Eigenschaften harmonischer Reihen mit zeichenfester Summe in Räumen höherer Stufenzahl.

Autor(en): **Koschmieder, Lothar**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **21 (1948)**

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18595

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Eigenschaften harmonischer Reihen mit zeichenfester Summe in Räumen höherer Stufenzahl

Von LOTHAR KOSCHMIEDER, Graz

Herrn JOHANN RADON zum sechzigsten Geburtstage

1. Von den Reihenabschnitten selbst

Konvergente harmonische Entwicklungen einer im Einheitskreise oder in der Einheitskugel harmonischen und positiven Funktion besitzen folgende Eigenschaften: Ihre Abschnitte sind gleichfalls positiv in einem Kreise mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}$, einer Kugel mit dem Halbmesser $\frac{1}{3}$ um dieselbe Mitte [1,1]. Hiernach läßt sich bei einem Raume von $N + 2$ Ausdehnungen vermuten, daß, auch wenn $N > 1$ ist, *die Abschnitte der in der* $(N + 1)$*-stufigen Einheits-(Über-)Kugel* K *konvergenten harmonischen Entwicklung einer dort harmonischen und positiven Funktion in der gleichmittigen Kugel mit dem Halbmesser* $(N + 2)^{-1}$ *sämtlich positiv sind.*

1.1. Dem Beweise dafür sei folgendes vorausgeschickt. Man bediene sich der (über-)sphärischen Polarkoordinaten [1.1,1] $R, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N, \varphi$, kurz R, Θ, φ eines Punktes P und $\varrho, \tau_1, \ldots, \tau_N, \psi$, kurz ϱ, T, ψ eines Punktes Q. Ω bedeute die Oberfläche der Kugel K (um den Ursprung O), $d\omega$ ihr Teilchen im Schnitte mit OQ, γ den Winkel POQ. Dann läßt sich die harmonische Funktion $h(R, \Theta, \varphi) = h\langle P\rangle$ des Satzes durch das Poissonsche Integral ausdrücken: wenn $R < \varrho < 1$ und ϱ zunächst fest ist, gilt [1.1,2]

[1,1] Über die Literatur dieser Sätze unterrichtet *L. Fejér*, Mh. Math. Phys. 35 (1928), 305—344 (siehe dort die Sätze X und XI, S. 322). Diese Abhandlung Fejérs ist auch der Fundort der weiteren Sätze des R_2 und R_3, die ich hier auf Euklidische R_{N+2} zu übertragen vorhabe.

[1.1,1] Vgl. *P. Appell-J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite*, Paris 1926 (weiterhin mit A.-K. angeführt), S. 202. Die dortige Schreibweise der Stufenzahl ist mit $N + 2$ hier übernommen.

[1.1,2] Vgl. A.-K., S. 198, (26) und S. 196, Z · 9.

$$h(R,\Theta,\varphi) = \frac{\varrho^N}{\Omega} \int\limits_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi) \frac{\varrho^2 - R^2}{(\varrho^2 - 2\varrho R \cos\gamma + R^2)^{\frac{1}{2}(N+2)}} d\omega$$

oder mit $R = \varrho r$, $0<r<1$,

$$h(\varrho r, \Theta, \varphi) = \frac{1}{\Omega} \int\limits_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi) \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{1}{2}(N+2)}} d\omega \,. \quad (1.1,1)$$

Es seien $\Lambda_\mu^{\frac{1}{2}N}(\cos\gamma)$, kurz $\Lambda_\mu(\cos\gamma)$, die von dem Ausdruck

$$\frac{1}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{1}{2}N}} = \sum_\mu^{0,\infty} \Lambda_\mu(\cos\gamma) r^\mu \quad (1.1,2)$$

erzeugten Gegenbauerschen Polynome; dann ist bekanntlich[1.1,3])

$$L(r,\gamma) = \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{1}{2}(N+2)}} = \frac{1}{N} \sum_\mu^{0,\infty} (2\mu + N) \Lambda_\mu(\cos\gamma) r^\mu \,. \quad (1.1,3)$$

Setzt man diese Reihe im Integranden von (1.1,1) an Stelle von $L(r,\gamma)$, so darf man dort gliedweise integrieren, weil (1.1,3), wenn P festliegt und Q auf der Kugel um O vom Halbmesser ϱ wandert, im Bereiche $0 \leqq \gamma \leqq \pi$ gleichmäßig konvergiert. Man erhält

$$h(\varrho r, \Theta, \varphi) = \frac{1}{N\Omega} \sum_\mu^{0,\infty} r^\mu (2\mu + N) \int\limits_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi) \Lambda_\mu(\cos\gamma) d\omega \,. \quad (1.1,4)$$

Das μ-te Glied dieser Potenzreihe in r ist in den Cartesischen Koordinaten ϱz_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, N+2)$ des Punktes P ein homogenes Polynom H_μ von μ-tem Grade; es strebt mit $\varrho \to 1$ zu

$$H_\mu(z_1, \ldots, z_{N+2}) = r^\mu X_\mu(\Theta, \varphi) \,, \quad \text{wo}$$

$$X_\mu(\Theta, \varphi) = \frac{1}{N\Omega} (2\mu + N) \lim_{\varrho \to 1} \int\limits_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi) \Lambda_\mu(\cos\gamma) d\omega \,. \quad (1.1,5)$$

1.1,3) Vgl. A.-K., S. 206, (17).

