Die Reihe von Fantappiè und die Stetigkeit der analytischen nicht linearen Funktionale.

Autor(en): **Haefeli, Hans Georg / Pellegrino, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **23 (1949)**

PDF erstellt am: **09.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19757

Die Reihe von Fantappiè und die Stetigkeit der analytischen nicht linearen Funktionale

Von Hans Georg Haefeli, Zürich, und Franco Pellegrino, Rom

Einleitung

a) In einer ersten Arbeit [1]) haben wir eine für die Stetigkeit eines analytischen Funktionals notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt und daraus mit einem „*a priori*" Beweis die Stetigkeit aller linearen analytischen Funktionale von Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen abgeleitet.

In der vorliegenden Arbeit wird die Stetigkeit der Polinomialfunktionale und deren Funktionen bewiesen und im besonderen diejenige aller gebrochenen Funktionale und deren Funktionen. Sodann wird eine für die Stetigkeit hinreichende Bedingung aufgestellt, die es ermöglicht, andere umfangreiche Klassen nicht linearer stetiger analytischer Funktionale zu ermitteln.

Die hier ausgearbeiteten Beweise sind keine „a priori"-Beweise; sie bauen sich vielmehr auf der Fantappièschen Reihenentwicklung eines nicht linearen Funktionals auf. Eben deshalb beginnt die vorliegende Arbeit mit dem Studium dieser Reihe, wo, unter anderem, festgestellt wird, daß die Koeffizienten der einzelnen Reihenglieder durchaus beschränkte und stetige Funktionale sind. Im Verlauf dieses Studiums werden wir Gelegenheit haben, einige Sätze allgemeiner Bedeutung aufzustellen, darunter die Ausdehnung des Liouvilleschen Satzes bezüglich der analytischen Funktionen auf die analytischen Funktionale.

Es wird sodann die beachtenswerte Tatsache gezeigt, daß jedes in einer gewissen Umgebung eines Punktes beschränkte analytische Funktional in diesem Punkte stetig ist, so daß die Beschränktheit eines analytischen Funktionals mit dessen Stetigkeit gleichbedeutend ist. Schließlich wird noch eine Ungleichung für die Ableitung beliebiger Ordnung eines beschränkten analytischen Funktionals aufgestellt.

---

[1]) *H. G. Haefeli* und *F. Pellegrino*, Über die Stetigkeit der analytischen Funktionale, Comm. Math. Helv., Vol. 21, fasc. 3 (1948). — Die Begriffe und Definitionen, auf die in dieser Arbeit hingewiesen wird oder die darin entwickelt werden, setzen wir als bekannt voraus.

b) Wir wollen nun die zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen Definitionen und Begriffe zusammenstellen.

Um zur Fantappièschen Reihenentwicklung zu gelangen, erweist es sich als notwendig, die Definition der Ableitung eines analytischen Funktionals F [2]) in Erinnerung zu bringen.

Es sei $y = y(t, \varepsilon)$ eine analytische Linie, die durch den Punkt $y_0(t) = y(t, 0)$ des Definitionsgebietes G von F und daher auch durch eine in G enthaltene Umgebung (A, σ) des Punktes dringt.

Man hat

$$\Delta y(t) = y(t, \varepsilon) - y(t, 0) = \varepsilon \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} + \cdots$$

und außerdem

$$\Delta F = F[y(t, \varepsilon)] - F[y(t, 0)] = f(\varepsilon) - f(0) = \varepsilon f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

Fantappiè definiert nun als „erste Variation“ δF von F den folgenden Ausdruck:

$$\delta F = \varepsilon f'(0) = \varepsilon \left\{ \frac{dF[y(t, \varepsilon)]}{d\varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0}$$

und beweist, daß δF nur von

$$\delta y = \varepsilon \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon\, \varphi(t)$$

abhängt[3]) und daß

$$\frac{\delta F}{\varepsilon} = V[y_0(t), \varphi(t)] = \left\{ \frac{dF[y_0(t) + \varepsilon\, \varphi(t)]}{d\varepsilon} \right\}_{\varepsilon=0} \tag{1}$$

ein lineares Funktional von $\varphi(t)$ ist[4]).

Für die linearen Funktionale einer analytischen Funktion einer einzigen Veränderlichen gilt die grundlegende Formel

$$L[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\alpha)\, y(\alpha)\, d\alpha \quad ^{5)} \tag{2}$$

wobei $u(\alpha) = L\left[\frac{1}{\alpha - t}\right]$ ist und „Indikatrixfunktion“ oder einfach „Indikatrix“ des linearen Funktionals L genannt wird. Dabei ist zu be-

---

[2]) Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden oft „Funktional“ anstatt „analytisches Funktional“, da in dieser Arbeit nur von diesen die Rede ist.

