# Über die Stetigkeit der analytischen Funktionale.

Autor(en): **Haefeli, Hans Georg / Pellegrino, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **21 (1948)**

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18607

# Über die Stetigkeit der analytischen Funktionale [1]

Von Hans Georg Haefeli, Zürich, und Franco Pellegrino, Rom.

## 1. Einleitung.

Es ist bekannt, wie schon nach den ersten Arbeiten von *Volterra* die Theorie der Funktionale verfolgt und ausgearbeitet wurde. Die unter verschiedenen Gesichtspunkten einsetzenden Entwicklungen lassen sich nach einer beschreibenden und einer konstruktiven Richtung gruppieren. Zur ersten gehört die von *Volterra*, *Hilbert* und *Fréchet* entwickelte Theorie, wo die Eigenschaften gewisser Klassen von Funktionalen in Analogie zu den Resultaten in endlich-dimensionalen Räumen studiert und beschrieben werden, und weniger Wert auf die möglichen Anwendungen der betrachteten Funktionale gelegt wird. Zur zweiten Richtung gehören die Untersuchungen von *Fantappiè*, der sich zum Ziel setzt, eine Theorie der Funktionale zu konstruieren, die sich bei der Anwendung auf die klassischen Fragen der Analysis als *praktisch nützlich* erweist, ohne in einem ersten Entwurf zu lange bei den allgemeinen Eigenschaften und Begriffen zu verweilen. Die so von *Fantappiè* aufgebaute Theorie hat nun wirklich die Lösung einer Menge von Problemen erlaubt, von denen wir nur die folgenden erwähnen wollen:

1. Gesamthafte Begründung des sogenannten „*symbolischen Kalküls*" der linearen Funktionaloperatoren, mit welcher endgültig die rein heuristischen Methoden von *Heaviside* durch lückenlos strenge ersetzt werden, deren Gültigkeitsbereich sich genau bestimmen läßt; dabei wird die Theorie auch zur Berechnung von Funktionen von mehreren Operatoren erweitert [2].

---

[1] Diese Arbeit, welche durch die Vorlesungen von Prof. *Fantappiè* am Istituto Nazionale di Alta Matematica in Rom angeregt wurde, gibt unter anderm eine Antwort auf die von Prof. *Severi* gestellte Frage über die „a priori"-Kontinuität der linearen, analytischen Funktionale. Rend. di Mat. e sue appl., s. V — Vol. 1 — fasc. 2—3, pg. 248 — Questione 27.

[2] *L. Fantappiè*, La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali. Mem. Acc. d'Italia — Vol. 1 — N. 2 — 1930.

*L. Fantappiè*, Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili mediante il calcolo degli

2. Tatsächliche Lösung des *Cauchy'schen Problems* für alle partiellen linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Integrationen über bekannte Funktionen. Diese Lösung ist gerade eine Anwendung des Operatorenkalküls mit mehreren Operatoren [3]).

3. Noch allgemeiner, die Lösung einer sehr großen Klasse von linearen Funktionalgleichungen, in der alle Integralgleichungen von *Volterra* und *Fredholm* enthalten sind, und daher aller gewöhnlichen und partiellen linearen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten, und somit auch aller gewöhnlichen, nicht linearen Differentialgleichungen [4]).

Gegenüber diesen Resultaten blieben in der Theorie der analytischen Funktionale von *Fantappiè* noch fundamentale Fragen offen, die hingegen in der andern, vorher angegebenen Richtung gelöst wurden; unter diesen steht in erster Linie die Frage nach der *Stetigkeit* der analytischen Funktionale.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, die Theorie in dieser Richtung zu vervollständigen. Wir geben unter anderm einen „*a priori*"-Beweis der Stetigkeit der linearen analytischen Funktionale, d. h. ohne die Integralformeln

---

operatori lineari. Rend. Cir. Mat. di Palermo. Tomo LVII — 1933 — fasc. 1 e 2 — pg. 137—195.

[3]) *L. Fantappiè*, Soluzione con quadrature del problema di Cauchy-Kowalewsky per le equazioni di tipo parabolico. Rend. Acc. Lincei. Vol. XVII — s. VI — 1° sem. — fasc. 2 — 1933 — pg. 897—902.

*L. Fantappiè*, Integrazione per quadrature dell'equazione parabolica generale a coefficienti costanti. Rend. Acc. Lincei. Vol. XVIII — s. VI — 2° sem. — fasc. 7—8 — 1933 — pg. 266—270.

*L. Fantappiè*, Integration par quadratures de l'équation parabolique générale, à coefficients constants sur les caractéristiques. C. R. Acc. Sc., Paris — T. 197 — 1933 — pg. 969.

*L. Fantappiè*, Integrazione in termini finiti di ogni sistema od equazione a derivate parziali, lineari e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque. Mem. Acc. d'Italia — Vol. VIII — 1937 — pg. 613.

*L. Fantappiè*, Risoluzione in termini finiti del problema di Cauchy con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque. Rend. Acc. d'Italia — s. VII — Vol. II — fasc. 12 — 1941 — pg. 948—956.

*L. Fantappiè*, L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi. Annali di Mat. — s. IV — T. 22 — 1943 — pg. 181—289.

[4]) *M. Carafa*, Calcolo del nucleo risolvente delle equazioni funzionali lineari mediante un numero finito di integrazioni. Diese Arbeit befindet sich im Druck bei der Zeitschrift „Investigatio Mathematica", welche in Barcelona erscheint. Ein Auszug derselben, ebenfalls noch im Druck, soll in den Rend. Acc. Lincei unter dem Titel „Risoluzione delle equazioni funzionali lineari nel campo analitico mediante un numero finito di integrazioni" veröffentlicht werden.

zu benützen, mit deren Hilfe sich dieselben ausdrücken lassen; unser Beweis ist auch für die linearen Funktionale von Funktionen mehrerer Variablen gültig, für welche bis jetzt noch keine allgemeine Integraldarstellung gefunden wurde.

## 2. Definitionen.

Wir wollen nun die zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen Definitionen und Begriffe zusammenstellen. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Funktionen einer einzigen Variablen, bemerken aber, daß sich dieselben Definitionen ohne weiteres auch auf den allgemeinen Fall der Funktionen mehrerer Variablen[5]) übertragen lassen; die komplexe Zahlenkugel ist dann durch eine gewisse Segre-Mannigfaltigkeit $V_{2n}$, zu der man auch ein metrisches, ganz im Endlichen gelegenes Modell konstruieren kann, zu ersetzen. In der letzten Systematisierung der Theorie der analytischen Funktionale werden als Argumente der Funktionale die „*lokal-analytischen Funktionen*“, d. h. Funktionen, welche in einem oder mehreren Gebieten der komplexen Zahlenkugel eindeutig definiert sind und daselbst den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen genügen, genommen. Weiter wird von ihnen vorausgesetzt, daß sie *ultraregulär* sind, was besagen will, daß sie im unendlich-fernen Punkt verschwinden, falls dieser zu ihrem Definitionsbereich gehört. Wenn nun $A$ eine beliebige, geschlossene Punktmenge aus dem Definitionsbereich $M_0$ einer lokal-analytischen und ultraregulären Funktion $y_0(t)$ bedeutet, so nennen wir die Gesamtheit aller in $A$ ultraregulären, lokalanalytischen Funktionen $y(t)$, für welche

$$| y(t) - y_0(t) | < \sigma$$

gilt, wobei $\sigma$ eine beliebige, positive Zahl bedeutet, und $t$ in $A$ variiert, eine *Umgebung* $(A, \sigma)$ von $y_0(t)$ oder eine *beschränkte Umgebung*. Die Gesamtheit aller in $A$ ultraregulären, lokalanalytischen Funktionen bilden eine Umgebung $(A)$ oder eine *lineare Umgebung*.

