Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 21 (1948)

Artikel: Sur les répartitions des suites de nombres réels.

Autor: Ammann, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18614

Sur les répartitions des suites de nombres réels

Par A. AMMANN, Genève

Résumé d'une thèse présentée à l'Université de Genève

1) **Définition 1.** *Nous dirons qu'une suite de fonctions convexes croissantes $x_i(t)$, définies sur le segment 01, forme une suite normale, si la dérivée à droite $x_i'^{+}(0)$ tend vers l'infini.*

Par exemple, a_i tendant vers l'infini, la suite $a_i t$ est une suite normale. Les suites normales jouissent de la propriété suivante:

Propriété 1. *α étant un nombre du segment 01 et $P(x)$ une fonction périodique intégrable*[1]) *quelconque de période ω on a*

$$\lim \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha P[x_i(t)]\, dt = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega P(x)\, dx \,.$$

Pour abréger l'écriture, nous poserons :

$$P_i(t) = P[x_i(t)] \quad \text{et} \quad [P] = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega P(x)\, dx \,,$$

de sorte qu'on pourra écrire la relation précédente sous la forme plus simple :

$$\lim \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha P_i(t)\, dt = [P] \,. \tag{1}$$

D'une manière plus générale on pourrait appeler *suite normale* toute suite de fonctions $x_i(t)$ qui vérifie l'égalité (1).

---

[1]) Nous entendons par là une fonction bornée, intégrable au sens de Riemann.

En posant

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_1^n P_i(t) \quad ,$$

on voit facilement qu'elle entraîne celle-ci :

$$\lim \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_n(t)\, dt = [P] \quad . \tag{2}$$

2) A chaque valeur de t il correspond une suite de nombres réels $x_i = x_i(t)$, et la suite $P_i = P(x_i)$ est déterminée complètement par sa répartition module ω. En effet, lorsque x_i et y_i ne diffèrent que par un multiple entier de ω, on a $P(x_i) = P(y_i)$ en vertu de la périodicité de $P(x)$. La moyenne arithmétique F_n des n premiers nombres P_i, en tant que moyenne des valeurs prises par la fonction $P(x)$ aux points d'abscisse x_i $(i = 1, \ldots, n)$, peut être rapprochée de la valeur moyenne $[P]$ de cette fonction.

Définition 2. *Lorsqu'on a pour toute fonction intégrable $P(x)$ de période ω*

$$\lim F_n = [P] \quad , \tag{3}$$

la suite x_i est dite équirépartie (au point t) selon ω. Les suites normales généralement ne sont pas équiréparties pour toutes les valeurs de t.

Définition 3. *On dira qu'une suite x_i est unifiante au point t selon ω si pour toute fonction $P(x)$ intégrable et de période ω, on a*

$$\liminf F_n \leq [P] \leq \limsup F_n \quad . \tag{4}$$

Indépendamment de toute suite x_i, on peut définir une suite infinie $P^{(k)}(x)$ de fonctions intégrables de période ω, donnant lieu à la propriété suivante :

Propriété 2. *Pour que la suite x_i soit unifiante, il suffit que les inégalités (4) soient vérifiées pour toutes les fonctions $P^{(k)}(x)$.*

A chaque fonction $P^{(k)}(x)$ il correspond, comme nous l'allons voir, un ensemble $T^{(k)}$ de valeurs de t qui est de mesure nulle, et hors duquel les relations (4) sont vérifiées relativement à la fonction $P^{(k)}(x)$.

A cause de la propriété 2, les relations (4) sont vérifiées pour toute fonction $P(x)$ hors de la réunion M des ensembles $T^{(k)}$, qui est encore de mesure nulle. Hors de M la suite x_i est donc unifiante.

Théorème 1. *Une suite normale* $x_i(t)$ *est unifiante presque partout.*

3) Il reste à démontrer qu'il correspond à chaque fonction $P^{(k)}(x)$, ou plus généralement à chaque fonction intégrable $P(x)$ de période ω, un ensemble T de valeurs de t qui est de mesure nulle et hors duquel les relations (4) sont vérifiées pour la fonction $P(x)$.

$P(x)$ étant maintenant une fonction déterminée, posons

$$F_n^*(t) = F_n(t) - [P] .$$

L'égalité (2) pourra s'écrire ainsi :

$$\lim \int_0^\alpha F_n^*(t)\, dt = 0 . \tag{5}$$

La suite des fonctions $F_n^*(t)$ jouit de propriétés remarquables :
1° Les fonctions $F_n^*(t)$ sont bornées dans leur ensemble.
2° Elles vérifient l'égalité (5) quel que soit le nombre α du segment 01.

