**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Band:** 21 (1948)

**Artikel:** Sopra alcune curve covarianti delle linee piane.

**Autor:** Cattaneo, Nora

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-18597

# Sopra alcune curve covarianti delle linee piane

Di NORA CATTANEO, Lugano

Scopo di questa breve Nota è la definizione e uno studio sommario di alcune curve annesse, come covarianti, ad ogni linea piana algebrica e strettamente collegate con la polarità rispetto ad essa.

La considerazione di una particolarissima di tali curve conduce ad una dimostrazione assai notevole, per la relativa sua estrema semplicità, della formula di *Plücker* sul numero dei flessi; mentre l'applicazione alle quartiche piane ne fornisce varie proprietà interessanti: che dualmente si trasformano in altre per le curve di 4ª classe, e in particolare per le cubiche razionali.

1. — Sia data in un piano una curva $C_n$ generale nel suo ordine $n$ e su di essa un punto variabile $P$. Di $P$ si considerino le polari $r$-esima ed $s$-esima rispetto alla $C_n$, con $r \neq s$. Ci si propone di trovare l'ordine $n'$ del luogo dei loro punti comuni quando $P$ varia su $C_n$.

A tale scopo su di una retta $g$ generica del piano chiamo omologhi due punti $A$ e $A'$ quando appartengono rispettivamente alla polare $r$-esima e alla $s$-esima del punto $P$ suddetto. Per il teorema fondamentale sulle polari[1]) si ha che se la polare $r$-esima di $P$ rispetto alla $C_n$ passa per $A$, la polare $(n-r)$-esima di $A$ passa per $P$. La polare $(n-r)$-esima di $A$, che è di ordine $r$, incontra la $C_n$ in $nr$ punti $P$. Ciascuno di questi ha la polare $s$-esima che interseca $g$ in $n-s$ punti $A'$. Il numero dei punti $A'$ omologhi di $A$ nella corrispondenza $(\alpha, \alpha')$ fra $A$ e $A'$ è perciò:

$$\alpha' = nr(n-s) \; .$$

Con ragionamento analogo si trova:

$$\alpha = ns(n-r) \; .$$

La $g$ interseca la curva cercata in $n'$ punti che sono quelli in cui $A \equiv A'$, ossia sono i punti uniti nella corrispondenza considerata, della quale si

[1]) Per le proprietà delle curve polari, che qui e in seguito occorre di applicare, cfr. ad es.: *F. Enriques* e *O. Chisini*, Teoria geometrica delle equazioni, Vol. II.

hanno ora gli indici. Per il principio di corrispondenza di *Chasles*[2]) risulta quindi:

$$n' = ns(n - r) + nr(n - s) \; .$$

Il punto $P$ assorbe due delle $(n - r)(n - s)$ intersezioni delle polari considerate, essendo queste entrambe tangenti in $P$ alla curva $C_n$ e quindi fra di loro. Il luogo cercato si spezza pertanto nella $C_n$, contata due volte, e in un'altra curva d'ordine $n' - 2n$: come altrimenti risulta dalla circostanza che, in base alla nota regola di *Zeuthen*[3]), si trova essere eguale a 2 la multiplicità di ciascuna delle $n$ intersezioni di $g$ con $C_n$ nel gruppo degli $\alpha + \alpha'$ punti uniti della corrispondenza $(\alpha, \alpha')$.

Concludendo si può enunciare il teorema:

*Se un punto descrive una curva piana $C_n$ generale d'ordine $n$ le sue polari $r$-esima ed $s$-esima (con $r \neq s$) rispetto a $C_n$, tangenti nel punto stesso fra loro e alla $C_n$, si intersecano ulteriormente in un gruppo di:*

$$(n - r)(n - s) - 2$$

*punti il cui luogo è una curva $\Gamma_{r,s}$, covariante della $C_n$, di ordine:*

$$n^2(r + s) - 2n(rs + 1) \; .$$

È ovvio che *la curva $\Gamma_{r,s}$ si può anche definire come il luogo dei punti le cui polari di ordini $r$ ed $s$ ($\neq r$), rispetto alla curva $C_n$, hanno una delle loro $rs$ intersezioni appartenenti a $C_n$.*

2. — Se la $C_n$ ha $\delta$ nodi e $k$ cuspidi il problema trattato nel n. 1 è facilmente risolto nel caso di $s = n - 1$, ossia quando una delle due polari è la tangente in $P$ alla $C_n$.