Mit dieser Umgebungsdefinition wird die Gesamtheit der lokalanalytischen und ultraregulären Funktionen zu einem topologischen Raum $T_0$; diesen wollen wir *Funktionenraum* $R$ nennen. Eine offene Menge aus $R$ nennen wir ein *Funktionalgebiet* $G$; dabei ist $y(t)$ ein innerer Punkt von $G$, wenn er eine Umgebung $(A, \sigma)$ besitzt, die ganz in $G$ liegt. Hat $G$

---

[5]) *L. Fantappiè*, Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici. Mem. Acc. d'Italia — Vol. XII — 1941 — pg. 617—706. Diese Arbeit werden wir im folgenden mit N. F. zitieren.

ferner die Eigenschaft, daß mit einer beliebigen Anzahl von Funktionen $y_k$ auch deren lineare Kombination mit komplexen Koeffizienten $c_k$,

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$$

in $G$ liegt, so bezeichnen wir $G$ als *lineares* Funktionalgebiet. Die linearen Funktionalgebiete sind eineindeutig den geschlossenen, nicht leeren Punktmengen $A$ der komplexen Zahlenkugel oder einer Segre-Mannigfaltigkeit $V_{2n}$, wenn es sich um Funktionen mehrerer Variablen handelt, zugeordnet; $A$ ist die bestimmte Punktmenge, wo die Funktionen des linearen Funktionalgebietes und nur diese definiert und ultra-regulär sind, und heißt daher die jeweilen *zugeordnete charakteristische Punktmenge* [6]).

Daraus folgt sofort, daß ein lineares Funktionalgebiet mit der Umgebung $(A)$ einer jeden in ihm enthaltenen Funktion übereinstimmt, wenn $A$ die zugeordnete charakteristische Punktmenge bezeichnet. Eine Funktion $y_1(t)$ heißt *Fortsetzung* (nicht notwendig analytische) einer Funktion $y_0(t)$, wenn der Definitionsbereich von $y_1$ denjenigen von $y_0$ enthält, und $y_1$ im Definitionsbereich von $y_0$ mit $y_0$ übereinstimmt.

Eine Funktion $y = y(t, \alpha)$, die in bezug auf den Parameter $\alpha$ regulär ist, und sich für jeden Wert $\alpha$ eines gewissen Gebietes $\Omega$ der komplexen $\alpha$-Kugel auf eine in einem Gebiet der komplexen $t$-Kugel definierte, ultrareguläre Funktion $y(t)$ reduziert, heißt eine *analytische Linie*, wenn die für ein festes $\alpha$ auf der $t$-Kugel definierte, abgeschlossene Punktmenge $I(\alpha)$, wo die Funktion $y(t, \alpha)$ nicht definiert ist, sich stetig mit $\alpha$ ändert. Darunter verstehen wir, daß sich für jeden festen Wert $\alpha_0$ aus $\Omega$ zu einem beliebigen, positiven $\varepsilon$ stets eine Umgebung $U(\alpha_0)$ in $\Omega$ finden läßt, so daß die *Abweichung* [7]) der beiden abgeschlossenen Punktmengen $I(\alpha)$ und $I(\alpha_0)$ für $\alpha$ aus $U(\alpha_0)$ kleiner als $\varepsilon$ ist.

Über die analytischen Linien ist bekannt:

Ist $y = y(t, \alpha)$ eine analytische Linie und $y_0 = y(t, \alpha_0)$ einer ihrer Punkte mit $\alpha_0$ aus $\Omega$, so existiert zu jeder beliebigen Umgebung $(A, \sigma)$ von $y_0$ eine Umgebung $U(\alpha_0)$ in $\Omega$, so daß alle Punkte $y = y(t, \alpha)$ mit $\alpha$ aus $U(\alpha_0)$ in die Umgebung $(A, \sigma)$ von $y_0$ fallen [8]).

---

[6]) Siehe N. F., pg. 647. — Für eine gesamthafte Darstellung der analytischen Funktionale siehe auch: Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones. Seminario Matematico de Barcelona. 1943.

[7]) Unter der Abweichung zweier Mengen $I_1$ und $I_2$ der komplexen Zahlenkugel verstehen wir die obere Grenze der Entfernungen, welche die Punkte jeder dieser Mengen von den Punkten der andern Menge haben.

[8]) siehe N. F., pg. 644.

Dringt eine analytische Linie $y = y(t, \alpha)$ mit $\alpha$ aus $\Omega$ in ein Funktionalgebiet $G$ ein, so existiert in $\Omega$ ein Gebiet $\Omega'$ derart, daß alle Punkte $y = y(t, \alpha)$ mit $\alpha$ aus $\Omega'$ in $G$ liegen[9]).

Nun können wir die *analytischen Funktionale*[10]) definieren: Ein Funktional $F[y(t)]$ heißt analytisch, wenn es folgenden drei Bedingungen genügt:

I. Das Funktional ist in einem Funktionalgebiet $G$ des Raumes $R$ der lokal-analytischen, ultraregulären Funktionen definiert.

II. Wenn $y_1$ eine Fortsetzung von $y_0$ ist, so muß

$$F[y_0(t)] = F[y_1(t)]$$

sein.

III. Wenn $y = y(t, \alpha)$ eine analytische Linie ist, die für $\alpha$ aus $\Omega'$ in das Definitionsgebiet eines analytischen Funktionals $F$ eindringt, so muß

$$F[y(t, \alpha)] = f(\alpha)$$

für $\alpha$ aus $\Omega'$ eine reguläre, lokal-analytische Funktion sein.

Die analytischen Funktionale bewahren daher die Analytizität in bezug auf ihre Parameter. Dies ist die Eigenschaft, welche nach einem Satz von *Poincaré* die Anwendung auf Differentialgleichungen erlaubt. Diese Möglichkeit, in welcher das von *Fantappiè* vorgefaßte Ziel liegt, rechtfertigt die Definition.

Ein analytisches Funktional heißt nun *linear*, wenn es folgenden beiden weitern Bedingungen genügt:

IV. Sein Definitionsbereich ist ein lineares Funktionalgebiet $(A)$.

V. Sind $y_1$ und $y_2$ zwei beliebige Funktionen des linearen Funktionalgebietes $(A)$, so gilt:

$$F[y_1(t) + y_2(t)] = F[y_1(t)] + F[y_2(t)] \ .$$

### 3. Die Geraden im Funktionenraum *R*.

Es sei $y_0(t)$ ein Punkt unseres Funktionenraumes $R$, $(A)$ eine seiner linearen Umgebungen, und $(A, \sigma_0)$ eine beliebige, darin enthaltene, beschränkte Umgebung. Nun nennen wir die Gesamtheit der Funktionen

---

[9]) siehe N. F., pg. 653.

[10]) Genauer lokal-analytisch, doch werden wir der Einfachheit halber fortan immer nur von analytischen Funktionen und Funktionalen sprechen, da in dieser Arbeit keine andern vorkommen.

$y^*(t)$ aus $(A)$, welche in jeder ihrer Umgebungen $(A, \sigma^*)$ Funktionen, die in der Umgebung $(A, \sigma_0)$ von $y_0(t)$ und solche, die nicht in dieser Umgebung liegen, besitzen, den *Rand der Umgebung* $(A, \sigma_0)$ *in* $(A)$.