Läuft ϱ in (1.1,4) gegen 1, so darf man das Zeichen dieses Grenzübergangs nach einem bekannten Satze der Reihenlehre mit dem Summenzeichen vertauschen, und es ergibt sich

$$h(r, \Theta, \varphi) = \sum_{\mu}^{0,\infty} r^{\mu} X_{\mu}(\Theta, \varphi) \tag{1.1,6}$$

mit den Werten (1.1,5) der X_{μ} als die im Satze genannte konvergente harmonische Entwicklung der Funktion $h\langle p\rangle$ im Punkte p mit den Polarkoordinaten r, Θ, φ; sie bietet die Gestalt dar, in der man sie für $N = 0$, $N = 1$ im Schrifttum verwendet findet[1.1,4]). — Es sei nochmals erwähnt, daß h weiterhin stets als positiv in K vorausgesetzt wird.

1.2. Mit den Hilfsmitteln der Nr. 1.1 bilde ich jetzt den *Beweis* des in Nr. 1 ausgesprochenen Satzes dem von Fejér in den Fällen $N = 0$, $N = 1$ geführten[1,1]) nach. Der m-te Abschnitt $s_m(r, \Theta, \varphi)$ der Reihe (1.1,6) ist ein Polynom m-ten Grades in r mit den Vorzahlen $c_{\mu} = X_{\mu}(\Theta, \varphi)$ $[\mu = 0, 1, \ldots, m]$, das nicht identisch verschwindet, weil $c_0 = h\langle O\rangle > 0$. Für die Cesàroschen Mittel $(N + 1)$-ter Ordnung [die $(C, N + 1)$-Mittel] $C_n^{(N+1)}$ der Folge c_{ν} $(\nu, n = 0, 1, 2, \ldots)$ gilt

$$C_n^{(N+1)} = \frac{1}{N\Omega} \lim_{\varrho \to 1} \int_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi) B_n^{(N+1)}(\cos\gamma)\, d\omega \ , \tag{1.2,1}$$

wo $B_n^{(N+1)}$ dieselben mit der Folge $b_{\nu} = (2\nu + N)\, \Lambda_{\nu}(\cos\gamma)$ gebildeten Mittel bezeichnen. Nun sind die $B_n^{(N+1)}$ aber sämtlich nichtnegativ[1.2,1]); folglich trifft das nach (1.2,1) wegen $h > 0$ auch auf die $C_n^{(N+1)}$ zu. Hier greift ein Satz von Fejér[1.2,2]) ein: Sind bei dem nicht identisch verschwindenden Polynom $g(r) = \sum_{\mu}^{0,m} c_{\mu} r^{\mu}$ mit reellen Vorzahlen c_{μ} die $m + 1$ ersten (C, k)-Mittel der (endlichen Folge der) c_{μ} sämtlich nichtnegativ, so ist $g(r) > 0$ für $0 < r < (k + 1)^{-1}$. Mit $k = N + 1$ folgt hieraus, da auch $s_m\langle O\rangle = c_0 = h\langle O\rangle$ positiv ist, daß in der Kugel $r < (N + 2)^{-1}$ tatsächlich $s_m(r, \Theta, \varphi) > 0$ ist.

1.1,4) Vgl. *G. Szegö*, Math. Ann. 96 (1927), 601—632; siehe dort S. 602.

1.2,1) Nach *E. Kogbetliantz*, J. Math. pur. appl. (9) 3 (1924), S. 107—187; siehe dort S. 179.

1.2,2) *Fejér*[1,1]), Satz VI, S. 317. In der letzten Zeile dieses Satzes muß es statt $\frac{1}{k}$ offensichtlich $\frac{1}{k+1}$ heißen.

1.3. Diese Kugel läßt sich durch keine größere um O ersetzen; in der Entwicklung (1.1,3) ist nämlich, da nach (1.1,2) $\Lambda_0(\cos\gamma) = \Lambda_0 = 1$, $\Lambda_1 = N\cos\gamma$ ist, der erste Abschnitt

$$s_1 = \Lambda_0 + \frac{1}{N}(2+N)r\Lambda_1 = 1 + (N+2)r\cos\gamma \ ,$$

und dieser wird bei $\gamma = \pi$ negativ, wenn $(N+2)^{-1} < r$.

2. Reihen nach Didonschen Polynomen in der (N—1)-stufigen Überkugel

Hervorgehoben sei ein — von mir in einer früheren Arbeit[2,1]) nach anderer Richtung behandelter — Sonderfall, der ins klarste Licht tritt, wenn man statt der sphärischen Polarkoordinaten $R, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N, \varphi$ eines Punktes P und $\varrho, \tau_1, \ldots, \tau_N, \psi$ eines andern Q ihre *zonalen* Koordinaten $R, x_1, \ldots, x_N, \varphi$ und $\varrho, y_1, \ldots, y_N, \psi$ einführt. Dabei wird $d\omega = d\eta\, d\psi$ mit $d\eta = \prod\limits_{\beta}^{1,N} dy_\beta$. Jetzt sei die Funktion h (Nr. 1) in allen Punkten P *von* φ *unabhängig*, kurz $h\langle P\rangle = w(R, \Xi)$; Ξ stellt den Inbegriff der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_N$ vor, und entsprechend steht H statt $y_1, \ldots, y_N$. Die Annahme über h führt zu einer besonderen Art der Reihe (1.1,6), nämlich zu

$$w(r, \Xi) = \sum_{\mu}^{0,\infty} r^\mu W_\mu(\Xi) \ , \qquad (2,1)$$

wo nach (1.1,5)

