Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 21 (1948)

Artikel: Sur les dérivées approximatives d'ordre supérieur.

Autor: Császár, Akos

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18609

Sur les dérivées approximatives d'ordre supérieur

Par ÁKOS CSÁSZÁR, Budapest

Nous rappelons la définition du nombre dérivé approximatif d'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle :

$f(x)$ a la dérivée approximative y au point a s'il y a un ensemble mesurable E qui a la densité 1 au point a et pour lequel

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in E}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = y \; .$$

De là résulte la propriété fondamentale de la dérivée approximative :

A. Si $f(x) = g(x)$ presque partout sur l'ensemble mesurable E et $f'_{ap}(a)$ existe au point de densité a de E, alors $g'_{ap}(a)$ existe et est égal à $f'_{ap}(a)$.

On connaît le théorème de Denjoy-Khintchine selon lequel toute fonction à variation bornée généralisée (1) mesurable sur un ensemble mesurable est approximativement dérivable presque partout dans cet ensemble [1] (renvoi à la bibliographie).

Nous établirons une extension de ce théorème aux dérivées approximatives d'ordre supérieur.

$f(x)$ étant une fonction réelle définie sur un ensemble E et $x_0, \dots, x_n$ des points différents de E, désignons par $g(x)$ le polynôme de degrée n au plus prenant en ces points les mêmes valeurs que $f(x)$. Soit A le coefficient de x^n dans $g(x)$; nous désignerons le nombre $n!\,A$ par

$$Q_n(x_0, \dots, x_n\,; f) = Q_n(x_0, \dots, x_n) \; .$$

---

(1) La fonction $f(x)$ est à variation bornée généralisée sur l'ensemble E, si $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ et pour chaque ensemble E_k les sommes

$$\sum_{\nu-1}^{N} | f(b_\nu) - f(a_\nu) |$$

où (a_ν, b_ν) sont des intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres dont les extrémités appartiennent à E_k, restent sous une borne (qui peut dépendre de k).

La formule récursive suivante est bien connue :

$$Q_0(x_0\,;f) = f(x_0) \;;$$

$$Q_{n+1}(x_0,\ldots,x_{n+1}) = (n+1)\frac{Q_n(x_0,\ldots,x_n) - Q_n(x_1,\ldots,x_{n+1})}{x_0 - x_{n+1}} \;.$$

Nous emploierons le symbole suivant :

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_0,\ldots x_n\,;f) &= \frac{1}{n}\,|\,Q_n(x_0,\ldots x_n\,;f)\,|\;\delta(x_0,\ldots x_n) = \\ &= |\,Q_{n-1}(x_0,\ldots x_{n-1}) - Q_{n-1}(x_1,\ldots x_n)\,|\;\frac{\delta(x_0,\ldots x_n)}{|\,x_0 - x_n\,|}\;,\end{aligned} \tag{1}$$

où $\delta(x_0,\ldots,x_n)$ désigne le diamètre de l'ensemble $\{x_0,\ldots,x_n\}$.

Nous allons définir trois espèces de dérivées d'ordre n de la manière suivante :

Etant donné un ensemble P dense en soi et $a \in P$, nous appelons dérivée forte d'ordre n de $f(x)$ par rapport à P au point a la limite suivante, si elle existe et est finie :

$$f_P^{[n]}(a) = \lim_{\substack{x_i \to a \\ x_i \in P}} Q_n(x_0,\ldots x_n\,;\,f)\;.$$

La dérivée ordinaire d'ordre n par rapport à P est définie par récurrence :

$$f_P^{(1)}(a) = f'_P(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in P}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\;,$$

et si $\varphi(x) = f_P^{(n)}(x)$ existe en tout point de P appartenant à un entourage de a,

$$f_P^{(n+1)}(a) = \varphi'_P(a)\;.$$

Enfin, la dérivée approximative d'ordre n sera aussi définie par récurrence :

$f_{ap}^{(n+1)}(a)$ est la dérivée approximative de $f_{ap}^{(n)}(x)$ au point a, pourvu que $f_{ap}^{(n)}(x)$ existe en tout point d'un ensemble mesurable E dont a est un point de densité. La propriété A. nous assure que l'existence et la valeur de $f_{ap}^{(n+1)}(x)$ ne dépendent pas du choix de l'ensemble E.

