no costituita soltanto da sistemi completi razionali o almeno unirazionali?

Insomma: *Può esistere un sistema irriducibile di varietà effettive, razionalmente equivalenti in senso lato, e completo come sistema irriducibile, che non sia unirazionale* (*in particolare razionale*)?

La questione si pone preliminarmente (come ho osservato più volte dal 1915 in poi) sia per le famiglie o varietà di curve degli spazi lineari, sia per le famiglie di curve piane di dato genere, sia per la varietà ∞^{3p-3} che ha per elementi la totalità delle curve birazionalmente equivalenti di genere p; ecc. Qualora si rispondesse negativamente per una qualunque di queste famiglie, ne deriverebbe la risposta negativa anche alla domanda precedente e quindi il fatto che l'equivalenza definita dalla *a*) è effettivamente più ampia di quella definita dalla *b*).

Osservazione. La determinazione della base pel gruppo G^{IV} dell'equivalenza razionale, conduce alla questione di sapere se l'infinità dei sistemi di equivalenza di varietà effettive di dimensione k e di dato ordine m, ammette, al crescere di m, un massimo finito, il quale sarebbe un nuovo carattere invariante della varietà ambiente M_r. E' un problema di grande importanza.

Esempio riguardante le serie di equivalenza sulle superficie

31. Riferiamoci alle serie di equivalenza, sulle superficie, nell'accezione *a*), che ho altra volta caratterizzato, dal punto di vista topologico, come serie a circolazione lineare nulla, a circolazione superficiale algebrica e a ciclo-torsione nulla.

Queste proprietà spettano naturalmente anche alle serie nell'accezione *b*) e siccome esse fissano il comportamento delle serie rispetto ai caratteri topologici fondamentali di F (connessione lineare, connessione superficiale, torsione), se la classe *b*) è più ristretta della *a*), supposto, come sembra naturale, che debba esistere una caratterizzazione topologica specifica della classe *b*), essa si dovrà riferire a caratteri topologici più riposti (gruppo di *Poincaré* o simili).

Per ciò che concerne il caso più semplice delle serie di equivalenza di ordine 1, ho dimostrato che se i punti di una superficie F formano una serie d'equivalenza nell'accezione *a*), la superficie è regolare, di genere geometrico $p_g = 0$ e a divisione delle curve univoca (cioè col gruppo G_σ ridotto all'identità)[52]. Basta questo per assicurare la razionalità della superficie F? Se la F non fosse razionale, dato che le superficie uni-razionali sono in conseguenza razionali (pel teorema di *Castelnuovo*), se ne dedurrebbe che le serie di stretta equivalenza razionale costituiscono una classe meno ampia della classe *b*).

Si tratta di cercare se una superficie regolare di genere $p_g = 0$ e di bigenere $P_2 > 0$ deve necessariamente possedere una torsione topologica (cioè avere il gruppo G_σ non ridotto all'identità). Se così fosse la F di cui sopra sarebbe razionale.

(Reçu le 11 juillet 1947.)

---

52) Ved. la mia Nota, Caratterizzazione topologica delle superficie razionali e delle rigate (Festschrift Rudolf Fueter, 1940, p. 53).