$$W_\mu(\Xi) = \frac{1}{N\Omega}(2\mu + N)\lim_{\varrho\to 1} \int\limits_{Y_N \geqq 0}^{(N)} d\eta\, w(\varrho, H) \int\limits_0^{2\pi} \Lambda_\mu(\cos\gamma)\, d\psi$$

mit $Y_N = 1 - \sum\limits_{\beta}^{1,N} y_\beta^2$. Das innere Integral rechts hat aber den Wert

$$\int\limits_0^{2\pi} \Lambda_\mu(\cos\gamma)\, d\psi = \frac{2\pi}{\mu!} \sum_{\mu_1 + \cdots + \mu_N = \mu} \mu_1! \ldots \mu_N!\, U_{\mu_1\ldots\mu_N}(\Xi) V_{\mu_1\ldots\mu_N}(H) \ , \qquad (2,21)$$

wenn $U_{\mu_1\ldots\mu_N}(H)$, $V_{\mu_1\ldots\mu_N}(H)$ die Gesamtheiten der in $Y_N \geqq 0$ biorthogonalen Didonschen Polynome bezeichnen. Ebenso ist es dem Aus-

---

2,1) *L. Koschmieder*, Math. Ann. 104 (1931), 387—402; siehe dort namentlich S. 395/96. Da man an dieser Stelle alle in Nr. 2 benutzten Hilfsformeln beisammen und auch die nötigen Quellen genannt findet, brauche ich hier beides nicht einzeln anzuführen.

druck (2,22) gleich, der aus (2,21) durch Vertauschung von Ξ und H entsteht. Somit nimmt (2,1) eine der beiden Formen an

$$w(r,\Xi)=\begin{cases} U=\sum\limits_{\mu}^{0,\infty} r^{\mu} \sum\limits_{\mu_1+\cdots+\mu_N=\mu} B_{\mu_1\ldots\mu_N} U_{\mu_1\ldots\mu_N}(\Xi)\ , & (2,31) \\ V=\sum\limits_{\mu}^{0,\infty} r^{\mu} \sum\limits_{\mu_1+\cdots+\mu_N=\mu} A_{\mu_1\ldots\mu_N} V_{\mu_1\ldots\mu_N}(\Xi)\ ; & (2,32) \end{cases}$$

darin ist, wenn $J=\pi^{\frac{1}{2}N}\left[\Gamma(\frac{1}{2}N+1)\right]^{-1}$ den N-stufigen Rauminhalt der Einheitskugel $Y_N \geqq 0$ bedeutet [2,2]),

$$B_{\mu_1\ldots\mu_N}=\frac{2\mu+N}{NJ\mu\,!}\,\mu_1!\ldots\mu_N!\lim_{\varrho\to 1}\int\limits_{Y_N\geqq 0}^{(N)} w(\varrho,H)\,V_{\mu_1\ldots\mu_N}(H)\,d\eta\ ,$$

und $A_{\mu_1\ldots\mu_N}$ geht aus $B_{\mu_1\ldots\mu_N}$ hervor, indem man rechts $V_{\mu_1\ldots\mu_N}(H)$ durch $U_{\mu_1\ldots\mu_N}(H)$ ersetzt. Nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze sind *die Abschnitte der Reihen U und V*, die man erhält, wenn man μ von 0 bis zu irgendeiner ganzen Zahl $m\geqq 0$ aufsteigen läßt, für $r<(N+2)^{-1}$ *alle positiv.*

3. Der Unterfall der Legendreschen Reihe

Ist $N=1$, so fallen die beiden Reihen (2,31), (2,32) in eine zusammen, nämlich, wenn $P_\mu(x)$ die Legendreschen Polynome bedeuten, in

$$w(r,x)=\sum_{\mu}^{0,\infty} r^{\mu} A_\mu P_\mu(x) \qquad \text{mit } A_\mu=\frac{2\mu+1}{2}\lim_{\varrho\to 1}\int\limits_{-1}^{+1} w(\varrho,y)\,P_\mu(y)\,dy$$

oder, nach Art von (1.1,6) mit $x=\cos\vartheta$ in Polarkoordinaten geschrieben,

$$h(r,\vartheta)=\sum_{\mu}^{0,\infty} r^{\mu}\frac{2\mu+1}{2}P_\mu(\cos\vartheta)\lim_{\varrho\to 1}\int\limits_0^{\pi} h(\varrho,\tau)\,P_\mu(\cos\tau)\sin\tau\,d\tau\ . \qquad (3,1)$$

In der Aussage, daß alle Abschnitte dieser Reihe in der Kugel $r<\frac{1}{3}$ positiv sind, bestätigt sich, was man aus Fejérs Satze [1,1]), XI ohnehin

---

[2,2]) Vgl. A.-K., S. 203, (4) und Fußnote 1. Es ist dort N durch $N-2$ zu ersetzen.

weiß: (3,1) ist ja ein Sonderfall der nach diesem Satze dort mit lauter positiven Abschnitten begabten Reihe (1.1,6)

$$h(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\mu}^{0,\infty} r^{\mu} X_{\mu}(\vartheta, \varphi)$$

— der Fall, in dem die Funktion h nicht von der geographischen Länge φ abhängt.