Convenons enfin de définir :

La fonction $f(x)$ appartient à la classe (R_n) sur l'ensemble E s'il existe un nombre M de sorte que pour tout système fini d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre $I_1, \ldots, I_N$ et pour $x_i^\nu \in E I_\nu$, on ait toujours

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Delta_n(x_0^\nu, \ldots x_n^\nu ; f) < M \ .$$

De plus, $f(x)$ sera dite d'appartenir à la classe $(R_n G)$ sur E, si $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ et $f(x)$ est (R_n) sur chaque ensemble E_k.

On voit que les fonctions (R_1) respectivement $(R_1 G)$ sont identiques aux fonctions (VB) respectivement (VBG) de M. *Khintchine* [1].

Cela étant, voici l'extension promise du théorème de *Denjoy-Khintchine.*

Théorème. Si la fonction $f(x)$ est mesurable et $(R_n G)$ sur l'ensemble mesurable E, alors $f_{ap}^{(n)}(x)$ existe presque partout sur E.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de quelques lemmes.

Lemme 1. $f(x)$ étant (R_n) sur l'ensemble E, les nombres

$$| Q_{n-1}(x_0, \ldots x_{n-1} ; f) | \qquad (x_i \in E)$$

restent sous une borne commune.

Démonstration. On a, d'après l'hypothèse, pour M suffisamment grand

$$\Delta_n(x_0, \ldots, x_n ; f) < M \ .$$

Or, $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ étant n points différents fixes de E, on a selon (1)

$$\begin{aligned}
&| Q_{n-1}(x_0, \ldots x_{n-1}) - Q_{n-1}(\xi_0, \ldots \xi_{n-1}) | \leqq \\
&\leqq | Q_{n-1}(x_0, \ldots x_{n-1}) - Q_{n-1}(x_1, \ldots x_{n-1}, \xi_0) | + \\
&+ | Q_{n-1}(x_1, \ldots x_{n-1} \, \xi_0) - Q_{n-1}(x_2, \ldots x_{n-1}, \xi_0, \xi_1) | + \cdots + \\
&+ | Q_{n-1}(x_{n-1}, \xi_0, \ldots \xi_{n-2}) - Q_{n-1}(\xi_0, \ldots \xi_{n-1}) | \leqq \\
&\leqq \Delta_n(x_0, \ldots x_{n-1}, \xi_0) + \Delta_n(x_1, \ldots, x_{n-2}, \xi_0, \xi_1) + \cdots + \\
&+ \Delta_n(x_{n-1}, \xi_0, \ldots \xi_{n-1}) \leqq n M \ ,
\end{aligned}$$

pourvu que les points $x_0, \ldots, x_{n-1} ; \xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ soient tous différents ; si deux ou plusieurs en sont identiques, l'évaluation se simplifie même. Ainsi pour tout $x_i \in E$

$$| Q_{n-1}(x_0, \ldots x_{n-1}) | \leqq | Q_{n-1}(\xi_0, \ldots \xi_{n-1}) | + n M \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 2. Une fonction $f(x)$ qui est (R_n) sur un ensemble borné E y est aussi (R_{n-1}).

Démonstration. D'après lemme 1 on a pour tout $x_i \in E$

$$| Q_{n-1}(x_0, \dots x_{n-1}) | < B .$$

Or, pour tout système fini $I_1, \dots I_N$ d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre et pour $x_i^\nu \in E I_\nu$ on a

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Delta_{n-1}(x_0^\nu, \dots x_{n-1}^\nu) = \frac{1}{n-1} \sum_{\nu=1}^{N} | Q_{n-1}(x_0^\nu, \dots x_{n-1}^\nu) | \, \delta(x_0^\nu, \dots x_{n-1}^\nu) \leqq$$

$$\leqq \frac{B}{n-1} \sum_{\nu=1}^{N} \delta(x_0^\nu, \dots x_{n-1}^\nu) \leqq \frac{B}{n-1} \delta(E) ,$$

$\delta(E)$ désignant le diamètre de l'ensemble E, ce qui prouve le lemme.

Lemme 3. Si la fonction $f(x)$ est (R_n) sur l'ensemble E borné et dense en soi, alors $f_E^{(n-2)}(x)$ existe en tout point de E et il est (R_2) sur E.