[3]) *L. Fantappiè*, I funzionali analitici, Mem. Acc. Lincei, s. VI. vol. III, fasc. II, 1930, p. 165.

[4]) *L. Fantappiè*, id., p. 168.

[5]) *L. Fantappiè*, Teoria de los functionales analiticos y sus aplicaciones· Barcelona 1943, p. 48.

merken, daß die analytische Linie $\frac{1}{\alpha - t}$ in jedes lineare Funktionalgebiet (A) dringt und daß die Indikatrixfunktion für $\alpha \subset B$ immer regulär ist. (B ist die Komplementärmenge von A.) Die Kurve C in (2) ist eine beliebige Separatrixkurve, d. h. sie trennt die Singulärpunkte von $u(\alpha)$ und $y(\alpha)$. Diese Kurve existiert wegen der Kompaktheit der komplexen Zahlkugel immer und kann auch aus mehreren, jedoch immer nur endlich vielen, geschlossenen Teilkurven bestehen. Da das in (1) angeführte Funktional V in bezug auf $\varphi(t)$ linear ist, hat es eine von $y(t)$ und von α abhängige Indikatrix. Dieses gemischte Funktional (man nennt es so, weil es von einer Funktion und von einer Zahl abhängt) heißt definitionsgemäß erste Ableitung von F in bezug auf $y_0(t)$ im Punkt α (Index der Ableitung). Wir schreiben somit:

$$F'[y_0(t)\,;\alpha] = V\left[y_0(t), \frac{1}{\alpha - t}\right] = \left\{\frac{\partial F\left[y_0(t) + \dfrac{\varepsilon}{\alpha - t}\right]}{\partial \varepsilon}\right\}_{\varepsilon=0} . \qquad (3)$$

Für die erste Variation δF längs der analytischen Linie $y(t, \varepsilon)$ erhält man

$$\delta F = \varepsilon\, V[y_0(t), \varphi(t)] = \frac{\varepsilon}{2\pi i}\int_C F'[y_0(t)\,;\alpha]\,\varphi(\alpha)\,d\alpha = \varepsilon\, F'[y_0(t)\,;\overset{*}{\alpha}]\,\underset{*}{\varphi(\alpha)} . \qquad (4)$$

Die zuletzt gebrauchte Schreibweise soll oft das mit $\frac{1}{2\pi i}$ multiplizierte Integral des Produkts zweier Funktionen ohne gemeinsame Singularitäten längs einer Separatrixkurve C bezeichnen. Diese Operation nennt man nach Fantappiè „schiefsymmetrisches Funktionalprodukt"[6]) mit dem Hinweis, daß die Separatrixkurve in ihrem Inneren die Singularitäten jener Funktion enthält, die ein hochgestelltes Sternchen trägt.

Entsprechend definiert man nun die zweite Ableitung in bezug auf $y_0(t)$ und in den Punkten α_1, α_2. Somit haben wir:

$$\begin{aligned} F''[y_0(t)\,;\alpha_1, \alpha_2] &= \left\{\frac{\partial F'\left[y_0(t) + \dfrac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - t}\,;\alpha_1\right]}{\partial \varepsilon_2}\right\}_{\varepsilon_2=0} \\ &= \left\{\frac{\partial^2 F\left[y_0(t) + \dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \dfrac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - t}\right]}{\partial \varepsilon_1\, \partial \varepsilon_2}\right\}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} . \end{aligned} \qquad (5)$$

Analog bildet man die höheren Ableitungen.

[6]) Die Operation des schiefsymmetrischen Funktionalprodukts spielt eine grundlegende Rolle in der gesamten Theorie der analytischen Funktionale, da sich viele Eigenschaften der analytischen Funktionen auf solche analytischer Funktionale übertragen, wenn man das gewöhnliche mit dem schiefsymmetrischen Produkt ersetzt.

Im allgemeinen hat man

$$F^{(n)}[y_0(t)\,;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n] =$$

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2\ldots\partial\varepsilon_n} F\left[y_0(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right\}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_n=0}.$$

Diese Ableitungen von F sind bei festgewähltem $y_0(t)$ symmetrische Funktionen ihrer Parameter. Wie bei den analytischen Funktionen ist auch hier eine Menge von Ableitungsregeln hergeleitet worden. Außerdem aber gibt es für jedes analytische Funktional entsprechend der Taylorschen Reihe eine Reihenentwicklung in einer Umgebung $(A,\sigma) \subset G$ eines regulären Punktes.