4. Bemerkung zur Literatur

Die Begegnung mit den Legendreschen Polynomen in Nr. 3 gibt mir Anlaß, auf einen sie betreffenden, den Inhalt der vorliegenden Arbeit allerdings nicht berührenden Umstand hinzuweisen, der mir in einer früheren Abhandlung [4,1]) entgangen war. Ich habe dort nebenher die bilineare Reihe $\sum_{\mu}^{0,\infty} P_{\mu}(\cos\vartheta) P_{\mu}(\cos\tau)$ durch ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung summiert [S. 340, (10a · 5)]. Meine Formel war aber nicht neu, sie ist vielmehr — in noch allgemeinerer Gestalt, nämlich als Wert der Reihe $\sum_{\mu}^{0,\infty} t^{\mu} P_{\mu}(\cos\vartheta) P_{\mu}(\cos\tau)$ — „so old as Legendre". Das erfuhr ich aus einer Arbeit von Watson [4,2]), in der der Verf. — ohne Beziehung zu [4,1]) — erzeugende Funktionen der Legendreschen und der Gegenbauerschen Polynome aufstellt.

5. Schranken des ersten Beiwerts der harmonischen Reihe

Aus dem Ergebnisse der Nr. 1 entspringt ebenso, wie es Fejér a.a.O.[1,1]), S. 323 für $N = 1$ gezeigt hat, folgender auf die in K positiven h bezügliche *Satz von Pick* [5,1]): Bei einer Reihe der Art (1.1,6), deren nullter — fester — Beiwert X_0 gleich 1 ist, gilt auf ganz K

$$| X_1(\Theta, \varphi) | \leqq N + 2 \ . \tag{5,1}$$

Zum Beweise genügt der Vermerk, daß der Abschnitt s_1 der in Rede stehenden Entwicklung für $r = (N+2)^{-1}$ nichtnegativ ist,

$$s_1[(N+2)^{-1}, \Theta, \varphi] = 1 + (N+2)^{-1} X_1(\Theta, \varphi) \geqq 0 \ ;$$

[4,1]) *L. Koschmieder*, Mh. Math. Phys. 39 (1932), 321—344.

[4,2]) *G. N. Watson*, J. London math. Soc. 8 (1933), 289—292; siehe dort S. 290.

[5,1]) *G. Pick*, Jber. Deutsche Math.-Verein. 24 (1915), 329—332; siehe dort Nr. 5.

daraus folgt nämlich

$$X_1(\Theta, \varphi) \geqq -(N+2) \ .$$

rX_1 ist aber eine lineare homogene Funktion der Cartesischen Koordinaten z_α $(\alpha = 1, \ldots, N+2)$ des Punktes p [5,2]), hat also in seinem Gegenpunkte $\bar{p}$ mit den Koordinaten $-z_\alpha$ den entgegengesetzten Wert zu dem in p; folglich gilt auch $X_1 \leqq N+2$, mithin auf ganz K die Behauptung.

6. Schranken ihrer übrigen Beiwerte

(5,1) ist Sonderfall einer *Abschätzung aller Beiwerte X_μ einer Reihe* (1.1,6) *mit dem Anfangsgliede* $X_0 = 1$,

$$-(2\mu+N)\frac{\Gamma(\mu+N)}{\Gamma(N+1)\,\Gamma(\mu+1)} \leqq X_\mu(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N, \varphi) \leqq (2\mu+N)\frac{\Gamma(\mu+N)}{\Gamma(N+1)\,\Gamma(\mu+1)} \, . \tag{6,1}$$

Sie rührt für $N = 1$ von Szegö [6,1]) her; seinen Beweis kann man, an (1.1,5) anknüpfend, wie folgt auf den R_{N+2} verallgemeinern. Von dem Bestandteil $\Lambda_\mu(\cos\gamma)$ des Integranden in (1.1,5) kennt man Schranken G und g nach oben und unten, da sich

$$|\Lambda_\mu(\cos\gamma)| \leqq \Lambda_\mu(1) = \frac{\Gamma(N+\mu)}{\Gamma(N)\,\Gamma(\mu+1)} \tag{6,2}$$

abschätzen läßt [6,2]); wegen $h > 0$ gilt dann nach dem Mittelwertsatze vielfacher Integrale

$$g\int\limits_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi)\,d\omega \leqq \int\limits_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi)\,\Lambda_\mu(\cos\gamma)\,d\omega \leqq G\int\limits_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi)\,d\omega \ . \tag{6,3}$$

Nun liefern aber (1.1,6) und (1.1,1) mit $r = 0$ wegen der Annahme, daß $X_0 = 1$,

$$X_0 = h\langle O\rangle = \frac{1}{\Omega}\int\limits_K^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi)\,d\omega = 1 \ ;$$

5,2) p trat gegen Ende der Nr. 1.1 auf.

6,1) Siehe *Szegö* 1.1,4), S. 617.