*Damit eine Funktion* $y^*(t)$ *dem Rande der Umgebung* $(A, \sigma_0)$ *von* $y_0(t)$ *angehört, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\operatorname{Max} | y^* - y_0 | = \sigma_0 , \tag{1}$$

*wenn t in A variiert.*

Daß die Bedingung (1) hinreichend ist, sehen wir sofort, wenn wir die Funktionen der Geraden

$$y = y_0 + \alpha(y^* - y_0)$$

betrachten. Genügt nämlich der Betrag von $\alpha$ der Ungleichung

$$\begin{cases} | 1 - \alpha | < \dfrac{\sigma^*}{\sigma_0} , \\ | \alpha | < 1 , \end{cases}$$

so erhalten wir Funktionen der Geraden, welche sowohl der Umgebung $(A, \sigma^*)$ von $y^*$, als auch der Umgebung $(A, \sigma_0)$ von $y_0$ angehören. Genügt umgekehrt der Betrag von $\alpha$ der Ungleichung

$$\begin{cases} | 1 - \alpha | < \dfrac{\sigma^*}{\sigma_0} , \\ | \alpha | > 1 , \end{cases}$$

so erhalten wir Funktionen der Geraden, welche wohl der Umgebung $(A, \sigma^*)$ von $y^*$, nicht aber der Umgebung $(A, \sigma_0)$ von $y_0$ angehören.

Um nun zu zeigen, daß die Bedingung (1) auch notwendig ist, setzen wir voraus, daß sich in jeder beliebigen Umgebung $(A, \sigma^*)$ von $y^*$ Funktionen $y_2$ und $y_3$ finden lassen, die folgenden Ungleichungen in ganz $A$ genügen:

$$| y_2 - y_0 | < \sigma_0 , \qquad \operatorname{Max} | y_3 - y_0 | > \sigma_0 .$$

Man sieht nun leicht, daß

$$| y^* - y_0 | < \sigma_0 + 3\, \sigma^*$$

ist, und ferner:

$$\sigma_0 < \operatorname{Max} | y_3 - y_0 | = \operatorname{Max} | (y_3 - y_2) + (y_2 - y^*) + (y^* - y_0) |$$

$$\leqslant \operatorname{Max} \{ | y_3 - y_2 | + | y_2 - y^* | + | y^* - y_0 | \} \leqslant 3\, \sigma^* + \operatorname{Max} | y^* - y_0 | .$$

Somit erhalten wir:

$$\sigma_0 - 3\, \sigma^* < \operatorname{Max} | y^* - y_0 | < \sigma_0 + 3\, \sigma^* .$$

Wegen der Unabhängigkeit von $\sigma^*$ folgt nun sofort die Behauptung

$$\mathrm{Max}\,|\,y^* - y_0\,| = \sigma_0\ .$$

Es sei nun $R$ ein lineares Funktionalgebiet, und $(A, \sigma)$ eine in ihm enthaltene Umgebung einer Funktion $y_0$ von $R$. Wir betrachten die Gerade, welche $y_0$ mit einer beliebigen, festgewählten Funktion $\bar{y} \neq y_0$ aus $(A, \sigma)$ verbindet. Diese Gerade existiert, da die beiden Funktionen $y_0$ und $\bar{y}$ in der gleichen Punktmenge $A$ definiert sind. Ihre Gleichung können wir folgendermaßen schreiben:

$$y = y_0 + \bar{\beta}(\bar{y} - y_0)\ . \tag{2}$$

Nun halten wir in $(A, \sigma)$ eine beliebige Umgebung, etwa $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ fest. Wir wollen nun sehen, für welche Werte des Parameters $\bar{\beta}$ wir auf der Geraden (2) Punkte $y^*$ erhalten, welche die Relation

$$\mathrm{Max}\,|\,y^* - y_0\,| = \frac{\sigma}{2} \tag{3}$$

erfüllen. Diese Punkte liegen daher auf dem Rand der Umgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ von $y_0$ in $(A)$. Die entsprechenden Parameterwerte bezeichnen wir mit $\bar{\beta}^*$. Nun erhalten wir:

$$\mathrm{Max}\,|\,y^* - y_0\,| = \mathrm{Max}\,|\,\bar{\beta}^*(\bar{y} - y_0)\,| = |\,\bar{\beta}^*\,|\,\mathrm{Max}\,|\,\bar{y} - y_0\,| = \frac{\sigma}{2}\ ,$$

und somit
$$|\,\bar{\beta}^*\,| = \frac{\sigma}{2\,\mathrm{Max}\,|\,\bar{y} - y_0\,|}\ .$$

Unter diesen Funktionen $y^*$ können wir eine bestimmte $\bar{y}^*$ auszeichnen, die wir erhalten, wenn wir dem Parameter $\bar{\beta}$ den reellen, positiven Wert $\bar{\beta}_1^*$

$$\bar{\beta}_1^* = \frac{\sigma}{2\,\mathrm{Max}\,|\,\bar{y} - y_0\,|} \tag{4}$$

geben.

Wir bemerken noch, daß $\mathrm{Max}\,|\,\bar{y} - y_0\,|$ in $A$ existiert und von Null verschieden ist, weil $A$ abgeschlossen ist und die Funktionen $\bar{y}$ und $y_0$ nicht identisch sind.

Wir wollen nun die Gleichung der Geraden (2) mit Hilfe der Punkte $y_0$ und $\bar{y}^*$ schreiben

$$y = y_0 + \bar{\alpha}(\bar{y}^* - y_0)\ . \tag{5}$$

Da wir diese Darstellung im folgenden sehr oft benützen müssen, wollen wir etwas näher auf sie eingehen.

*a) Die Gesamtheit der mit Hilfe einer Funktion $\bar{y}$ berechneten Funktionen $y^*$ stimmt überein mit der Gesamtheit der Funktionen $y^*$, welche mit Hilfe einer beliebigen andern Funktion $\bar{\bar{y}}$ der gleichen Geraden berechnet wurden.*

Es sei
$$y^* = y_0 + \bar{\bar{\beta}}_2^* (\bar{\bar{y}} - y_0) ,$$
wo
$$\left| \bar{\bar{\beta}}_2^* \right| = \frac{\sigma}{2 \operatorname{Max} \left| \bar{\bar{y}} - y_0 \right|}$$
ist.

Es genügt nun zu zeigen, daß der Wert $\bar{\beta}_2^*$ des Parameters $\bar{\beta}$, für welchen wir aus der Darstellung (2) der Geraden dieselbe Funktion $y^*$ erhalten, durch
$$\left| \bar{\beta}_2^* \right| = \frac{\sigma}{2 \operatorname{Max} \left| \bar{y} - y_0 \right|}$$
gegeben ist.