Démonstration. D'abord nous établirons l'existence de $f_E^{[n-2]}(x)$ en tout point de E. Or, $x_0, \dots x_{n-2}$, $y_0, \dots y_{n-2}$ étant des points différents de E, on a l'évaluation suivante :

$$| Q_{n-2}(x_0, \dots x_{n-2}) - Q_{n-2}(y_0, \dots y_{n-2}) | \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} | Q_{n-1}(x_i, \dots x_{n-2}, y_0, \dots y_i) | \, | x_i - y_i | \leqq$$

$$\leqq B \, \delta(x_0, \dots x_{n-2}, y_0, \dots y_{n-2}) ,$$

les nombres $| Q_{n-1}(x_i, \dots x_{n-2}, y_0 \dots y_i) |$ restant selon lemme 1 sous une borne B. Une évaluation analogue étant valable dans le cas ou l'un des points x_i coïncide avec un des points y_i, on voit aussitôt que $f_E^{[n-2]}(x)$ existe en tout point de E.

$f(x)$ étant (R_{n-1}) sur E d'après lemme 2, $\varphi(x) = f_E^{[n-3]}(x)$ existe aussi en tout point de E. Montrons que

$$f_E^{[n-2]}(x) = \varphi'_E(x) .$$

a étant un point quelconque de E, admettons pour fixer les idées que $f_E^{[n-2]}(a) = 0$; le cas général s'y ramène par l'addition d'un polynôme de degrée $n - 2$. Or, pour tout ε positif on peut trouver un $\delta > 0$ tel que pour $x_i \in E$ et $|x_i - a| < \delta$ on ait

$$|Q_{n-2}(x_0, \ldots x_{n-2})| < \varepsilon \;.$$

x étant un point de E tel que $|x - a| < \delta$, considérons des points α_i et ξ_i différents et appartenant à E. On a évidemment

$$\left|\frac{f_E^{[n-3]}(x) - f_E^{[n-3]}(a)}{x - a}\right| = \lim_{\substack{\xi_i \to x \\ \alpha_i \to a}} \frac{|Q_{n-3}(\xi_0, \ldots \xi_{n-3}) - Q_{n-3}(\alpha_0, \ldots \alpha_{n-3})|}{|x - a|} \leqq$$

$$\leqq \limsup_{\substack{\xi_i \to x \\ \alpha_i \to a}} \frac{1}{n-2} \sum_{i=0}^{n-3} |Q_{n-2}(\xi_i, \ldots \xi_{n-3}, \alpha_0, \ldots \alpha_i)| \left|\frac{\xi_i - \alpha_i}{x - a}\right| \leqq \varepsilon$$

ce qui étant valable pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\varphi_E'(a) = 0$.

En vertu de ce que nous venons d'établir, on voit aisément en procédant par induction que $f_E^{(n-2)}(x)$ existe sur E et est $= f_E^{[n-2]}(x)$. Nous avons à montrer que ce dernier-ci est (R_2) sur E.

Considérons donc des points $x_\nu \in E$, $y_\nu \in E$, $z_\nu \in E$ $(\nu = 1, \ldots N)$ tels que

$$x_1 < y_1 < z_1 \leqq x_2 < y_2 < z_2 \leqq \cdots \leqq x_N < y_N < z_N \;.$$

On peut trouver des points $\xi_i^\nu \in E$, $\eta_i^\nu \in E$, $\zeta_i^\nu \in E$ au voisinage de x_ν, y_ν, z_ν respectivement tels que

$$\xi_0^1 < \xi_1^1 < \cdots < \xi_{n-2}^1 < \eta_0^1 < \cdots < \eta_{n-2}^1 < \zeta_0^1 < \cdots < \zeta_{n-2}^1 < \xi_0^2 < \cdots < \zeta_{n-2}^N \;.$$

On a évidemment

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Delta_2(x_\nu, y_\nu, z_\nu ; f_E^{[n-2]}) =$$

$$= \lim_{\substack{\xi_i^\nu \to x_\nu \\ \eta_i^\nu \to y_\nu \\ \zeta_i^\nu \to z_\nu}} \sum_{\nu=1}^{N} \left| \frac{Q_{n-2}(\xi_0^\nu, \ldots \xi_{n-2}^\nu) - Q_{n-2}(\eta_0^\nu, \ldots \eta_{n-2}^\nu)}{x_\nu - y_\nu} - \frac{Q_{n-2}(\eta_0^\nu, \ldots \eta_{n-2}^\nu) - Q_{n-2}(\zeta_0^\nu, \ldots \zeta_{n-2}^\nu)}{y_\nu - z_\nu} \right| =$$