6,2) Vgl. A.-K., S. 390.

aus (6,3) ergibt sich somit

$$g\Omega \leqq \int\limits_{K}^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi)\, \Lambda_\mu(\cos\gamma)\, d\omega \leqq G\Omega\ . \tag{6,4}$$

Wenn man nach (6,2) hierin $G = \Gamma(\mu+N)/[\Gamma(N)\Gamma(\mu+1)]$ und $g = -G$ wählt und (6,4) mit $(2\mu+N)/N\Omega$ malnimmt, erhält man

$$-(2\mu+N)\frac{\Gamma(\mu+N)}{\Gamma(N+1)\Gamma(\mu+1)} \leqq \frac{2\mu+N}{N\Omega}\int\limits_{K}^{(N+1)} h(\varrho, T, \psi)\Lambda_\mu(\cos\gamma)\, d\omega \leqq (2\mu+N)\frac{\Gamma(\mu+N)}{\Gamma(N+1)\Gamma(\mu+1)}$$

und hieraus mit $\varrho \to 1$ nach (1.1,5) die Behauptung (6,1). — Die damit gefundene obere Schranke der X_μ wird von den Beiwerten $X_\mu = (2\mu+N)\Lambda_\mu(\cos\gamma)/N$ der Reihe (1.1,3) nach (6,2) an der Stelle $\gamma = 0$ erreicht; die untere — wegen der Ungeradheit $\Lambda_{2\nu+1}(-t) = -\Lambda_{2\nu+1}(t)$ — von ihren Beiwerten $X_{2\nu+1}$ ungeraden Zeigers, und zwar an der Stelle $\gamma = \pi$.

7. Von den $(C,1)$-, $(C,2)$-, $(C,3)$-Mitteln der harmonischen Reihe des R_4

Im R_3, wenn also $N = 1$, sind die $(C, 2)$-Mittel der Reihe (1.1,6) [7,1]) in der ganzen Kugel $r < 1$ positiv, ihre $(C, 1)$-Mittel sind es in der Kugel $r < \frac{2}{3}$ [7,2]), ihre Abschnitte selbst haben diese Eigenschaft in der Kugel $r < \frac{1}{3}$. Man wird es danach für wahrscheinlich halten, daß bei beliebigem N die (C, δ)-Mittel der Reihe (1.1,6) in der Kugel $r < \dfrac{\delta+1}{N+2}$ $(\delta = 0, 1, \ldots, N+1)$ positiv sind. Für $\delta = 0$ ist das in Nr. 1 bewiesen; um die übrigen $N+1$ Teile dieser Vermutung zu bestätigen, bedarf es anscheinend eines bedeutenden Rechenaufwandes, wie schon der Wert $N = 2$, d. h. der R_4 zeigt. Diesem wende ich mich jetzt zu, indem ich beweise: *Bei der* — zu einer wie stets in $r < 1$ positiven Funktion h gehörigen — *harmonischen Reihe* (1.1,6) *des R_4 sind die* $(C, 1)$-*Mittel der Glieder in der Kugel* $r < \frac{1}{2}$ *positiv, die* $(C, 2)$-*Mittel sind es in der Kugel* $r < \frac{3}{4}$, *ihre* $(C, 3)$-*Mittel sind es in der ganzen Einheitskugel.* Ich werde allgemeiner von einem nicht identisch verschwindenden *Polynome m-ten*

7,1) Genauer: der Folge ihrer Glieder $c_\mu r^\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ [siehe Nr. 1.2].

7,2) Siehe *Fejér* 1,1), S. 330, Satz XVII.

Grades $g(r) = \sum_{\mu}^{0,m} c_\mu r^\mu$ mit reellen Vorzahlen c_μ zeigen, daß *seine* m*-te* $(C, 1)$*-Summe* [7,3]) $s_m^{(1)}$ *im Gebiete* $r < \frac{1}{2}$, *seine* m*-te* $(C, 2)$*-Summe* $s_m^{(2)}$ *in* $r < \frac{3}{4}$, *seine* m*-te* $(C, 3)$*-Summe* $s_m^{(3)}$ *in* $r < 1$ *positiv ist, wenn die* $m + 1$ *ersten* $(C, 3)$*-Summen* U_μ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ [7,4]) *der* c_μ *nichtnegativ sind* [7,5]). Die letzte Voraussetzung ist ja bei jedem Abschnitte der Reihe (1.1,6) im R_4 erfüllt, wie im Anschluß an (1.2,1) hervorgehoben wurde; die hier mit U_μ bezeichneten Summen sind die $\binom{\mu+3}{3}$ mal genommenen [7,3]) dortigen $C_\mu^{(3)}$.

Der *Beweis* des auf das Polynom $g(r)$ bezüglichen Satzes gliedert sich von selbst in drei Teile; in jedem von ihnen machen wir davon Gebrauch, daß sich die n-te (C, δ)-Summe $s_n^{(\delta)}$ einer Folge von $m + 1$ Zahlen a_μ $(n \leqq m)$ als lineare Verbindung von $a_0, a_1, \ldots, a_n$ darstellen läßt [7,6]),

$$s_n^{(\delta)} = \sum_{\nu}^{0,n} \binom{n+\delta-\nu}{\delta} a_\nu \quad ;$$

sind also a_μ die Glieder $c_\mu r^\mu$ des Polynoms $g(r)$, so gilt

$$s_m^{(\delta)} = \sigma_m = \sum_{\mu}^{0,m} \lambda_\mu c_\mu \tag{7,1}$$

mit den Werten
$$\lambda_\mu = \binom{m+\delta-\mu}{\delta} r^\mu . \tag{7,2}$$

Um die Voraussetzung auszunutzen, wird man in einem — übrigens keineswegs an die Wahl (7,2) der λ_μ gebundenen — Ausdruck der Gestalt (7,1) statt der c_μ durch *vier*malige Abelsche Umformung die U_μ einführen. Dazu gehe man von einer Formel Fejérs [7,7]) aus, in der diese

---

7,3) D. h. die m-te aus der (endlichen) Folge seiner Glieder $c_\mu r^\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ gebildete $(C, 1)$-Summe usw. — Eine — hier bequeme — μ-te (C, δ)*-Summe* unterscheidet sich vom μ-ten (C, δ)*-Mittel* nur um das Malteil $\binom{\mu+\delta}{\delta}$, vgl. *K. Knopp*, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1924, S. 466. — Angemerkt sei, daß der Gebrauch des C-Verfahrens zu besonders kurzer und glatter Rechnung führt.