Aus
$$y^* = y_0 + \bar{\bar{\beta}}_2^* (\bar{\bar{y}} - y_0) = y_0 + \bar{\beta}_2^* (\bar{y} - y_0)$$
erhalten wir
$$\frac{\bar{\bar{\beta}}_2^*}{\bar{\beta}_2^*} = \frac{\bar{y} - y_0}{\bar{\bar{y}} - y_0} , \qquad \text{und daher} \qquad \frac{\left| \bar{\bar{\beta}}_2^* \right|}{\left| \bar{\beta}_2^* \right|} = \frac{\operatorname{Max} \left| \bar{y} - y_0 \right|}{\operatorname{Max} \left| \bar{\bar{y}} - y_0 \right|} .$$
Somit
$$\left| \bar{\beta}_2^* \right| = \left| \bar{\bar{\beta}}_2^* \right| \frac{\operatorname{Max} \left| \bar{\bar{y}} - y_0 \right|}{\operatorname{Max} \left| \bar{y} - y_0 \right|} = \frac{\sigma}{2 \operatorname{Max} \left| \bar{\bar{y}} - y_0 \right|} \cdot \frac{\operatorname{Max} \left| \bar{\bar{y}} - y_0 \right|}{\operatorname{Max} \left| \bar{y} - y_0 \right|} ,$$
und deshalb
$$\left| \bar{\beta}_2^* \right| = \frac{\sigma}{2 \operatorname{Max} \left| \bar{y} - y_0 \right|} , \quad \text{q. e. d.}$$

*b) Die Gesamtheit aller Funktionen der Geraden (2), welche auf dasselbe $\bar{y}^*$ führen, erhalten wir für alle reellen, positiven Werte des Parameters $\bar{\beta}$.*

Aus $\bar{y}^* = y_0 + \bar{\beta}_1^* (\bar{y} - y_0)$ und $\bar{\bar{y}}^* = y_0 + \bar{\bar{\beta}}_1^* (\bar{\bar{y}} - y_0)$ erhalten wir
$$\bar{\bar{y}}^* - \bar{y}^* = \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\bar{\bar{y}} - y_0}{\operatorname{Max} \left| \bar{\bar{y}} - y_0 \right|} - \frac{\bar{y} - y_0}{\operatorname{Max} \left| \bar{y} - y_0 \right|} \right] . \tag{6}$$
Weil aber $\bar{\bar{y}}$ auch auf der Geraden liegt, gibt es einen Parameterwert $\bar{\beta}_2$ von $\bar{\beta}$, so daß
$$\bar{\bar{y}} = y_0 + \bar{\beta}_2 (\bar{y} - y_0)$$

wird. Dann können wir (6) folgendermaßen schreiben:

$$\bar{\bar{y}}^* - \bar{y}^* = \frac{\sigma}{2}\left[\frac{\bar{y} - y_0}{\operatorname{Max}|\bar{y} - y_0|}\left(\frac{\bar{\beta}_2}{|\bar{\beta}_2|} - 1\right)\right].$$

Damit ist gezeigt, daß die beiden Funktionen $\bar{\bar{y}}^*$ und $\bar{y}^*$ nur für reelle, positive Parameterwerte übereinstimmen.

*c) Der Betrag des Parameterwertes, der uns eine fest gewählte Funktion der Geraden bestimmt, ist von der Wahl des in der Geradengleichung auftretenden $y^*$ unabhängig.*

Es seien $\bar{y}^*$ und $\bar{\bar{y}}^*$ zwei beliebige Funktionen unserer Geraden auf dem Rand von $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ von $y_0$. Nun wird eine beliebige Funktion $y_1$ der Geraden durch

$$y_1 = y_0 + \bar{\alpha}_1(\bar{y}^* - y_0) \qquad \text{und} \qquad y_1 = y_0 + \bar{\bar{\alpha}}_1(\bar{\bar{y}}^* - y_0)$$

dargestellt. Dann muß $\bar{\alpha}_1(\bar{y}^* - y_0) = \bar{\bar{\alpha}}_1(\bar{\bar{y}}^* - y_0)$ sein. Da die Parameterwerte von $t$ unabhängig sind, und da

$$\operatorname{Max}|\bar{y}^* - y_0| = \operatorname{Max}|\bar{\bar{y}}^* - y_0| = \frac{\sigma}{2}$$

ist, folgt sofort die Behauptung

$$|\bar{\alpha}_1| = |\bar{\bar{\alpha}}_1|\,. \tag{7}$$

Umgekehrt lassen sich zu zwei Parameterwerten $\alpha_1$ und $\alpha_2$, welche denselben Betrag haben, immer zwei Funktionen $y_1^*$ und $y_2^*$ finden, so daß

$$y_1 = y_0 + \alpha_1(y_1^* - y_0) \qquad \text{und} \qquad y_1 = y_0 + \alpha_2(y_2^* - y_0)$$

wird. Zu diesem Zweck genügt es

$$y_2^* = y_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(y_1^* - y_0)$$

zu wählen.

*d) Die Gesamtheit der Funktionen $y$, welche wir bei einer bestimmten Darstellung der Geraden mit festgewähltem $y^*$ für Parameterwerte desselben Betrages erhalten, hat die Eigenschaft, daß der Betrag ihrer Differenz mit $y_0$ von $y$ unabhängig ist.*

Es seien

$$y_1 = y_0 + \alpha_1(y^* - y_0) \text{ und } y_2 = y_0 + \alpha_2(y^* - y_0) \text{ mit } |\alpha_1| = |\alpha_2|\,.$$

Dann folgt sofort $\qquad \alpha_2(y_1 - y_0) = \alpha_1(y_2 - y_0)$

und daher
$$| y_1 - y_0 | = | y_2 - y_0 | \, . \tag{8}$$

Im speziellen erhalten wir für die Parameterwerte mit dem Betrage 1 die Gesamtheit der auf der Geraden liegenden Funktionen $y^*$.

e) Es sei nun außer der Umgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ eine beliebige weitere Umgebung $\left(A, \frac{\bar{\sigma}}{2}\right)$ von $y_0$ gegeben. Dann ist einem festgewählten Punkt $y_1$ unserer Geraden außer dem Punkt $y^*$ auf dem Rand der ersten Umgebung noch ein zweiter Punkt $\bar{y}^*$ auf dem Rand der zweiten Umgebung zugeordnet. *Wird nun die Gerade mit Hilfe dieser Punkte $y^*$ und $\bar{y}^*$ dargestellt, so sind die Parameterwerte $\alpha$ und $\bar{\alpha}$, welche dieselbe, beliebige Funktion der Geraden festlegen, zu $\sigma$ und $\bar{\sigma}$ umgekehrt proportional.*

Es sei also
$$y = y_0 + \alpha(y^* - y_0) \quad \text{und} \quad y = y_0 + \bar{\alpha}(\bar{y}^* - y_0)$$
mit
$$\operatorname{Max} | y^* - y_0 | = \frac{\sigma}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Max} | \bar{y}^* - y_0 | = \frac{\bar{\sigma}}{2} \, .$$

Dann erhalten wir sofort
$$\frac{y^* - y_0}{\bar{\alpha}} = \frac{\bar{y}^* - y_0}{\alpha}$$
und daraus
$$\frac{\sigma}{\bar{\alpha}} = \frac{\bar{\sigma}}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \alpha\,\sigma = \bar{\alpha}\,\bar{\sigma} \, .$$

## 4. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit analytischer Funktionale.

Aus der Bedingung III (siehe Definitionen), welcher die analytischen Funktionale genügen müssen, folgt sofort, daß jedes analytische Funktional in einem beliebigen Punkt $y_0 = y(t, \alpha_0)$ einer jeden analytischen Kurve $y = y(t, \alpha)$ stetig ist. Das bedeutet, daß sich in Abhängigkeit zu einem beliebigen, positiven $\varepsilon$ stets ein positives $\delta$ so finden läßt, daß für alle Funktionen $y(t, \alpha)$ mit $| \alpha - \alpha_0 | < \delta$
$$\left| F[y(t, \alpha)] - F[y(t, \alpha_0)] \right| < \varepsilon \qquad \text{ist}^{11)}.$$

[11]) Siehe S. 32 des unter Note 6 zitierten Buches.