Man hat

$$F[y(t) + \alpha\,\varphi(t)] = F[y(t)]$$

$$+ \sum_1^{\infty}{}_n \frac{\alpha^n}{n!} F^{(n)}[y(t)\,;\overset{*}{\alpha_1},\overset{*}{\alpha_2},\ldots,\overset{*}{\alpha_n}]\,\varphi(\underset{*}{\alpha_1})\,\varphi(\underset{*}{\alpha_2})\ldots\varphi(\underset{*}{\alpha_n})\,. \qquad (6)$$

Diese Reihe konvergiert absolut für $|\alpha| < \frac{\sigma}{L} > 1$, wo $L = \mathrm{Max}\,|\varphi(t)|$ für t in A ist. Die von Volterra und Fréchet gegebenen Reihenentwicklungen der Funktionale reeller Funktionen sind als Spezialfälle in obiger Entwicklung enthalten[7]. Die Entwicklung (6) gestattet, die Werte eines analytischen Funktionals für alle Funktionen aus einer Umgebung $(A,\sigma) \subset G$ von $y(t)$ zu berechnen, sobald man die Werte des Funktionals und seiner Ableitungen im Punkte $y(t)$ kennt. An Stelle der Glieder der Taylorschen Entwicklung, welche Produkte der Potenzen des Zuwachses mit den entsprechenden Ableitungen sind, treten hier nun analog die Funktionalprodukte der Zuwachsfunktionen mit den entsprechenden Ableitungen auf.

Diese Entwicklung dient zu einer ersten Klassifikation der Funktionale. So nennt man Polinomialfunktionale n-ten Grades diejenigen, deren Entwicklung (6) in der Umgebung einer beliebigen Funktion $y(t)$ aus G aus einer endlichen, nicht $n + 1$ übertreffenden Anzahl von Gliedern besteht, d. h. wenn für $r > n$ alle Ableitungen $F^{(r)}[y(t)\,;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r]$ identisch verschwinden. Ferner nennen wir gebrochen rational jedes Funktional, das man als Quotient zweier Polinomialfunktionale erhält. Schließlich nennen wir ein in einem nicht weiter ausdehnbaren Funktionalgebiet definiertes Funktional F ein „ganzes transzendentes Funk-

[7]) Wie bekannt, treten in der Reihenentwicklung von Volterra Riemannsche Integrale und in derjenigen von Fréchet Stieltjesche Integrale auf. Um die Reihenentwicklung (6), in der auf geschlossene Kurven ausgedehnte komplexe Integrale auftreten, von den genannten Entwicklungen zu unterscheiden, nennen wir sie Fantappièsche Reihe.

tional", wenn es in seinem ganzen Definitionsgebiet durch eine Reihenentwicklung von der Art

$$F[y(t)] = F[0] + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{n!} F^{(n)}[0\,;\overset{*}{\alpha_1},\overset{*}{\alpha_2},\ldots,\overset{*}{\alpha_n}]\, y(\underset{*}{\alpha_1})\, y(\underset{*}{\alpha_2})\ldots y(\underset{*}{\alpha_n}) \qquad (6')$$

dargestellt ist (ohne daß eines der abgeleiteten Funktionale für jede $y(t)$ aus G verschwindet). Die eben geschriebene Reihe hat außerdem immer dann zu konvergieren, wenn die Koeffizienten ihrer Glieder ihre Bedeutung nicht verlieren.

Analog der Definition einer homogenen Funktion nennt man ein Funktional homogen m-ten Grades, wenn

$$F[k\, y(t)] = k^m F[y(t)]\ , \qquad (7)$$

wobei k eine beliebige Konstante ist, die nicht null wird, wenn $m = 0$ und wenn F in der Null nicht definiert ist.

Für die homogenen Funktionale hat man

$$F[y(t)] = \frac{1}{m} F'[y(t)\,;\overset{*}{\alpha_1}]\, y\,(\underset{*}{\alpha_1})\ {}^{8)} \qquad (8)$$

analog dem Eulerschen Lehrsatz über homogene Funktionen[9]).