7,4) Die Zeichen U hier und in Nr. 2 können nicht verwechselt werden.

7,5) Bildet einen Satz Fejérs [a. a. O. 1,1), S. 319, Fußnote 12] weiter, der voraussetzt, daß die $m + 1$ ersten $(C, 1)$-Mittel der c_μ nichtnegativ sind.

7,6) Vgl. *Knopp* [7,3]), S. 466.

7,7) Siehe *Fejér* [1,1]), S. 312, (34). — *Zusatz bei der Druckprobe.* Der folgende Übergang zu der Hilfsformel (7, 4) in wenigen Zeilen bleibe hier stehen, obwohl man das Ergebnis viermaliger Abelscher Umformung in einer andern Arbeit Fejérs [Trans. Amer. math. Soc. 39 (1936), 18—59] findet; siehe dort S. 35, (11).

Umformung *drei*mal vorgenommen ist: bedeutet T_μ die μ-te $(C, 2)$-Summe der c_μ, so ist

$$\sigma_m = \sum_\mu^{0,m} (\lambda_\mu - 3\lambda_{\mu+1} + 3\lambda_{\mu+2} - \lambda_{\mu+3}) T_\mu$$

mit (7,3) $\lambda_\mu = 0$, wenn $\mu > m$.

Nun ist [7, 6])

$$T_\mu = U_\mu - U_{\mu-1} \quad (\mu = 0, \ldots, m; \quad U_{-1} = 0);$$

folglich wird

$$\sigma_m = \sum_\mu^{0,m} (\lambda_\mu - 3\lambda_{\mu+1} + 3\lambda_{\mu+2} - \lambda_{\mu+3}) U_\mu$$
$$- \sum_\mu^{0,m-1} (\lambda_{\mu+1} - 3\lambda_{\mu+2} + 3\lambda_{\mu+3} - \lambda_{\mu+4}) U_\mu$$

oder, wie gewünscht,

$$\sigma_m = \sum_\mu^{0,m} (\lambda_\mu - 4\lambda_{\mu+1} + 6\lambda_{\mu+2} - 4\lambda_{\mu+3} + \lambda_{\mu+4}) U_\mu \tag{7,4}$$

mit den Werten (7,3) — und, wenn es sich um das Polynom $g(r)$ handelt, (7,2) der λ_μ. Dabei würde die Ausartung, daß $U_0, \ldots, U_m$ sämtlich verschwänden, besagen, daß auch $c_0, \ldots, c_m$ alle null wären, $g(r)$ also identisch verschwände. Das tritt aber bei den besonderen $g(r) = s_m(r, \Theta, \varphi)$ niemals ein, da sich dort, wie in Nr. 1.2 vermerkt, mindestens c_0 von 0 unterscheidet.

7.1. Ist *erstens* $\delta = 1$, so hat man nach (7,2), (7,3), (7,4)

$$\sigma_m = s_m^{(1)}$$

$$= \sum_\mu^{0,m-4} [m-\mu+1-4(m-\mu)r+6(m-\mu-1)r^2-4(m-\mu-2)r^3+(m-\mu-3)r^4] r^\mu U_\mu$$
$$+ (4 - 12r + 12r^2 - 4r^3)\, r^{m-3} U_{m-3} + (3 - 8r + 6r^2)\, r^{m-2} U_{m-2}$$
$$+ (2 - 4r)\, r^{m-1} U_{m-1} + r^m U_m,$$

und diesen Ausdruck formt man leicht in

$$s_m^{(1)} = \sum_\mu^{0,m-4} [(m - \mu - 3)(1 - r)^4 + 4(1 - r)^3]\, r^\mu U_\mu + 4(1 - r)^3 r^{m-3} U_{m-3}$$
$$+ \frac{1}{3}\left[18\left(\frac{2}{3} - r\right)^2 + 1\right] r^{m-2} U_{m-2} + 4\left(\frac{1}{2} - r\right) r^{m-1} U_{m-1} + r^m U_m$$

um — eine Gestalt, an der man sogleich erkennt, daß er, wie behauptet, auf der Strecke $r<\frac{1}{2}$ positiv ist. — Die Schranke $r=\frac{1}{2}$ ist scharf, wie das Polynom $g^*(r)=r^{m-1}-4r^m$ lehrt. Es liefert nämlich, wie man leicht nachprüft,

$$T_0=\ldots=T_{m-2}=0\ ,\quad T_{m-1}=1\ ,\quad T_m=-1\ ;$$
$$U_0=\ldots=U_{m-2}=0\ ,\quad U_{m-1}=1\ ,\quad U_m=0\ ,$$

mithin wird $s_m^{(1)}=4(\frac{1}{2}-r)r^{m-1}$ und daher negativ, wenn $r>\frac{1}{2}$.

