Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1948)

Artikel: Über die Stirlingsche Reihe.
Autor: Atkinson, F.V.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18615

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Stirlingsche Reihe

Von F. V. Atkinson, Oxford

1. Wegen ihrer mannigfaltigen Anwendungen ist eine einfache Herleitung der Stirlingschen Reihe sehr zu wünschen. Deshalb mag die Herleitungsweise, die ich im folgenden mitteile, nicht ganz ohne Interesse erscheinen. Ich habe mich auf den Fall der Gamma-Funktion beschränkt, doch läßt sich die Methode leicht auf allgemeinere Fälle des Summationsproblems übertragen.[1]) Es wird gezeigt, daß die Euler-Maclaurinsche Summenformel als eine Art Umkehrung der Taylorschen Reihe betrachtet werden kann.

Ich beweise den folgenden

Satz. Es sei

$$h = h(z) = \min \{|z|, |z+1|, |z+2|, \ldots\}$$

und ferner $h > 3$. Dann ist

$$\log \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + C + \sum_{n=2}^{m} (-1)^n \frac{B_n}{n(n-1)} z^{1-n} + R_m(z) ,$$

wobei

$$|R_m(z)| < c_m |z| h^{-m-1} .$$

Hier bedeuten C, die c_m und später a_m, b_m gewisse positive Konstanten; B_n ist die n-te Bernoullische Zahl. In der Tat ist

$$\chi (e^{\chi} - 1)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \chi^n .$$

Der Wert von $\lg z$ werde durch die Forderung

$$|\operatorname{arc} z| < \pi$$

bestimmt. Es wird folgendes über die Gamma-Funktion benutzt:

---

[1]) Vgl. *E. Pascal*, Repertorium der höheren Analysis (Teubner, Leipzig 1929, Bd. I 3, S. 1221 ff.).

(I) $\Gamma(z)$ ist eindeutig regulär, außer den Punkten $0, -1, -2, \ldots,$

(II) $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$,

(III) $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+n)^{-2}$,

(IV) $\Gamma(z)$ reell für reelle z.

Bekanntlich ist Gleichung (III) durch die schwächere Bedingung

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma(z) \to 0 \quad \text{als} \quad z \to \infty$$

ersetzbar.

Da die Gamma-Funktion durch diese vier Eigenschaften nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt wird, so muß man die Bestimmung der Konstante C auf anderen Überlegungen beruhen lassen. Zu diesem Zwecke kann z. B. jede der beiden Gleichungen

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\ , \quad \Gamma(z)\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = 2^{1-2z}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(2z)$$

dienen.

2. Der Kürze halber bezeichne ich $\log \Gamma(z)$ mit $F(z)$ und mit $F^{(n)}(z)$ deren n-te Ableitung. Dann ist

$$F(z+1) - F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(z) = \log z\ ,$$

vorausgesetzt, daß $h(z) > 1$ ist. Daraus folgt

$$F(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n-1)}(z) = z \log z - z + C$$

durch Integration längs einer Kurve, worauf stets $h(z) > 1$ ist. Durch r-malige Differentiation ergibt sich ferner

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n+r+1)}(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^r \log z$$

und daher für beliebige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

$$F(z) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(z) \left\{ \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{\max(m,n)} \frac{\alpha_r}{(n+1-r)!} \right\}$$

$$= z \log z - z + C + \sum_{r=1}^{m} \alpha_r \left(\frac{d}{dz}\right)^{r-1} \log z\ .$$

Nun wähle ich die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ derart, daß für $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{(n+1-r)!} = 0 \ .$$

Es ist somit

$$\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r y^r\right)\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} y^{r-1}\right) \equiv 1 \ ,$$

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r y^r = y(e^y - 1)^{-1} \ ,$$

und zwar

$$\alpha_r = \frac{B_r}{r!} \ , \qquad \alpha_1 = -\tfrac{1}{2} \ .$$

Es entsteht nach einiger Umformung

$$R_m(z) = \log \Gamma(z) - (z \log z - z) - C + \tfrac{1}{2} \log z - \sum_{r=2}^{m} \frac{B_r}{r!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{r-1} \log z$$

$$= - \sum_{n=m+1}^{\infty} F^{(n)}(z) \left(\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_r}{r!\,(n+1-r)!}\right) .$$

3. Der Beweis wird mit einer Abschätzung der Größen $F^{(n)}(z)$ beschlossen. Es ist, mit Berücksichtigung von Gleichung (III)

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant (n-1)! \sum_{s=0}^{\infty} |z+s|^{-n} \ .$$

Es ist jedenfalls

$$|z+s| \geqslant |s| - |z| \ ,$$

und falls $s \geqslant 0$ ist

$$|z+s| \geqslant h(z) = h > 1 \ ,$$

woraus

$$|F^{(n)}(z)| \leqslant (n-1)! \left(\sum_{0 \leqslant s \leqslant 2|z|+1} |z+s|^{-n} + \sum_{s > 2|z|+1} |z+s|^{-n}\right)$$

$$\leqslant (n-1)! \left(4|z| h^{-n} + \sum_{s > 2|z|+1} (\tfrac{1}{2} s)^{-n}\right)$$

$$\leqslant (n-1)! \left(4|z| h^{-n} + 2^n \int_{2|z|}^{\infty} y^{-n}\, dy\right)$$

$$\leqslant A(n-1)!\, |z|\, h^{-n} \ ,$$

wobei A eine Weltkonstante ist. Folglich ist

$$
\begin{aligned}
|R_m(z)| &\leqslant A\,|z| \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-1)! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{r=1}^{m} \frac{|B_r|}{r!\,(n+1-r)!}\right) h^{-n} \\
&\leqslant A\,|z| \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{|B_1|}{n} + \sum_{r=2}^{m} \frac{n^r\,|B_r|}{r!}\right) h^{-n} \\
&\leqslant a_m\,|z| \sum_{n=m+1}^{\infty} h^{-n}\, n^m\,.
\end{aligned}
$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß es ein b_m gibt, derart, daß für $n \geqslant 1$

$$n^m \leqslant b_m\, 2^n$$

gilt. Man hat hiernach mit $h > 3$

$$
\begin{aligned}
|R_m(z)| &< a_m\, b_m\, |z| \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{-n} \\
&= a_m\, b_m\, |z| \left(\frac{h}{2}\right)^{-m} \left(\frac{h}{2} - 1\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

so daß

$$|R_m(z)| < c_m\, |z|\, h^{-m-1}$$

wie behauptet.

(Eingegangen den 14. November 1947.)