On peut leur appliquer le lemme suivant :

Lemme 1. *Etant donné une suite infinie de fonctions sommables réelles* $F_n(t)$ *qui admettent sur le segment* 01 *une majorante fixe sommable, si l'on a pour tout* α *de ce segment*

$$\lim \int_0^\alpha F_n(t)\, dt = 0 ,$$

les inégalités suivantes sont alors vérifiées presque partout :

$$\liminf F_n(t) \leq 0 \leq \limsup F_n(t) . \tag{6}$$

L'application de ce lemme aux fonctions $F_n^*(t)$ envisagées plus haut fournit ces inégalités:

$$\liminf F_n(t) \leq [P] \leq \limsup F_n(t) . \tag{4}$$

Comme les précédentes, elles sont valables *presque partout*, et ceci achève de démontrer le théorème 1.

4) Quel que soit l'entier m, une suite x_i, unifiante pour le module ω, l'est aussi pour le module $\frac{\omega}{m}$. Si les inégalités (4) sont vérifiées pour toute fonction de période ω, elles le sont à plus forte raison pour toutes les fonctions de période $\frac{\omega}{m}$.

Définition 4. *Une suite x_i est unifiante totalement si elle l'est par rapport aux modules $1, 2, 3, \ldots$ Elle est alors aussi unifiante par rapport à tout module ω rationnel.*

Théorème 2. *Tout suite normale $x_i(t)$ est unifiante totalement hors d'un ensemble de mesure nulle.*

D'après le théorème 1 il y a un ensemble de mesure nulle M_ω correspondant à chaque période. Si nous formons la réunion des ensembles M_ω, ω parcourant la suite des nombres entiers, l'ensemble obtenu, qui est toujours de mesure nulle, contient tous les points t pour lesquels la suite $x_i(t)$ n'est pas unifiante totalement.

On peut définir également l'équirépartition totale:

Définition 5. *Une suite équirépartie par rapport aux modules $1, 2, 3, \ldots$ sera dite équirépartie totalement. Elle est alors équirépartie par rapport à tous les modules ω rationnels.*

Pour les suites normales particulières $x_i(t) = a_i t$, on a le théorème suivant :

Théorème 3. *Si la suite $a_i t$ est équirépartie presque partout module 1, elle est équirépartie totalement presque partout. Si elle n'est pas équirépartie module 1 presque partout, elle n'est équirépartie totalement que sur un ensemble de mesure nulle.*

En particulier, une suite $a_i t$ ne peut être équirépartie totalement que sur un ensemble de mesure 0 ou 1. On peut déduire ce théorème de quelques lemmes élémentaires.

Lemme 2[2]**.** *Sur le segment 01 un ensemble homogène mesurable (c'est-à-dire d'égale mesure spécifique) a toujours la mesure* 0 *ou* 1.

Lemme 3. *Un ensemble mesurable qui se transforme en lui-même lorsqu'on multiplie ses éléments par un nombre rationnel quelconque est homogène.*

Lemme 4. *Si une suite x_i est équirépartie totalement, la suite $r x_i$ l'est aussi, r étant rationnel.*

6) *Remarque 1.* On peut construire une suite normale $a_i t$ qui ne soit équirépartie nulle part et qui ne soit pas unifiante module 1 sur l'ensemble de Cantor.

---

[2]) Voir *J. F. Koksma*, Diophantische Approximationen. Erg. IV (4) pp. 43—44.

Remarque 2. Si les suites $F_n(t)$ considérées dans le lemme 1 satisfont pour chaque valeur de t à la condition supplémentaire

$$\lim (F_{n+1} - F_n) = 0 \ ,$$

les nombres $F_n(t)$ admettent pour point d'accumulation toute valeur comprise entre leur plus grande et leur plus petite limite.

D'après la conclusion du lemme, on pourra donc extraire pour chaque t une suite $F_{n_r}(t)$ qui converge vers 0. La suite F_{n_r} choisie peut dépendre effectivement de t. En d'autres termes, on peut donner l'exemple d'une suite $F_n(t)$ pour laquelle on ait les propriétés suivantes :

1) Quel que soit t, il est possible d'extraire une suite $F_{n_r}(t)$ qui converge vers 0 au point t ;

2) Aucune suite $F_{n_r}(t)$ ne converge vers 0 pour deux valeurs différentes de t.

(Reçu le 15 novembre 1947.)