In den Abschnitten der Reihe (1.1,6) ist, abweichend vom vorigen Beispiel, $c_0>0$. Daß gleichwohl in diesem Sonderfalle $g(r)=s_m(r,\Theta,\varphi)$ die Kugel $r=\frac{1}{2}$ eine scharfe Raumschranke der Aussage über die $s_m^{(1)}(r,\Theta,\varphi)$ ist, zeigt die mit $N=2$ genommene Reihe (1.1,3). Ihre Abschnitte s_0, s_1 und die $(C,1)$-Summen $s_0^{(1)}$, $s_1^{(1)}$ ergeben sich nach Nr. 1.3 zu

$$s_0=1,\ s_1=1+4r\cos\gamma,\quad s_0^{(1)}=s_0=1,\ s_1^{(1)}=s_0+s_1=2+4r\cos\gamma\ ;$$

somit ist $s_1^{(1)}$ an der Stelle $\gamma=\pi$ negativ, wenn $r>\frac{1}{2}$.

7.2. Ist *zweitens* $\delta=2$, so folgt aus (7,2), (7,3), (7,4)

$$\sigma_m=s_m^{(2)}$$

$$=\sum_{\mu}^{0,m-4}\left[\binom{m-\mu+2}{2}-4\binom{m-\mu+1}{2}r+6\binom{m-\mu}{2}r^2-4\binom{m-\mu-1}{2}r^3+\binom{m-\mu-2}{2}r^4\right]r^\mu U_\mu$$
$$+\left[\binom{5}{2}-4\binom{4}{2}r+6\binom{3}{2}r^2-4\binom{2}{2}r^3\right]r^{m-3}U_{m-3}+\left[\binom{4}{2}-4\binom{3}{2}r+6\binom{2}{2}r^2\right]r^{m-2}U_{m-2}$$
$$+\left[\binom{3}{2}-4\binom{2}{2}r\right]r^{m-1}U_{m-1}+r^mU_m\ .$$

Umgeformt in

$$s_m^{(2)}=\sum_{\mu}^{0,m-4}\left[\binom{m-\mu-2}{2}(1-r)^4+4\binom{m-\mu-2}{1}(1-r)^3+6\,(1-r)^2\right]r^\mu U_\mu$$
$$+\left[4\,(1-r)^3+6\,(1-r)^2\right]r^{m-3}U_{m-3}+6(1-r)^2r^{m-2}U_{m-2}+4\left(\frac{3}{4}-r\right)r^{m-1}U_{m-1}+r^mU_m$$

erweist sich $s_m^{(2)}>0$ auf der Strecke $r<\frac{3}{4}$ — und auf keiner längeren; denn dem Polynome $g^*(r)$ der Nr. 7.1 gehört $s_m^{(2)}=4(\frac{3}{4}-r)r^{m-1}$ zu, wird also negativ, wenn $r>\frac{3}{4}$. — Ebenso läßt sich in dem Satze über die

$s_m^{(2)}(r, \Theta, \varphi)$ der Kugelhalbmesser r nicht größer als $\frac{3}{4}$ wählen; denn die Reihe (1.1,3) führt mit $N = 2$ zu

$$s_0^{(2)} = s_0^{(1)} = 1 \ , \qquad s_1^{(2)} = s_0^{(1)} + s_1^{(1)} = 3 + 4r\cos\gamma \ ,$$

und somit ist $s_1^{(2)}$ an der Stelle $\gamma = \pi$ negativ, wenn $r > \frac{3}{4}$.

7.3. Ist *drittens* $\delta = 3$, so liefern (7,2), (7,3), (7,4)

$$\sigma_m = s_m^{(3)}$$

$$= \sum_{\mu}^{0,m-4} \left[\binom{m-\mu+3}{3} - 4\binom{m-\mu+2}{3} r + 6\binom{m-\mu+1}{3} r^2 - 4\binom{m-\mu}{3} r^3 + \binom{m-\mu-1}{3} r^4 \right] r^\mu U_\mu$$

$$+ \left[\binom{6}{3} - 4\binom{5}{3} r + 6\binom{4}{3} r^2 - 4\binom{3}{3} r^3 \right] r^{m-3} U_{m-3} + \left[\binom{5}{3} - 4\binom{4}{3} r + 6\binom{3}{3} r^2 \right] r^{m-2} U_{m-2}$$

$$+ \left[\binom{4}{3} - 4\binom{3}{3} r \right] r^{m-1} U_{m-1} + r^m U_m$$

oder, wie man leicht bestätigt,

$$s_m^{(3)} = \sum_{\mu}^{0,m-4} \left[\binom{m-\mu-1}{3} (1-r)^4 + 4\binom{m-\mu-1}{2} (1-r)^3 + 6\binom{m-\mu-1}{1} (1-r)^2 + 4(1-r) \right] r^\mu U_\mu$$

$$+ 4\left[(1-r)^3 + 3(1-r)^2 + 1 - r\right] r^{m-3} U_{m-3} + 2\left[3(1-r)^2 + 2(1-r)\right] r^{m-2} U_{m-2}$$

$$+ 4(1-r) r^{m-1} U_{m-1} + r^m U_m \ .$$

Hieraus ersieht man, daß in der Tat $s_m^{(3)} > 0$ auf der Strecke $r < 1$.

8. Noch eine im R_{N+2} mögliche Aussage über die Abschnitte s_m der Entwicklung einer in K positiven harmonischen Funktion

Ich werde zeigen, daß $s_m(r, \Theta, \varphi)$ *auf einem Halbmesser von* K *höchstens* $(N+1)$*-mal verschwinden kann* — wie das für $N = 1$ bekannt ist [8,1]. In diesem Sonderfalle folgert es Fejér aus einem von ihm aufgestellten Satze über Polynome m-ten Grades [8,2], der die $m + 1$ ersten $(C, 2)$-Mittel der Vorzahlen eines solchen als nichtnegativ voraussetzt. Auf beliebige N verallgemeinert, lautet dieser Satz, wenn E die Strecke

---

[8,1]) Satz von *Rogosinski* und *Szegö*, Math. Z. 28 (1928), S. 93.