Conservando le notazioni precedenti si osserva che per ogni punto $A$ si hanno ancora $nr$ punti $P$ e che ogni punto $P$ dà origine ad un unico punto $A'$, come se la $C_n$ fosse una curva generale. Invece il numero dei punti $P$ la cui polare $(n - 1)$-esima passa per $A'$ uguaglia, in questo caso, il numero delle tangenti da $A'$ alla $C_n$ ossia è dato dalla classe della $C_n$. Per la prima formula di *Plücker*[4]) si ha quindi che ogni $A'$ proviene da:

---

[2]) Cfr. *C. Segre,* Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve (Bibliotheca mathematica, 6, 1892).

[3]) *H. G. Zeuthen,* Note sur le principe de correspondance (Bulletin des Sciences math., 5, 1873).

[4]) *J. Plücker,* Theorie der algebraischen Kurven, p. 211.

$$n(n-1) - 2\delta - 3k$$

punti $P$; mentre ad ogni punto $P$ risultano associati $n-r$ punti $A$.

Ragionando ora come nel n. 1 si perviene al teorema:

*Se un punto descrive una curva piana d'ordine $n$ con $\delta$ nodi e $k$ cuspidi la tangente in esso interseca la sua polare $r$-esima (con $r < n-1$) rispetto a $C_n$ ulteriormente in un gruppo di $n-r-2$ punti, il cui luogo è una curva $\Theta_r$ covariante della $C_n$, di ordine:*

$$n(n-2)(n-r+1) - (n-r)(2\delta + 3k) .$$

Se $\delta = k = 0$ la $\Theta_r$ diviene la $\Gamma_{r,n-1}$ del teorema del n. 1.

*Osservazione I.* — È noto che la polare $r$-esima di un punto $P$ rispetto ad una curva $C_n$ è il luogo del gruppo $G'_{n-r}$ polare d'ordine $n-r$ di $P$ rispetto al gruppo $G_n$ delle intersezioni di $C_n$ con una retta $g$ variabile per $P$. Quando $P$ è un punto di $C_n$, e $g$ la relativa tangente, il gruppo $G'_{n-r}$ consta, come si può facilmente verificare, del punto doppio $P$, pure doppio per $G$, e del gruppo polare d'ordine $n-r-2$ dello stesso punto $P$ rispetto al gruppo $G_{n-2}$ delle ulteriori intersezioni della tangente in $P$ con la $C_n$. Quindi:

*La curva $\Theta_r$ è il luogo del gruppo polare $r$-esimo di un punto $P$ variabile sulla curva $C_n$ rispetto al gruppo delle $n-2$ ulteriori intersezioni di $C_n$ con la tangente in $P$.*

*Osservazione II.* — Se $M$ è un punto di $\Theta_r$, per $M$ passano la tangente a $C_n$ in un punto $P$ e la polare $r$-esima di $P$ rispetto a $C_n$. Ne segue che per $P$ passano la prima polare e la polare d'ordine $r$ di $M$. Pertanto:

*La curva $\Theta_r$ è il luogo di un punto variabile in modo che la sua polare d'ordine $r$ rispetto alla curva $C_n$ passa per il punto di contatto di una almeno delle tangenti da esso a $C_n$.*

3. — Riprendendo in considerazione il caso del n. 2, in cui la $C_n$ ha $\delta$ nodi e $k$ cuspidi, ed è $s = n-1$, si supponga in particolare $r = n-2$. Allora l'intersezione della tangente a $C_n$ in un punto generico $P$ con la conica polare di $P$ si riduce al punto $P$ stesso contato due volte. Sembrerebbe pertanto che l'ordine del luogo cercato $\Theta_{n-2}$ dovesse risultare nullo. Si trova invece, applicando il teorema del n. 1, che esso vale:

$$3n(n-2) - 4\delta - 6k .$$

Ciò avviene perchè in certi punti la conica polare si spezza in due rette; tali punti sono:

1) i $\delta$ nodi, in cui l'intersezione cercata è data dalle due tangenti principali: poichè ciascuna di queste fa parte della conica polare di ogni nodo;
2) le $k$ cuspidi, in cui l'intersezione è data dalla tangente cuspidale contata due volte: giacchè a questa stessa retta doppia si riduce la conica polare di ogni cuspide;
3) gli $i$ flessi, in cui l'intersezione è data dalla tangente d'inflessione: che infatti fa parte della conica polare di ogni flesso.