1. Die Reihe von Fantappiè

Sobald man $y(t)$ fixiert, hängen die Glieder der Entwicklung (6), das erste ausgenommen, von $\varphi(t)$ ab. Sie sind somit Funktionale von $\varphi(t)$ und offenbar analytisch. Wir schreiben

$$G_n^y[\varphi(t)] = F^{(n)}[y(t)\,;\overset{*}{\alpha_1},\overset{*}{\alpha_2},\ldots,\overset{*}{\alpha_n}]\, \varphi(\underset{*}{\alpha_1})\, \varphi(\underset{*}{\alpha_2})\ldots \varphi(\underset{*}{\alpha_n}) \qquad (9)$$

und wenn kein Grund zu Zweideutigkeit vorhanden ist, lassen wir den im ersten Glied vorkommenden Index y einfach weg.

---

[8]) Siehe Fußnote 3, S. 176.

[9]) Wir benützen schließlich die Gelegenheit, um auf eine Arbeit aufmerksam zu machen, die uns seiner Zeit entgangen war, nämlich „Über die Stetigkeit linearer analytischer Funktionale" von *Oswald Teichmüller*, Deutsche Mathematik, I. Heft, 1936. Teichmüller beweist darin die Stetigkeit einer Klasse von linearen Funktionalen, deren Definitionsgebiet aus der Gesamtheit der in einem festen Gebiet definierten analytischen Funktionen besteht.

Es ist aber zu bemerken, daß diese Klasse nicht zu den von Fantappiè definierten Funktionalen gehört, da ihr Definitionsbereich kein Gebiet im Funktionalraum ist. Noch dazu ist kein Punkt dieses Bereichs ein innerer Punkt, da keine Umgebung (A, σ) eines Punktes vollkommen dem Bereich selbst angehört. Außerdem ist der Stetigkeitsbeweis auf den Funktionsfolgen und nicht auf den Umgebungen begründet. — Trotzdem lassen sich die Hauptgedanken des Beweises doch zu einem Stetigkeitsbeweis für analytische Funktionale im Sinn von Fantappiè verwenden, wie H. G. Haefeli an einem erweiterten Beispiel der linearen Quaternionenfunktionale in einer demnächst zu erscheinenden Arbeit zeigen wird.

Im besonderen, für (4) ist

$$G_1^y[\varphi(t)] = V[y(t), \varphi(t)] = \frac{\delta F}{\varepsilon} = F'[y(t)\,;\overset{*}{\alpha_1}]\,\varphi(\underset{*}{\alpha_1}) \,. \tag{9'}$$

Wenn k eine willkürliche Konstante bezeichnet, so hat man offenbar

$$\begin{aligned} G_n[k\,\varphi(t)] &= F^{(n)}[y(t)\,;\overset{*}{\alpha_1}, \overset{*}{\alpha_2}, \ldots, \overset{*}{\alpha_n}]\,k\,\varphi(\underset{*}{\alpha_1})\,k\,\varphi(\underset{*}{\alpha_2})\ldots k\,\varphi(\underset{*}{\alpha_n}) \\ &= k^n F^{(n)}[y(t)\,;\overset{*}{\alpha_1}, \overset{*}{\alpha_2}, \ldots, \overset{*}{\alpha_n}]\,\varphi(\underset{*}{\alpha_1})\,\varphi(\underset{*}{\alpha_2})\ldots\varphi(\underset{*}{\alpha_n}) = k^n G_n^y[\varphi(t)] \end{aligned}$$

oder

$$\boxed{G_n^y[k\,\varphi(t)] = k^n\,G_n^y[\varphi(t)]}\,, \tag{10}$$

d. h.:

$G_n^y[\varphi(t)]$ ist ein homogenes Funktional n-ten Grades von $\varphi(t)$, und offenbar für $\varphi = 0$ definiert.

Dieser Tatsache halber wird die Reihe von Fantappiè auch „*Reihenentwicklung nach homogenen Funktionalen*“ *genannt.*

b) Sodann ergibt sich unmittelbar:

Jedes analytische Funktional läßt eine einzige Reihenentwicklung nach homogenen Funktionalen (das n-te von n-ten Grades) in der Umgebung einer beliebigen Funktion seines Definitionsgebietes zu.

Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur zu beachten, daß die homogenen Funktionale, von denen die Rede ist, nichts anderes sind als die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktion $f(\alpha) = F[y(t) + \alpha\,\varphi(t)]$ und daß diese Reihenentwicklung, wie bekannt, eindeutig ist.

c) Die Analogie zwischen homogenen Funktionalen und homogenen Funktionen kann noch weiter entwickelt werden. Wir beweisen tatsächlich, daß:

Die erste Ableitung eines homogenen Funktionals F m-ten Grades ist ein ebenfalls homogenes Funktional $(m - 1)$-ten Grades.

