

Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper.

Autor(en): **Szele, T.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **22 (1949)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19193>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Eine kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper

Von T. SZELE, Szeged (Ungarn)

Zweck der folgenden Note ist eine wesentliche Verschärfung der beiden bekannten Sätze:

Ist R ein Ring ohne Nullteiler mit Minimalbedingung für Rechts- und Linksideale, so ist R ein Schiefkörper¹⁾.

In einem kommutativen Ring mit Minimalbedingung ist der Restklassenring nach einem Primideal stets ein Körper und daher jedes Primideal teilerlos²⁾.

Nach *E. Artin* kann im ersten Satz die Minimalbedingung für Rechtsideale entbehrt werden³⁾. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man auch anstatt der Minimalbedingung für Linksideale durch bloße Forderung der Existenz eines *minimalen Linksideals* in R auskommt⁴⁾. Es gelten nämlich die Sätze:

Besitzt ein Ring R ohne Nullteiler ein minimales Linksideal, so ist R ein Schiefkörper⁵⁾.

Besitzt ein kommutativer Ring R ein minimales Ideal, so ist der Restklassenring von R nach einem Primideal stets ein Körper und daher jedes Primideal in R teilerlos.

Der zweite Satz ist eine unmittelbare Folge des ersten, denn der Restklassenring nach einem Primideal ist ein Integritätsbereich und hat auch (zugleich mit R) offenbar ein minimales Ideal.

¹⁾ Siehe *B. L. van der Waerden*, *Moderne Algebra II* (1940), S. 141.

²⁾ Ebenda S. 142.

³⁾ Siehe *E. Artin*, *C. J. Nesbitt*, *R. M. Thrall*, *Rings with minimum condition* (University of Michigan Publications in Mathematics Number 1), 1946, S. 59, Theorem 6.10A.

⁴⁾ Unter einem *minimalen* (oder mit anderem Ausdruck: *einfachen*) Linksideal von R versteht man üblicherweise ein solches Linksideal in R , welches $\neq (0)$ ist und kein Linksideal von R außer sich selbst und (0) umfaßt. Im kommutativen Falle sprechen wir von einem *minimalen* Ideal schlechthin.

⁵⁾ Daraus folgt: *Ein Ring ist dann und nur dann ein Schiefkörper, falls er nullteilerfrei ist und ein minimales Linksideal besitzt.* Das ist die im Titel angekündigte „kennzeichnende Eigenschaft der Schiefkörper“.

Der erste Satz läßt sich folgendermaßen beweisen. Sei I ein minimales Linksideal in R und $c \neq 0$ ein Element von I . Dann ist $I \cdot c$ ein Linksideal von R , für welches nach Voraussetzung $I \cdot c \subseteq I$, $I \cdot c \neq (0)$, also $I \cdot c = I$ gilt. Jedes Element von I ist demnach in der Gestalt $x \cdot c$ ($x \in I$) darstellbar, insbesondere auch c selbst: $ec = c$ ($e \in I$, $c \neq 0$). Daraus folgt für das beliebige Element $y \in R$:

$$(ye - y) \cdot c = yec - yc = 0 ,$$

d. h. $ye - y = 0$, da R keinen Nullteiler hat. Folglich ist e ein rechts-Einselement in R . Insbesondere ist $e^2 = e$. Dann gilt aber für das beliebige Element $y \in R$:

$$e(e y - y) = e^2 y - e y = 0 ,$$

d. h. $ey - y = 0$. Somit ist e auch zugleich ein links-Einselement, also Einselement in R .

Es muß noch gezeigt werden, daß irgendein Element $a \neq 0$ von R ein Linksinverses hat. Statt dessen werden wir mehr, nämlich die Lösbarkeit irgendeiner Gleichung $xa = b$ in R beweisen. Es gilt zunächst $I = R$, da wegen $e \in I$: $R = Re \subseteq I$ ist. Folglich hat R nur die beiden (trivialen) Linksideale R und (0) . Die Menge $R \cdot a$ aber ist ein Linksideal in R , d. h. wegen $a \neq 0$ ist $Ra = R$. Daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

(Eingegangen den 20. Januar 1948.)