Es sei jetzt $y_0$ eine Funktion aus einem Funktionalgebiet $G$, in welchem ein Funktional[12]) $F$ definiert ist. Dann existiert in $G$ eine Umgebung $(A, \sigma)$ von $y_0$. Wir betrachten jetzt eine Gerade durch $y_0$ und wollen $F$ nur auf ihre in $(A, \sigma)$ enthaltenen Punkte $y$ ausüben. Wählen wir zwei Darstellungen dieser Geraden mit Hilfe der Punkte $\bar{y}^*$ und $\bar{\bar{y}}^*$, so erhalten wir:

$$F[y] = F[y_0 + \bar{\alpha}(\bar{y}^* - y_0)] = \bar{f}(\bar{\alpha}) ,$$

$$F[y] = F[y_0 + \bar{\bar{\alpha}}(\bar{\bar{y}}^* - y_0)] = \bar{\bar{f}}(\bar{\bar{\alpha}}) = \bar{\bar{f}}(\varkappa\bar{\alpha})$$

mit $|\varkappa| = 1$, weil nach (7) $|\bar{\alpha}| = |\bar{\bar{\alpha}}|$ sein muß. Damit haben wir:

$$\bar{f}(\alpha) = \bar{\bar{f}}(\bar{\bar{\alpha}}) = \bar{\bar{f}}(\varkappa\bar{\alpha}) \tag{9}$$

und daraus im speziellen

$$\bar{f}(0) = \bar{\bar{f}}(0) = F[y_0] . \tag{10}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionale auf jeder analytischen Kurve gibt es zu einem beliebigen, positiven $\varepsilon$ stets ein positives $\delta$, so daß für $|\bar{\alpha}| < \delta$

$$|\bar{f}(\bar{\alpha}) - \bar{f}(0)| < \varepsilon$$

ist. Wegen (9) und (10) gilt aber

$$|\bar{f}(\bar{\alpha}) - \bar{f}(0)| = |\bar{\bar{f}}(\varkappa\bar{\alpha}) - \bar{\bar{f}}(0)| .$$

Daher gilt

$$|\bar{\bar{f}}(\bar{\bar{\alpha}}) - \bar{\bar{f}}(0)| < \varepsilon$$

für dieselbe Schranke $|\bar{\bar{\alpha}}| < \delta$, weil $|\bar{\bar{\alpha}}| = |\bar{\alpha}|$ ist.

Eine für eine bestimmte Darstellung gültige Schranke ist somit auch für jede andere Darstellung gültig; insbesondere haben wir für alle Darstellungen dieselbe obere Grenze, die höchstens zwei sein kann. Somit gilt:

**Hilfssatz:** *Der Radius $\delta(\varepsilon) \leqq 2$ der maximalen Umgebung von $\alpha_0 = 0$, für welche immer für alle auf der Geraden liegenden Punkte aus einer festen Umgebung $(A, \sigma)$*

$$|F[y_0 + \alpha(y^* - y_0)] - F[y_0]| < \varepsilon$$

*gilt, ist von der in der Darstellung der Geraden gewählten Funktion $y^*$ unabhängig.*

---

[12]) Da wir ausschließlich analytische Funktionale betrachten, werden wir fortan abkürzend nur von Funktionalen sprechen.

Man nennt ein Funktional $F$ in einem Punkt $y_0$ seines Definitionsgebietes $G$ stetig, wenn sich zu jedem beliebigen, positiven $\varepsilon$ stets eine Umgebung $(A, \sigma^*)$ von $y_0$ in $G$ finden läßt, so daß für alle ihre Punkte $y$ immer

$$|F[y] - F[y_0]| < \varepsilon$$

wird.

Nun sind wir in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen:

**Stetigkeitskriterium:** *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit eines analytischen Funktionals $F$ in einem Punkte $y_0$ seines Definitionsgebietes $G$ ist die Existenz einer in $G$ liegenden Umgebung $(A, \sigma)$ von $y_0$, so daß die untere Grenze $\delta^*(\varepsilon)$ der Gesamtheit der $\delta(\varepsilon)$-Werte, welche den verschiedenen, durch $y_0$ gehenden Geraden zugeordnet sind, größer Null ist.*

Wir zeigen zuerst, daß die Bedingung hinreichend ist. Da $G$ ein Funktionalgebiet ist, liegt in ihm eine Umgebung $(A, \sigma)$ von $y_0$. Es sei

$$y = y_0 + \alpha(y^* - y_0)$$

eine beliebige Gerade durch den Punkt $y_0$, auf der wir für $0 \leqslant |\alpha| < 2$ Punkte der Umgebung $(A, \sigma)$ von $y_0$ erhalten, und $\delta \leqslant 2$ ihr zugeordneter Wert. Nun suchen wir die kleinste Umgebung von $y_0$, in der alle Punkte $y$ der Geraden liegen, welche wir für $|\alpha| < \delta$ erhalten. Es ist

$$|y - y_0| = |\alpha|\,|y^* - y_0| \leqslant |\alpha| \frac{\sigma}{2} < \frac{\delta\,\sigma}{2}\ ,$$

und daher stehen alle diese Funktionen in der Umgebung $\left(A, \frac{\delta\,\sigma}{2}\right)$ von $y_0$. Nehmen wir jetzt an, daß $\delta^* > 0$ ist, so folgt sofort, daß für alle Funktionen der Umgebung $(A, \sigma^*) = \left(A, \frac{\delta^*\sigma}{2}\right)$ die Ungleichung

$$|F[y] - F[y_0]| < \varepsilon \tag{11}$$

gilt.

Demnach ist $F$ in $y_0$ stetig, und die Bedingung also hinreichend. Nehmen wir jetzt umgekehrt an, daß $F$ im Punkte $y_0$ stetig sei. Dann existiert zu jedem positiven $\varepsilon$ eine Umgebung $(A, \sigma^*)$ von $y_0$, so daß für alle ihre Funktionen (11) erfüllt ist.

Es sei nun

$$y = y_0 + \alpha\,(y^* - y_0)$$

eine beliebige Gerade, welche durch $y_0$ geht. Da wir auf ihr für $|\alpha| < 2$ lauter Funktionen der Umgebung $(A, \sigma^*)$ erhalten, und $F$ nur auf diese anwenden, so wird $\delta = 2$ für alle Geraden durch $y_0$. Somit wird auch $\delta^* = 2$. Die Bedingung ist daher notwendig.

Wir werden sofort zeigen, wie sich dieses $\delta^*$ für lineare Funktionale mühelos berechnen läßt. Wir geben später ein Beispiel eines nicht linearen Funktionals, bei dem die Berechnung von $\delta^*$ ebenfalls sehr leicht ist.

Wir betrachten nun eine beliebige Gerade

$$y = y_0 + \alpha\,(y^* - y_0)$$

durch einen Punkt $y_0$ des linearen Definitionsgebietes $G$ eines linearen Funktionals $F$, wo $y^*$ auf dem Rande einer beliebigen Umgebung $(\bar{A}, \sigma)$ von $y_0$ liegt, und $\bar{A}$ die $G$ zugeordnete Punktmenge $A$ als innere Punkte enthält, und üben $F$ auf die in der Umgebung $(\bar{A}, \sigma)$ liegenden Punkte $y$ dieser Geraden aus. Dann ist:

$$|F[y] - F[y_0]| = |\alpha|\,|F[y^* - y_0]| = |\alpha|\,|F[y^*] - F[y_0]|\,.$$

Damit jetzt

$$|F[y] - F[y_0]| < \varepsilon$$

wird, würde es genügen,

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{|F[y^*] - F[y_0]|} = \theta$$

zu wählen. Da wir aber nur die Punkte der Umgebung $(\bar{A}, \sigma)$ von $y_0$ betrachten, erhalten wir für $\delta$:

$$\begin{array}{lcl} \delta = \theta & & \theta < 2\,, \\ & \text{wenn} & \\ \delta = 2 & & \theta \geqslant 2 \end{array}$$

und

ist. Nehmen wir jetzt an, daß $|F[y^*]|$ beschränkt ist, so wird auch $|F[y^*] - F[y_0]|$ beschränkt sein. Nun verlangen wir, daß $F$ auf dem ganzen Rand der Umgebung $\left(\bar{A}, \frac{\sigma}{2}\right)$ von $y_0$ beschränkt ist. Dann existiert die obere Grenze $M^*$, so daß immer