Definitionsgemäß ist in der Tat

$$F'[y(t)\,;\alpha] = \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F\left[y(t) + \frac{\varepsilon}{\alpha - t}\right]\right\}_{\varepsilon=0}$$

und daher hat man, wenn k eine beliebige Konstante $\neq 0$ ist und man beachtet, daß F homogen ist,

$$F'[k\,y(t)\,;\alpha] = \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F\left[k\,y(t) + \frac{\varepsilon}{\alpha - t}\right]\right\}_{\varepsilon=0} = \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F\left[k\left(y(t) + \frac{\frac{\varepsilon}{k}}{\alpha - t}\right)\right]\right\}_{\varepsilon=0}$$

$$= k^m \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F\left[y(t) + \frac{\frac{\varepsilon}{k}}{\alpha - t}\right]\right\}_{\varepsilon=0} = k^m \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F\left[y(t) + \frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha - t}\right]\right\}_{\varepsilon=0}$$

$$= k^m \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f\left(\alpha, \bar{\varepsilon}(\varepsilon)\right)\right\}_{\varepsilon=0} = k^m \left\{\frac{\partial}{\partial\bar{\varepsilon}} f\left(\alpha, \bar{\varepsilon}(\varepsilon)\right) \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\varepsilon}\right\}_{\varepsilon=0}$$

$$= k^m \left\{\frac{\partial}{\partial\bar{\varepsilon}} F\left[y(t) + \frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha - t}\right] \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\varepsilon}\right\}_{\varepsilon=0} = k^{m-1} \left\{\frac{\partial}{\partial\bar{\varepsilon}} F'\left[y(t) + \frac{\bar{\varepsilon}}{\alpha - t}\right]\right\}_{\bar{\varepsilon}=0}$$

$$= k^{m-1} F'[y(t)\,;\alpha]$$

und schließlich, was bewiesen werden sollte,

$$\boxed{F'[k\,y(t)\,;\alpha] = k^{m-1} F'[y(t)\,;\alpha]}\ . \qquad (11)$$

d) Dieses Ergebnis und (8) benützend, haben wir sodann

$$G_n[\varphi(t)] = \frac{1}{n} G_n'\,[\varphi(t)\,;\overset{*}{\alpha_1}]\,\underset{*}{\varphi(\alpha_1)}$$

$$G_n'[\varphi(t)\,;\alpha_1] = \frac{1}{n-1} G_n''\,[\varphi(t)\,;\alpha_1, \overset{*}{\alpha_2}]\,\underset{*}{\varphi(\alpha_2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_n^{(n-1)}[\varphi(t)\,;\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}] = G_n^{(n)}[\varphi(t)\,;\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \overset{*}{\alpha_n}]\,\underset{*}{\varphi(\alpha_n)}\ .$$

Aus diesen Beziehungen erhalten wir für $r \leq n$

$$\boxed{G_n[\varphi(t)] = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)} G_n^{(r)}\,[\varphi(t)\,;\overset{*}{\alpha_1}, \overset{*}{\alpha_2}, \ldots, \overset{*}{\alpha_r}]\,\underset{*}{\varphi(\alpha_1)}\,\underset{*}{\varphi(\alpha_2)}\ldots\underset{*}{\varphi(\alpha_r)}}\ , \qquad (12)$$

eine Formel, die (8) verallgemeinert, da sie auf jedes homogene Funktional vom Grade n anwendbar ist.

Für $r = n$ wird (12):

$$G_n[\varphi(t)] = \frac{1}{n\,!} G_n^{(n)}\,[\varphi(t)\,;\overset{*}{\alpha_1}, \overset{*}{\alpha_2}, \ldots, \overset{*}{\alpha_n}]\,\underset{*}{\varphi(\alpha_1)}\,\underset{*}{\varphi(\alpha_2)}\ldots\underset{*}{\varphi(\alpha_n)} \qquad (12')$$

Der Vergleich dieser mit (9) läßt vermuten, daß

$$\boxed{G_n^{(n)}[\varphi(t)\,;\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = n\,!\,F^{(n)}[y(t)\,;\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]} \qquad (13)$$

sein kann. *Und so ist es auch wirklich*, da man (13) ohne Schwierigkeit durch n-malige Ableitung von (9) mit den Ableitungsregeln der Funktionale in n verschiedenen Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ erhält.

So haben wir, daß

Die n-te Ableitung von $G_n^y[\varphi(t)]$ ist der mit $n\,!$ multiplizierten n-ten Ableitung von F in $y(t)$ gleich.