$$= \frac{1}{n-1} \lim \sum_{\nu=1}^{N} \left| \sum_{i=0}^{n-2} \left[Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots \xi_{n-2}^\nu, \eta_0^\nu, \ldots \eta_i^\nu) \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x_\nu - y_\nu} - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots \eta_{n-2}^\nu, \zeta_0^\nu, \ldots \zeta_i^\nu) \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y_\nu - z_\nu} \right] \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n-1} \limsup \sum_{\nu=1}^{N} \left[\sum_{i=0}^{n-2} | Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots \eta_i^\nu) - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots \zeta_i^\nu) | \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x_\nu - y_\nu} \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-2} | Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots \zeta_i^\nu) | \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x_\nu - y_\nu} - \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y_\nu - z_\nu} \right| \right] .$$

Le dernier membre tend vers zéro puisque $Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)$ est borné, ainsi on a en poursuivant l'évaluation :

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Delta_2(x_\nu, y_\nu, z_\nu ; f_E^{[n-2]}) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n-1} \limsup \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-2} | Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots \eta_i^\nu) - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots \zeta_i^\nu) | \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n-1} \limsup \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-2} \Big[| Q_n(\xi_i^\nu, \ldots \eta_i^\nu, \eta_{i+1}^\nu) | \; | \xi_i^\nu - \eta_{i+1}^\nu | +$$

$$+ | Q_n(\xi_{i+1}^\nu, \ldots \eta_{i+2}^\nu) | \; | \xi_{i+1}^\nu - \eta_{i+2}^\nu | + \cdots + | Q_n(\eta_{i-1}^\nu, \ldots \zeta_i^\nu) | \; | \eta_{i-1}^\nu, \ldots \zeta_i^\nu | \Big] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n-1} \limsup \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{\nu=1}^{N} \Big[\Delta_n(\xi_i^\nu, \ldots \eta_{i+1}^\nu) + \Delta_n(\xi_{i+1}^\nu, \ldots \eta_{i+2}^\nu) + \cdots +$$

$$+ \Delta_n(\eta_{i-1}^\nu, \ldots \zeta_i^\nu) \Big] \leqq$$

$$\leqq 2(n-1) M ,$$

M désignant un tel nombre que pour tout système fini $I_1, \ldots, I_N$ d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre et pour $y_i^\nu \in EI_\nu$ on ait

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Delta_n(y_0^\nu, \ldots, y_n^\nu) < M .$$

Cette évaluation montre que $f_E^{[n-2]}(x)$ est (R_2) sur E, ce qui achève la démonstration.

Lemme 4. $f(x)$ étant (R_2) sur l'ensemble borné E et I un intervalle contenant E, il existe une fonction $g(x)$ qui est (R_2) sur I et qui coïncide avec $f(x)$ sur E.

Démonstration. En vertu du lemme 1, la fonction $f(x)$ est uniformément continue sur E. Ainsi elle peut être prolongée sur la fermeture $\overline{E}$ de E d'une façon qu'elle reste continue. Il est facile de voir que la fonction ainsi obtenue est (R_2) sur $\overline{E}$.

On passe à la fonction $g(x)$ par interpolation linéaire dans les intervalles contigus à $\overline{E}$. Pour montrer qu'elle est (R_2) sur I, considérons un système fini de triples de points $\{x_v, y_v, z_v\}$ $(v = 1, \ldots, N)$, n'empiétant pas, c'est-à-dire tels que

$$x_1 < y_1 < z_1 \leqq x_2 < y_2 < z_2 \leqq \cdots \leqq x_N < y_N < z_N \ .$$

Nous allons évaluer la somme

$$\sum_{v=1}^{N} \Delta_2(x_v, y_v, z_v\,; g) \ . \tag{2}$$

On peut admettre qu'aucun des triples $\{x_v, y_v, z_v\}$ ne se trouve dans un seul intervalle contigu à $\overline{E}$, car pour un tel triple Δ_2 s'annule. Divisons ensuite les triples en deux groupes selon la parité de leurs indices ; il suffit d'évaluer la somme (2) étendue sur l'un des deux groupes.

$x < y < z$ étant l'un des triples appartenant à ce groupe, admettons que x, y, z appartiennent respectivement aux intervalles (x', x''), (y', y''), (z', z'') contigus à $\overline{E}$. C'est le cas le plus compliqué, dans les autres cas l'évaluation s'obtient d'une façon analogue et même plus simple.