Il luogo cercato è, nel caso in esame, l'insieme di tali tangenti. Il loro numero uguaglia il suo ordine. Quindi deve essere:

$$2\delta + 2k + i = 3n(n-2) - 4\delta - 6k$$

ossia:

$$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k \ .$$

*Resta così stabilita una dimostrazione semplicissima della seconda formula di Plücker*[5]*).*

4. — Giova ora applicare il risultato generale del n. 2 alle quartiche piane. Per una tale $C_4$ ha interesse unicamente la curva covariante $\Theta_1$ ($r = 1$). Tenendo conto dell'osservazione I del n. 2 si può, come corollario (per $n = 4$ ed $r = 1$) del teorema dello stesso n. 2, enunciare:

*Data una quartica $C_4$, con $\delta$ nodi e $k$ cuspidi, il luogo del coniugato armonico di un suo punto variabile $P$ rispetto alle ulteriori intersezioni di essa con la tangente in $P$ è una curva $\Theta_1$ di ordine:*

$$32 - 6\delta - 9k \ .$$

Introducendo della $C_4$ il genere:

$$p = 3 - \delta - k$$

si ha che:

*L'ordine della curva $\Theta_1$, covariante suddetto di una $C_4$ di genere $p$, è:*

$$14 + 6p - 3k \ .$$

[5]) Come è risaputo, le più notorie dimostrazioni della suddetta formula di *Plücker* (a differenza di quelle delle altre) fanno capo alla considerazione dell'Hessiana e del relativo comportamento nei punti doppi della curva $C_n$; oppure al teorema di *Riemann* sull'invarianza del genere per trasformazioni birazionali, applicato alla $C_n$ e al suo inviluppo aderente.

Così per una quartica generale ($p = 3$, $k = 0$) l'ordine di $\Theta_1$ è 32; mentre è 14 per una $C_4$ razionale senza cuspidi; ed è 20 per una $C_4$ ellittica pure senza cuspidi.

La $\Theta_1$ risulta di ordine minimo 5 per le quartiche tricuspidali[6]).

5. — Se $M$ è un punto improprio di $\Theta_1$, deve essere $M$ il coniugato armonico di un punto $P$ di $C_4$ rispetto alle intersezioni ulteriori $A$, $B$ di $C_4$ con la tangente in $P$: in altri termini è $P$ punto medio di $AB$. Quindi, richiamando l'ordine di $\Theta_1$:

*Per ogni quartica piana $C_4$ di genere $p$ con $k$ cuspidi, senza particolari relazioni con la retta impropria, esistono:*

$$14 + 6p - 3k$$

*corde caratterizzate dalla proprietà di essere tangenti a $C_4$ nel rispettivo punto medio.*

Si può ancora osservare che:

*La curva $\Theta_1$ passa per i punti medi delle 4 corde della quartica appartenenti agli asintoti di $C_4$.*

Si riconosce pure facilmente che:

*La curva $\Theta_1$ di ordine 32 covariante* (n. 4) *di una quartica generale, passa semplicemente per i punti di contatto delle 28 tangenti doppie di $C_4$ ed ha con la $C_4$ un incontro tripunto in ciascuno dei 24 flessi della $C_4$ stessa.*

Infatti se $AB$ è una corda di $C_4$ tangente a $C_4$ in $P$, ed è $Q$ il coniugato armonico, sulla curva $\Theta_1$, di $P$ rispetto ai punti $A$ e $B$, quando $Q$ appartiene a $C_4$ non può essere che $Q \equiv P$, oppure $Q \equiv A$ o infine $Q \equiv B$: nel primo caso $P$ è un flesso di $C_4$, mentre negli altri due la retta $AB$ è una bitangente di $C_4$ coi punti di contatto $P$ e $A \equiv B$.

Si conclude che la curva $\Theta_1$ incontra la $C_4$ solo nei flessi e nei punti di contatto delle tangenti doppie. Se allora $\alpha$ e $\beta$ sono le multiplicità d'intersezione di $C_4$ e $\Theta_1$ nei flessi e in tali punti di contatto, dev'essere:

$$24\alpha + 56\beta = 128 .$$

Ne segue $\alpha = 3$ e $\beta = 1$.

---

[6]) Relativamente a tale caso particolare v. *A. Longhi*, Sulle quartiche piane tricuspidali (Giornale di Matematiche, Vol. 63, 1925), § 2.

6. — Dualizzando (ad es. mediante la polarità rispetto ad una conica) i risultati del n. 4 si ottiene il teorema seguente:

*Sia $\Phi$ una curva di $4^a$ classe dotata di $\tau$ tangenti doppie e di $i$ flessi, quindi di ordine:*

$$12 - 2\tau - 3i$$

*e di genere:*

$$p = 3 - \tau - i \ .$$

*Se $m$ è una tangente variabile di $\Phi$, dal suo punto di contatto escono 2 ulteriori tangenti a $\Phi$. Allora la retta coniugata armonica di $m$ rispetto a tali tangenti inviluppa una curva di classe:*

$$32 - 6\tau - 9i \ ,$$

*eguale a:*

$$14 + 6p - 3i \ .$$

Per $i = 3$ e $\tau = 0$ il teorema concerne la cubica razionale generale.

(Reçu le 10 mai 1947.)