Außerdem: da aus (13) ersichtlich ist, daß die n-te Ableitung von $G_n[\varphi(t)]$ von $\varphi(t)$ unabhängig und daher daß $G_n^{(n+1)}[\varphi(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}]$ identisch null ist, so hat man:

Das homogene Funktional $G_n^y[\varphi(t)]$ ist ein Polinomialfunktional n-ten Grades.

e) Dieses letzte Theorem ist übrigens ein Spezialfall des folgenden:

Wenn $F[y(t)]$ ein homogenes Funktional m-ten Grades (nicht identisch null) ist mit m ganz und positiv und wenn es außerdem für die Funktion $y = 0$ definiert ist, so ist es ein Polinomial m-ten Grades.

Definitionsgemäß ist $F[k\, y(t)] = k^m F[y(t)]$, wobei k eine willkürliche, für $m = 0$ nicht verschwindende Konstante bezeichnet. Daraus folgt für $k = 0$

$$F[(0)] = 0 \quad \text{wenn} \quad m \neq 0. \tag{14}$$

Die m-te Ableitung von F ist nun, wie wir bereits gesehen haben, homogen vom Grade $m - m = 0$ und man hat daher, für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} F^{(m)}[k\, y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m] &= k^0 F^{(m)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m] \\ &= F^{(m)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m] \end{aligned} \tag{15}$$

Das erste Glied dieser Beziehung ist eine Funktion von k, die sich als analytisch erweist, da man sie durch Ausübung des analytischen Funktionals $F^{(m)}$ auf die analytische Linie $k\, y(t)$ erhält. Sie ist für $k = 0$ definiert, da ja F und somit $F^{(m)}$ in der Null definiert sind. (15) zeigt jedoch, daß diese Funktion von k für $k \neq 0$ konstant ist und die Tatsache, daß sie analytisch und in der Null definiert ist, bringt es mit sich, daß

$$F^{(m)}[0; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m] = F^{(m)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]\ ,$$

d. h. $F^{(m)}$ ist von $y(t)$ unabhängig. Daher ist $F^{(m+1)}$ identisch null und F erweist sich einstweilen als Polinomial höchstens m-ten Grades.

Da jedoch F homogen und m-ten Grades ist, kann sein Grad nicht kleiner als m sein, da für $\alpha \to \infty$, $F[\alpha\, y(t)] = \alpha^m F[y(t)]$ im allgemeinen unendlich groß m-ten und nicht kleineren Grades wird, wie es für ein Polinomial kleineren Grades als m geschehen würde [10]).

Wir kommen außerdem zur Folgerung:

Wenn ein homogenes Funktional 0*-ten Grades und im Nullpunkt definiert ist, so ist es konstant.*

Es ist dann zu bemerken, daß für ein homogenes Funktional F endlichen Grades, das im Nullpunkt definiert ist, die Beziehung $F[0] = 0$ im allgemeinen nicht geltend ist, wenn $m = 0$ [s. (14)], und daß außerdem, wenn $m \neq 0$, ganz und positiv ist, *im Nullpunkt F samt allen seinen Ableitungen bis zum* $(m-1)$*-ten Grade null sind*, wogegen die m*-te* Ableitung konstant ist (in bezug auf $y(t)$ und nicht auf die α_i), jedoch nicht identisch null.

Daraus leitet man im besonderen ab, daß die Entwicklung

$$G_n[\varphi(t)] = G_n[0] + G'_n[0;\overset{*}{\alpha_1}]\varphi(\underset{*}{\alpha_1}) + \frac{1}{2!}G''_n[0;\overset{*}{\alpha_1},\overset{*}{\alpha_2}]\varphi(\underset{*}{\alpha_1})\varphi(\underset{*}{\alpha_2}) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}G_n^{(n)}[0;\overset{*}{\alpha_1},\overset{*}{\alpha_2},\ldots,\overset{*}{\alpha_n}]\varphi(\underset{*}{\alpha_1})\varphi(\underset{*}{\alpha_2})\ldots\varphi(\underset{*}{\alpha_n})$$

sich nur auf das letzte Glied reduziert und daß dieses mit dem II. Gliede von $(12')$ zusammenfällt.

f) Wir haben bereits gesehen, daß das Funktional $G_n^y[\varphi(t)]$ ein homogenes Polinomial n-ten Grades und im Nullpunkt definiert ist.

Wir nehmen nun an, daß $G_n^y[\varphi(t)]$ in seinem ganzen funktionalen Definitionsgebiet G beschränkt sei, d. h. daß eine positive Zahl M existiere, für die, wie auch immer man $\varphi(t)$ in G wähle,

$$|\,G_n^y[\varphi(t)]\,| < M \tag{16}$$

sei.