On a en vertu d'une propriété bien connue des rapports des accroissements

$$\Delta_2(x, y, z) = |\, Q_1(x, y) - Q_1(y, z)\,| \leqq$$

$$\leqq \max\,[Q_1(x, x''), Q_1(x'', y'), Q_1(y', y), Q_1(y, y''), Q_1(y'', z'), Q_1(z', z)] -$$

$$- \min\,[\quad] \ .$$

L'expression en crochet peut être remplacée par

$$[Q_1(x', x''), Q_1(x'', y'), Q_1(y', y''), Q_1(y'', z'), Q_1(z', z'')]$$

et alors

$$\max\,[\quad] - \min\,[\quad] \leqq$$

$$\leqq \Delta_2(x', x'', y') + \Delta_2(x'', y', y'') + \Delta_2(y', y'', z') + \Delta_2(y'', z', z'') \ . \tag{3}$$

Le premier et le troisième des triples figurant ici n'empiètent pas l'un sur l'autre, ni le deuxième et le quatrième, et en vertu de nos conventions ils n'empiètent pas sur les triples obtenus d'une façon analogue des triples voisins du même groupe. Or, les triples figurant dans (3) appartiennent à $\overline{E}$, sur lequel $g(x)$ est (R_2), de sorte que la somme (2) reste sous une borne finie, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 5. $f(x)$ étant mesurable sur l'ensemble mesurable et borné A et (R_n) sur $E \subset A$, il existe un ensemble mesurable B tel que $E \subset B \subset A$ et sur lequel $f_{ap}^{(n)}(x)$ existe presque partout.

Démonstration. Considérons d'abord le cas $n = 2$. Désignons par $g(x)$ une fonction qui est (R_2) sur un intervalle I contenant A et qui coïncide avec $f(x)$ sur E, et par B le sous-ensemble de A sur lequel $f(x) = g(x)$. B est mesurable, car $f(x)$, $g(x)$ et A le sont, de plus

$$E \subset B \subset A .$$

Désignons par $\overline{g}^+(x)$ le nombre dérivé supérieur à droite de $g(x)$; en vertu d'un théorème de M. *F. Riesz* [2], ce nombre dérivé est à variation bornée sur I et $g(x)$ en est une intégrale indéfinie. Or, $f'_{ap}(x)$ existe et est égal à $\overline{g}^+(x)$ en presque tout point de densité de B, c'est-à-dire presque partout sur B. En vertu du théorème de *Lebesgue* concernant la dérivabilité des fonctions à variation bornée, la dérivée de $\overline{g}^+(x)$ existe presque partout sur I, ce qui entraîne selon A) que $f_{ap}^{(2)}(x)$ existe presque partout sur B. L'énoncé se trouve ainsi établi.

Passons au cas de n arbitraire > 2. D'une façon tout à fait analogue à la première partie de la démonstration du lemme 4, on voit qu'on peut trouver une fonction $g(x)$ qui est (R_n) sur $\overline{E}$ et qui coïncide avec $f(x)$ sur E. Désignons par B le sous-ensemble de $A\overline{E}$ sur lequel $f(x) = g(x)$; B est mesurable, on a $E \subset B \subset A$ et $f(x)$ est (R_n) sur B.

D'après un théorème connu de la théorie des ensembles [3], B est la somme d'un ensemble B^+ dense en soi et d'un ensemble dénombrable. En vertu du lemme 3, $f_{B^+}^{(n-2)}(x)$ existe et est (R_2) sur B^+. Il résulte de la définition de la dérivée approximative d'ordre n que $f_{ap}^{(n-2)}(x) = f_{B^+}^{(n-2)}(x)$ presque partout sur B^+. La partie déjà établie du lemme 5 montre que la dérivée approximative d'ordre 2 de $f_{ap}^{(n-2)}(x)$ existe presque partout sur B^+, ce qui prouve l'énoncé.

Enfin, dans le cas $n = 1$, l'énoncé résulte du théorème de *Denjoy-Khintchine.*

Le théorème à démontrer est une conséquence évidente du lemme 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Voir *S. Saks,* Théorie de l'intégrale. 1933. Chapitre VIII.

[2] *F. Riesz,* Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. Annales de l'Ecole Normale Supérieure (3) 28 (1911).

[3] Voir par exemple *H. Hahn,* Theorie der reellen Funktionen (1921) p. 98.

(Reçu le 18 juillet 1947.)