$|F[y^*] - F[y_0]| \leqslant M^*$ $(M^* \neq \infty)$ ist. Somit erhalten wir für $\delta^*$:

$$\begin{array}{lcl} \delta^* = \dfrac{\varepsilon}{M^*} & & M^* \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ & \text{wenn} & \\ \delta^* = 2 & & M^* < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

ist. Damit haben wir:

**Korollar:** *Ein lineares, analytisches Funktional $F$ ist in einem Punkte $y_0$ seines Definitionsgebietes $G$ stetig, wenn es auf dem Rande einer beliebigen, in $G$ enthaltenen Umgebung $(\bar{A}, \sigma)$ von $y_0$ beschränkt ist.*

Es wird nachher ersichtlich werden, daß diese hinreichende Bedingung auch notwendig ist. Damit haben wir einen zur Theorie der linearen Funktionale einer reellen Variablen analogen Satz erhalten, der aber im Gegensatz zu diesen für analytische, lineare Funktionale immer gilt, wie wir nun zeigen werden.

## 5. Die Stetigkeit der linearen analytischen Funktionale.

Wir wollen jetzt beweisen, daß alle linearen Funktionale in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches stetig sind.

Wir zeigen in einem ersten Schritt, daß jedes lineare Funktional $F$ im Punkte $y_0 \equiv y = 0$, der aus Definitionsgründen immer dem linearen Definitionsgebiet $G$ von $F$ angehören muß, stetig ist. Es gilt, wie bei den reellen Funktionalen:

$$F[0] = 0 \ .$$

Es sei nun $\bar{A}$ eine abgeschlossene Punktmenge der $t$-Kugel, welche alle Punkte der dem Definitionsgebiet $G$ zugeordneten, charakteristischen Punktmenge $A$ als *innere Punkte* enthält. In jeder mit Hilfe einer solchen Punktmenge $\bar{A}$ definierten Umgebung $(\bar{A}, \sigma)$ von 0 existiert ein $\delta^* > 0$, und deshalb wird $F$ in 0 immer stetig sein. Wir führen den Beweis indirekt, und nehmen an, daß eine beliebige, aber festgewählte Umgebung $(\bar{A}, \sigma)$ von 0 existiert, wo $\delta^* = 0$ ist. Unter der Gesamtheit der durch 0 gehenden Geraden existiert dann eine Folge, deren zugeordnete $\delta$-Werte eine nach 0 strebende Zahlenfolge bilden. Wir betrachten diese Geradenfolge erst von da an, wo die Glieder der zugehörigen Folge der $\delta$-Werte immer kleiner zwei bleiben; diese letztere bezeichnen wir mit $\{\delta_n\}$. Es ist also:

$$0 < \delta < 2 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0 \ .$$

Es sei

$$y = \alpha \, y^*$$

die Gleichung der allgemeinen Geraden, welcher $\delta_n$ zugeordnet ist. Auf ihr bestimmen wir die Funktion $y_n$, so daß

$$F[y_n] = \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

wird. Dazu genügt es

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{F[y^*]} , \qquad \text{wo} \qquad \frac{\varepsilon}{|F[y^*]|} = \delta_n$$

ist, zu wählen. So erhalten wir eine Folge von Funktionen $y_n$ (auf jeder Geraden eine),

$$y_n = \frac{\varepsilon}{F[y^*]} y^* ,$$

welche in $(\bar{A}, \sigma)$ definiert sind, und in denen $F$ immer denselben Wert $\varepsilon$ hat. Nun wollen wir zeigen, daß in der Funktionenfolge $\{y_n\}$ eine Unterfolge $\{\bar{y}_n\}$ existieren muß, so daß die Reihe $\Sigma \bar{y}_n$ in $\bar{A}$ absolut gleichmäßig konvergiert. Es ist

$$|y_n| = \frac{\varepsilon}{|F[y^*]|} |y^*| \leqslant \frac{\delta_n \sigma}{2} < \frac{(\delta_n + \eta_1)\sigma}{2} , \qquad \eta_1 > 0 .$$

Da $\delta_n \to 0$, gibt es einen Index $\nu_1$, so daß

$$\frac{(\delta_{\nu_1} + \eta_1)\sigma}{2} \leqslant h < 1$$

wird. (Dazu genügt es $\delta_{\nu_1}$ und $\eta_1$ kleiner oder gleich $\frac{h}{\sigma}$ zu wählen.) Nennen wir $y_{\nu_1} = \bar{y}_1$, so wird

$$|y_{\nu_1}| = |\bar{y}_1| < h < 1 .$$

Genau so gibt es einen Index $\nu_2$ und ein $\eta_2 > 0$, so daß

$$\frac{(\delta_{\nu_2} + \eta_2)\sigma}{2} \leqslant h^2$$

wird, und daher eine Funktion $y_{\nu_2}$, die wir entsprechend $\bar{y}_2$ nennen, welche

$$|\bar{y}_2| < h^2$$

erfüllt. Diese Konstruktion weitergeführt zeigt, daß in der Funktionenfolge $\{y_n\}$ eine Unterfolge $\{\bar{y}_n\}$ enthalten ist, so daß die Reihe $\Sigma \bar{y}_n$ in $\bar{A}$ absolut gleichmäßig gegen eine Funktion $\bar{y}$ konvergiert:

$$\bar{y} = \Sigma \bar{y}_n .$$

Diese Grenzfunktion $\bar{y}$ ist in allen innern Punkten von $\bar{A}$ ultra-regulär, und daher sicher in ganz $A$.

Damit sind die Voraussetzungen erfüllt, daß

$$F[\overline{y}] = F[\Sigma \overline{y}_n] = \Sigma F[\overline{y}_n] \text{ [13]}$$

gilt. Es müßte also $\Sigma F[\overline{y}_n]$ konvergieren. Anderseits aber muß

$$\Sigma F[\overline{y}_n] = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon + \cdots$$

divergieren. Damit ist gezeigt, daß es keine Umgebung $(\overline{A}, \sigma)$ von 0 geben kann, in welcher $\delta^* = 0$ wird.

*Alle linearen Funktionale sind daher im Punkte* 0 *stetig.*

Nun ist es einfach, aus diesem Satz die Stetigkeit der linearen Funktionale in einem beliebigen Punkte ihres Definitionsgebietes herzuleiten.

Es sei $y_1 \neq y = 0$ ein solcher Punkt und $\overline{A}_1$ eine abgeschlossene Punktmenge, die ganz im Definitionsbereich $M_1$ von $y_1$ liegt und alle Punkte von $A$ als innere Punkte enthält. Wir betrachten nun die Umgebung $(\overline{A}_1, \sigma)$ von $y = 0$, die existiert, weil $y = 0$ überall definiert ist. Zu dieser Umgebung existiert für ein beliebiges, aber festgewähltes $\varepsilon$ ein $\delta^* > 0$. Daher gilt (siehe 11) für alle Funktionen $y$ aus der Umgebung $(\overline{A}_1, \sigma^*)$ von 0 mit $\sigma^* = \dfrac{\delta^* \sigma}{2}$

$$|F[y]| < \varepsilon .$$

Nun betrachten wir dieselbe Umgebung $(\overline{A}_1, \sigma^*)$ von $y_1$ und wählen aus ihr eine beliebige Funktion $y_2$. Dann liegt die Differenz $y_2 - y_1$ in der Umgebung $(\overline{A}_1, \sigma^*)$ *von* 0; daher gilt für sie:

$$|F[y_2 - y_1]| < \varepsilon ,$$

und somit

$$|F[y_2] - F[y_1]| < \varepsilon .$$

Daher ist $F$ in $y_1$ stetig. Da aber $y_1$ ein beliebiger Punkt von $G$ ist, gilt:

**Satz:** *Jedes lineare, analytische Funktional ist in allen Punkten seines Definitionsgebietes $G$ stetig.*

Es ist zu bemerken, daß der geführte Beweis sich wörtlich übertragen

---

[13]) *L. Fantappiè*, I funzionali analitici. Mem. Acc. Lincei, s. VI, Vol. III, fasc. 11, 1930, pg. 39.

läßt, wenn wir lineare Funktionale von Funktionen mehrerer Variablen betrachten.