Da $G_n[\varphi(t)]$ homogen n-ten Grades ist (n ganz und positiv), so hat man, für einen beliebigen Wert der Konstante k:

$$G_n[k\,\varphi(t)] = k^n G_n[\varphi(t)]\ .$$

---

[10]) Man erinnere sich, daß, wenn ein Polinomialfunktional F in einer Umgebung (A, σ) von $y(t)$ definiert ist, F ebenso in (A) von $y(t)$ erklärt ist. Wenn es daher für ein $y(t)$ definiert ist, hat man für ein beliebiges α:

$$F[\alpha\, y(t)] = F[0] + \sum_1^m {}_r \frac{\alpha^r}{r!} F^{(r)}[0;\overset{*}{\alpha_1},\overset{*}{\alpha_2},\ldots,\overset{*}{\alpha_r}]\, y(\underset{*}{\alpha_1})\, y(\underset{*}{\alpha_2})\ldots y(\underset{*}{\alpha_r})\ .$$

Daraus folgt, wenn man (16) und die willkürliche Wahl von k beachtet:

Jedes $G_n^v[\varphi(t)]$, das in seinem ganzen Existenzgebiet beschränkt ist, verschwindet identisch.

Im besonderen:

Notwendige und hinreichende Bedingung, daß sich ein transzendentes ganzes Funktional F auf ein Polinomial reduziert, ist, daß ein beliebiges seiner $G_n[\varphi(t)]$ in seinem ganzen Definitionsgebiet beschränkt sei.

2. Der Liouvillesche Satz für die analytischen Funktionale

a) Der vorangehende Gedankengang ist wegen der willkürlichen Wahl von k offensichtlich für ein beliebiges homogenes Funktional F des Grades $m \neq 0$, das in der Null definiert ist, anwendbar. Man hat somit:

Jedes im Nullpunkt definierte analytische homogene Funktional des Grades $m \neq 0$, das in seinem ganzen Definitionsgebiet beschränkt ist, ist identisch null.

In bezug auf die homogenen Funktionale des Grades null, die im Nullpunkt definiert sind, haben wir bereits gesehen, daß man nur ihre Konstanz feststellen kann.

b) Diesen gleichen Betrachtungen gehören die folgenden zwei Theoreme an, von denen das in c) angeführte die Erweiterung des bekannten Liouvilleschen Theorems für die analytischen Funktionen auf die analytischen Funktionale darstellt. Wir beweisen vorerst, daß:

Jedes in einem ganzen linearen Funktionalgebiet (A) definierte und beschränkte Funktional in ihm konstant ist.

In der Tat, wenn man eine beliebige Funktion $y_1(t)$ von (A) fixiert, betrachten wir die analytische Linie

$$y_1(t, \alpha) = \alpha\, y_1(t) \,. \tag{17}$$

Da die analytischen Funktionale definitionsgemäß die Analytizität hinsichtlich der Parameter bewahren, ist die Funktion von α

$$f_1(\alpha) = F[\alpha\, y_1(t)]$$

analytisch. Der Voraussetzung nach existiert jedoch eine positive Zahl M derart, daß für jede $y(t)$ des Definitionsgebietes (A) von F

$$|F[y(t)]| < M$$

ist und daher auch

$$|f_1(\alpha)| = |F[\alpha\, y_1(t)]| < M \,.$$

Da nun das Definitionsgebiet von F ein lineares Gebiet ist, gehört ihm $\alpha\, y_1(t)$ für *jeden* Wert von α an. Daraus ergibt sich, daß $f_1(\alpha)$ eine in der ganzen komplexen Ebene beschränkte analytische Funktion und daher, laut des Liouvilleschen Satzes für die analytischen Funktionen konstant ist. F ist also konstant längs der analytischen Linie (17), die die Verbindungsgerade der Funktionen $y = 0$ und $y = y_1(t)$ im Funktionalraum ist. Daher ist

$$F[0] = F[y_1(t)] \ .$$

Wenn man nun eine beliebige andere Funktion $y_2(t) \subset A$ betrachtet, ergibt sich mit einer analogen Beweisführung, daß

$$F[0] = F[y_2(t)]$$

ist und daß daher, auf Grund der willkürlichen Wahl der Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$, F in seinem ganzen Definitionsgebiet (A) konstant ist, w. z. b. w.

c) Man beachte nun, daß die in b) betrachteten Funktionale, d. h. solche, die in einem ganzen Funktionalgebiet (A) definiert sind, ganze transzendente Funktionale sind, im Sinne der Definition auf die in der Einleitung hingewiesen wurde, da ja die Reihe von Fantappiè in einer beliebigen Umgebung $(A\,,\,\sigma)$ des Nullpunktes (σ beliebig groß) und daher in jeder Funktion des Definitionsgebietes konvergiert

Das soeben bewiesene Theorem läßt sich nun auf alle ganzen transzendenten Funktionale erweitern.