[8,2]) Siehe *Fejér* [1,1]), Satz XVI, S. 326—329.

$r < 1$ bedeutet: *Sind bei dem nicht identisch verschwindenden Polynom* $g(r) = \sum\limits_{\mu}^{0,m} c_\mu r^\mu$ *mit reellen Vorzahlen* c_μ *deren* $m+1$ *erste* $(C, N+1)$-*Mittel nichtnegativ, so kann* $g(r)$ *auf* E *nicht öfter als* $(N+1)$-*mal verschwinden.* Ist dies bewiesen, so folgt daraus sogleich die obige Aussage über die Abschnitte s_m der Reihe (1.1,6), weil die s_m, wie am Schlusse der Nr. 7 betont, nicht identisch verschwinden, und weil die $(C, N+1)$-Mittel (1.2,1) ihrer c_ν nichtnegativ sind.

Ich beweise den Satz über $g(r)$ bei beliebigem N auf demselben Wege wie Fejér für $N = 1$ [8,2]. Man stütze sich wie er auf die Laguerresche Zeichenregel, nach der die Summe einer auf E konvergenten Potenzreihe $\sum\limits_{\mu}^{0,\infty} \gamma_\mu r^\mu$ mit reellen Vorzahlen γ_μ dort nicht öfter verschwinden kann, als es Zeichenwechsel in der unendlichen Folge der γ_μ gibt. Der Voraussetzung zuliebe betrachte man die Reihe

$$\chi(r) = \frac{g(r)}{(1-r)^{N+2}} = \sum_{\mu}^{0,\infty} S_\mu^{(N+1)} r^\mu \,, \tag{8,1}$$

deren Vorzahlen $S_\mu^{(N+1)}$ bekanntlich [8,3] die $(C, N+1)$-Summen der γ_μ sind. Nun ist bei einem *Polynom* $g(r)$ von m-tem Grade $\gamma_{m+k} = 0$, wenn $k = 1, 2, \ldots$, und also

$$S_{m+k}^{(0)} = S_m^{(0)}\,, \quad S_{m+k}^{(1)} = S_m^{(1)} + \sum_{j}^{1,k} S_{m+j}^{(0)} = S_m^{(1)} + \sum_{j}^{1,k} S_m^{(0)} = S_m^{(1)} + k S_m^{(0)}\,,$$

$$S_{m+k}^{(2)} = S_m^{(2)} + \sum_{j}^{1,k} S_{m+j}^{(1)} = S_m^{(2)} + \sum_{j}^{1,k} (S_m^{(1)} + j S_m^{(0)}) = S_m^{(2)} + k S_m^{(1)} + \frac{(k+1)k}{2} S_m^{(0)}\,,$$

allgemein

$$S_{m+k}^{(M)} = \sum_{i}^{0,M} \binom{i+k-1}{i} S_m^{(M-i)} \qquad (M = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{8,2}$$

wie man durch vollständige Induktion in bezug auf M bestätigt: Es wird

$$S_{m+k}^{(M+1)} = S_m^{(M+1)} + \sum_{j}^{1,k} S_{m+j}^{(M)}$$

$$= S_m^{(M+1)} + \sum_{j}^{1,k} \sum_{i}^{0,M} \binom{i+j-1}{i} S_m^{(M-i)} = S_m^{(M+1)} + \sum_{i}^{0,M} S_m^{(M-i)} \sum_{j}^{1,k} \binom{i+j-1}{i}\,. \tag{8,3}$$

[8,3] Vgl. *Knopp* [7,3], S. 467.

Mit leichter vollständiger Induktion in bezug auf k, die unausgeführt bleibe, bewahrheitet sich, daß

$$\sum_{j}^{1,k} \binom{i+j-1}{i} = \binom{i+k}{i+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist. In den Endausdruck von (8,3) eingesetzt, liefert das

$$S_{m+k}^{(M+1)} = S_m^{(M+1)} + \sum_{i}^{0,M} \binom{i+k}{i+1} S_m^{(M-i)} = S_m^{(M+1)} + \sum_{i}^{1,M+1} \binom{i+k-1}{i} S_m^{(M+1-i)}$$

oder

$$S_{m+k}^{(M+1)} = \sum_{i}^{0,M+1} \binom{i+k-1}{i} S_m^{(M+1-i)}, \quad \text{w.z.b.w.}\,.$$

Um auf die Reihe (8, 1) die Laguerresche Zeichenregel anzuwenden, bemerkt man, daß ihre $m+1$ ersten Vorzahlen $S_\mu^{(N+1)}$ ($\mu = 0, 1, \ldots, m$) nach Voraussetzung keinen Zeichenwechsel darbieten; ihre weiteren Vorzahlen $S_{m+k}^{(N+1)}$ ($k = 1, 2, \ldots$) bilden aber nach der Formel (8, 2) [mit $M = N + 1$] eine arithmetische Reihe ($N + 1$)-ter Ordnung, daher weist ihre Folge höchstens $N + 1$ Zeichenwechsel auf. Mithin kann $\chi(r)$ auf E nicht öfter als ($N + 1$)-mal verschwinden; nach (8, 1) gilt dasselbe von $g(r)$.

(Eingegangen den 6. Mai 1947.)