*Somit ist auch die Stetigkeit der linearen, analytischen Funktionale von Funktionen von mehreren Variablen bewiesen.*

Eine spezielle Bedeutung dieses Satzes haben wir in der Einleitung dargelegt.

Außerdem folgt aus dem Vergleich des eben bewiesenen Satzes mit dem Korollar in **4**, daß die *linearen, analytischen Funktionale* auf dem *Rande* einer *beliebigen Umgebung* $(\bar{A}, \sigma)$ einer beliebigen Funktion aus $(A)$ *immer beschränkt* sind.

Wir bemerken nun, daß eine Umgebung $(A', \sigma)$ einer Funktion $y_0$ aus dem Definitionsbereich $G$ eines Funktionals $F$ von $A'$ und $\sigma$ abhängt. Wenn nun bei einem stetigen Funktional die Umgebung $(A', \sigma)$ eines beliebigen Punktes $y_0$ von $G$, für deren Punkte $y$ bei einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$

$$|F[y] - F[y_0]| < \varepsilon$$

wird, beim Variieren von $y_0$ in $G$ immer *dasselbe* $A'$ oder *dasselbe* $\sigma$ hat, so nennen wir das Funktional in $G$ bezüglich $A'$ oder $\sigma$ *halb-gleichmäßig stetig*.

Insbesondere folgt natürlich, daß bei den linearen Funktionalen, wenn sie in $G$ in bezug auf $A'$ halb-gleichmäßig stetig sind, $A'$ mit der charakteristischen Punktmenge $A$ von $G$ übereinstimmen muß.

Ist nun ein Funktional in $G$ sowohl in bezug auf $A'$ wie auch in bezug auf $\sigma$ halb-gleichmäßig stetig, so nennen wir es in $G$ *gleichmäßig stetig*.

Diese Definition wird dadurch gerechtfertigt, daß wir die Funktionen der Umgebung $(A', \sigma)$ eines beliebigen Punktes $y$ erhalten, wenn wir immer dieselben Funktionen $\varphi$, die in $A'$ ultra-regulär und $|\varphi| < \sigma$ sind, zu $y$ hinzufügen. Da wir in analoger Weise gleich große Umgebungen verschiedener Punkte eines Intervalles charakterisieren, dürfen wir auch jetzt von gleich großen Umgebungen sprechen, trotzdem in $R$ keine Metrik definiert ist. Lineare Funktionale können natürlich wiederum nur in bezug auf $A$ gleichmäßig stetig sein, während für $\sigma$ keine Einschränkung besteht.

Es existieren gleichmäßig stetige und nicht gleichmäßig stetige lineare Funktionale; wir werden von beiden Typen ein Beispiel geben. Dazu gibt es keine Analogie bei den linearen Funktionen, welche auch über offenen Punktmengen immer gleichmäßig stetig sind.

Ferner gibt es stetige und sogar halb-gleichmäßig stetige nicht-lineare Funktionale, was wir mit je einem Beispiel belegen werden.

## 6. Beispiele.

I. Wir beginnen mit einem Beispiel eines gleichmäßig stetigen, linearen Funktionals.

Es sei $\bar{t}$ ein Punkt im Endlichen der $t$-Kugel, und $F$ ein Funktional, das im Funktionalgebiet $(A)$ aller Funktionen $y(t)$, welche in $\bar{t}$ regulär sind $(\bar{t} \equiv A)$, folgendermaßen definiert ist:

$$F[y(t)] = y(\bar{t}) \; .$$

$F$ ist offensichtlich analytisch und linear. Wir betrachten die Gerade

$$y = y_0 + \alpha(y^* - y_0)$$

durch einen beliebigen, festgewählten Punkt $y_0$, wo $y^*$ auf dem Rand der Umgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ von $y_0$ liegt. Dann wird

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\varepsilon}{|\, y^*(\bar{t}) - y_0(\bar{t}) \,|} = \frac{2\,\varepsilon}{\sigma} & &\qquad \varepsilon < \sigma \;, \\ & & \text{wenn} & \\ \delta &= 2 & &\qquad \varepsilon \geqslant \sigma \;. \end{aligned}$$

Da $\delta$ von der Geraden unabhängig ist, wird

$$\delta^* = \frac{2\,\varepsilon}{\sigma} > 0 \qquad \text{oder} \qquad \delta^* = 2 \; .$$

In beiden Fällen ist daher die Umgebung $(A, \sigma^*) = \left(A, \frac{\delta^* \sigma}{2}\right)$ von $y_0$ vom gewählten $y_0$ unabhängig. $F$ ist daher in $(A)$ gleichmäßig stetig.

II. Jetzt wollen wir ein Beispiel für ein lineares, nicht gleichmäßig stetiges Funktional geben. Zu diesem Zweck definieren wir in demselben $(A)$ wie in I. das Funktional $F$ folgendermaßen:

$$F[y(t)] = \left(\frac{d}{dt}\, y(t)\right)_{t = \bar{t}} \; .$$

$F$ ist wieder analytisch und linear. Um zu zeigen, daß $F$ nicht gleichmäßig stetig ist, genügt es zu beweisen, daß es in $(A)$ auch nur eine Funktion $y_0$ gibt, die keine Umgebung $(A, \sigma)$ besitzt, in der $\delta^* > 0$ ist. Wir wählen $y_0 \equiv y = 0$ und betrachten die Geradenschar

$$y_m = \alpha \frac{t^m}{\bar{t}^m} \qquad (m \text{ reell}) \;,$$

welche $y = 0$ mit jedem Punkte $\overline{y}_m = \frac{t^m}{\overline{t}^m}$ verbindet. Weil in $A$ für jedes $m$

$$| y_m | = | \alpha |$$

ist, erhalten wir auf jeder Geraden für $\alpha = \frac{\sigma}{2}$ einen Punkt $\overline{y}_m^*$ auf dem Rande einer beliebigen, aber festgewählten Umgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ von 0:

$$\overline{y}_m^* = \frac{\sigma}{2} \frac{t^m}{\overline{t}^m} .$$

Da

$$F[\overline{y}_m^*] = \frac{\sigma m}{2\overline{t}}$$

ist, erhalten wir für $\delta_m$:

$$\delta_m = \frac{\varepsilon}{| F[\overline{y}_m^*] |} = \frac{2 \varepsilon | \overline{t} |}{\sigma m}$$

Da nun $m$ beliebig groß sein kann, wird $\delta^* = 0$ für jedes festgewählte $\sigma$ und $\varepsilon$. Damit ist gezeigt, daß es keine Umgebung $(A, \sigma)$ von 0 gibt, in der $\delta^* > 0$ wird. Darüber hinaus wissen wir aber jetzt noch, daß $F$ auf jedem Rand einer beliebigen Umgebung $(A, \sigma)$ von 0 unbeschränkt ist. Trotzdem ist $F$ als lineares Funktional im Punkte 0 natürlich stetig. Es wird daher in jeder Umgebung $(\overline{A}, \sigma)$ von 0, wo $\overline{A}$ die Punkte von $A$ als innere Punkte enthält, immer $\delta^* > 0$ sein.

Dies wollen wir an diesem konkreten Fall für dieselben Funktionen $y_m$ verifizieren, um damit den Unterschied zwischen stetigen und gleichmäßig stetigen Funktionalen recht deutlich zu machen. Es enthalte also $\overline{A}$ den Punkt $\overline{t} \equiv A$ als innern Punkt und nicht den Punkt $\infty$. Dann gibt es auf der $t$-Kugel immer einen Kreis mit $\overline{t}$ als Mittelpunkt und einem passend gewählten $\varrho > 0$ als Radius, der ganz im Innern von $\overline{A}$ liegt. Wir betrachten wiederum die Geradenschar

$$y_m = \alpha \frac{t^m}{\overline{t}^m} ,$$

welche den Punkt $y = 0$ mit den in $\overline{A}$ definierten Punkten $\overline{y}_m = \frac{t^m}{\overline{t}^m}$ verbindet, und suchen auf jeder Geraden den Punkt $\overline{y}_m^*$ in bezug auf eine festgewählte Umgebung $(\overline{A}, \sigma)$ von 0. Es sei

$$\overline{y}_m^* = \alpha_m^* \frac{t^m}{\overline{t}^m} .$$

Dann muß
$$\operatorname{Max} | \bar{y}_m^* | = \frac{\sigma}{2}$$
sein für $t$ variabel in $\bar{A}$. Umgekehrt ist aber
$$\operatorname{Max} | \bar{y}_m^* | > \alpha_m^* \left(1 + \frac{\varrho}{|\bar{t}|}\right)^m.$$
Daher wird
$$\alpha_m^* < \frac{\sigma}{2\left(1 + \frac{\varrho}{|\bar{t}|}\right)^m}$$
und damit
$$| F[\bar{y}_m^*] | < \frac{\sigma \cdot m}{2\left(1 + \frac{\varrho}{|\bar{t}|}\right)^m \cdot |\bar{t}|} .$$
Da
$$\lim_{m \to \infty} \frac{m}{\left(1 + \frac{\varrho}{|\bar{t}|}\right)^m} = 0$$
ist für jedes $\varrho > 0$, bleibt $F$ auf dem Rande einer jeden Umgebung $\left(\bar{A}, \frac{\sigma}{2}\right)$ von $y = 0$ auch in den Punkten $\bar{y}_m^*$ beschränkt. Für die untere Grenze $\delta_m^*$ der $\delta_m$-Werte erhalten wir:
$$\delta_m^* > \operatorname{Min} \frac{2\,\varepsilon\, |\bar{t}| \left(1 + \frac{\varrho}{|\bar{t}|}\right)^m}{\sigma \cdot m} = \theta > 0 \qquad \text{je nach dem} \qquad \theta < 2$$
$$\delta_m^* = 2 \qquad\qquad \theta \geqq 2 .$$
Wir sehen nun sehr schön, wie $\delta_m^*$ von $\bar{A}$ abhängt, und wie beim Übergang von $\bar{A} \to A$, dem $\varrho \to 0$ entspricht, $F[\bar{y}_m^*]$ auf dem Rande jeder Umgebung $(A, \sigma)$ von $y = 0$ unbeschränkt und $\delta_m^* = \theta = 0$ werden.

III. Abschließend wollen wir noch ein Beispiel eines nicht linearen stetigen Funktionals geben.

Es sei $F$ wieder im selben Funktionalgebiet $(A)$ mit $A \equiv \bar{t}$ in der folgenden Weise definiert:
$$F[y(t)] = y^2(\bar{t}) .$$
$F$ ist sicher analytisch und *nicht* linear. Wir betrachten die allgemeine Gerade
$$y = y_0 + \alpha(y^* - y_0)$$

durch einen beliebigen Punkt $y_0$ von $(A)$, wo $y^*$ auf eine beliebige, aber festgewählte Umgebung $(A, \sigma)$ von $y_0$ bezogen ist. Dann gibt es zu jedem positiven $\varepsilon$ ein $\delta(\varepsilon)$, so daß

$$|F[y] - F[y_0]| = |\{y_0(\bar{t}) + \alpha(y^*(\bar{t}) - y_0(\bar{t}))\}^2 - y_0^2(\bar{t})| < \varepsilon$$

für $|\alpha| < \delta$ wird. Nun ist

$$\begin{aligned}&|\{y_0(\bar{t}) + \alpha(y^*(\bar{t}) - y_0(\bar{t}))\}^2 - y_0^2(\bar{t})|\\ &\leqslant |\alpha|^2 |y^*(\bar{t}) - y_0(\bar{t})|^2 + 2|\alpha||y_0(\bar{t})||y^*(\bar{t}) - y_0(\bar{t})| .\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wird aber für

$$|\alpha| < \bar{\alpha} = \frac{-|y_0| + \sqrt{|y_0|^2 + \varepsilon}}{|y^* - y_0|}$$

kleiner als $\varepsilon$, und daher um so mehr die linke Seite. Deshalb wird für unsere Gerade

$$\begin{array}{lcr} \delta \geqslant \bar{\alpha} = \dfrac{-|y_0| + \sqrt{|y_0|^2 + \varepsilon}}{\frac{\sigma}{2}} & & \bar{\alpha} < 2 \\ & \text{je nachdem} & \\ \delta = 2 & & \bar{\alpha} \geqslant 2 . \end{array}$$

Da $\delta$ nicht von der Geraden abhängt, haben wir im Punkte $y_0$:

$$\delta^* \geqslant \bar{\alpha} > 0 \qquad \text{oder} \qquad \delta^* = 2 ,$$

da die beliebige Funktion $y_0(t)$ in $A \equiv \bar{t}$ regulär, also endlich sein muß.

$F$ ist daher in allen Punkten von $(A)$ nicht nur stetig, sondern sogar *halb-gleichmäßig stetig* in bezug auf $A' \equiv A$. $F$ ist aber nicht gleichmäßig stetig, denn es gibt für die $\delta^*$ keine von $y_0$ unabhängige untere Grenze größer als Null.

IV. Ein Beispiel eines nicht linearen, stetigen, aber weder gleichmäßig, noch halb-gleichmäßig stetigen Funktionals erhalten wir, wenn wir $F$ im gleichen Funktionalgebiet $(A)$ $(A \equiv \bar{t})$ folgendermaßen definieren:

$$F[y(t)] = \left\{\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)_{t=\bar{t}}\right\}^2 .$$

Wir verzichten darauf, dieses Beispiel zu entwickeln, da die einzelnen Berechnungen zu denen von Beispiel II parallel laufen.

Es bleibt noch die Frage, ob es überhaupt nicht lineare Funktionale gibt, welche nicht stetig sind. In einer bedeutsamen Arbeit von *M. Carafa*[14]) wird gezeigt, daß sich jedes nicht lineare Funktional als lineares Funktional einer Funktion eines linearen Funktionals ausdrücken läßt. Es ist daher möglich, daß mit Hilfe dieses Sachverhaltes aus der jetzt bewiesenen Stetigkeit der linearen Funktionale auf die Stetigkeit aller Funktionale geschlossen werden kann.

(Eingegangen den 9. August 1947.)

---

[14]) Die Arbeit wird demnächst erscheinen.