Zu diesem Zweck beachten wir, daß die vorhergehende Beweisführung auf der Tatsache beruht, daß jede durch Ausübung des Funktionals auf jede analytische Linie der Form $\alpha\, y(t)$ erhaltene Funktion $f(\alpha)$ konstant ist. Die Konstanz von $f(\alpha)$ leitet sich daraus ab, daß es einen Sinn hatte, F auf $\alpha\, y(t)$ (α beliebig und endlich) auszuüben, da doch F in einem linearen Funktionalgebiet (A) definiert ist. Im Falle der ganzen transzendenten Funktionale ist es ihre eigene Definition, die uns bestätigt, daß das in $y(t)$ definierte Funktional für alle Funktionen $\alpha\ \ y(t)$, mit α beliebig und endlich, definiert ist, da für diese die Funktionalprodukte der Entwicklung (6) offenbar immer Bedeutung haben. Daher muß die Reihe (6$'$) definitionsgemäß konvergieren. Der in b) gegebene Beweis ist also vollkommen auf die ganzen transzendenten Funktionale anwendbar und daher können wir schließen:

Jedes in seinem Existenzgebiet beschränkte ganze transzendente analytische Funktional reduziert sich auf eine Konstante.

Dieses Theorem stellt, wie gesagt, die Ausdehnung des Liouvilleschen Satzes für analytische Funktionen auf die analytischen Funktionale dar.

3. Stetigkeit der Polinomialfunktionale

a) Betrachten wir das durch (9) definierte Funktional; d. h. wenn wir (9) entwickelt darstellen

$$G_n^y[\varphi(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} d\alpha_1 \int_{C_2} d\alpha_2 \ldots \int_{C_n} d\alpha_n F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]\, \varphi(\alpha_1)\, \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_n) \,. \tag{9}$$

Wenn G das Definitionsgebiet von F ist, dem die Funktion $y(t)$ samt ihrer Umgebung (A, σ) angehört, so ist $G_n^y[\varphi(t)]$ in der Umgebung (A) der Null definiert. Wir betrachten nun einen Bereich (Gebiet + Grenzpunkte) $\bar{A}$, der im Definitionsgebiet von $y(t)$ enthalten ist und der seinerseits im Inneren die Punkte der Menge A enthält: z. B. den Bereich, der aus einer endlichen Anzahl, in ihrer Gesamtheit A völlig überdeckenden Kreisflächen gebildet ist (was auf Grund des Theorems von Pincherle-Borel-Lebesgue immer möglich ist). Wir bezeichnen ferner mit C die Grenze des Bereichs, die wir immer aus einer geschlossenen regulären Kurve endlicher Länge bestehend voraussetzen können. Diese Kurve ist im vorigen Beispiel aus einer endlichen Zahl von Kreisbögen gebildet, die ganz im Endlichen verlaufen.

Die Umgebung $(\bar{A}, \sigma)$ von $y(t)$ liegt sicherlich in G, da sie in der Umgebung (A, σ) von $y(t)$ enthalten ist. Daraus folgt, daß das Funktional (9) sicherlich für jede Funktion $\varphi(t)$ definiert ist, die der Umgebung $(\bar{A})$ des Nullpunktes angehört. Wenn $\varphi(t) \subset (\bar{A})$, wird sie ihre Singulärpunkte außerhalb von $\bar{A}$ haben, da sie in diesem Bereich regulär ist. Die Funktion der α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$: $F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ ist hingegen nur dann singulär, wenn wenigstens eine der α_k in A ist; genauer gesagt, laut eines Satzes von Fantappiè über die Singularitäten der durch ein schiefsymmetrisches Funktionalprodukt transformierten Funktion, ist auch die Funktion der α_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$:

$$F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\, \overset{*}{\alpha}_{r+1} \ldots \overset{*}{\alpha}_n]\, \varphi(\underset{*}{\alpha}_{r+1}) \ldots \varphi(\underset{*}{\alpha}_n)$$

nur dann singulär, wenn wenigstens ein α_k in A ist. Daraus folgt, daß man die Grenze C von $\bar{A}$ als Separatrixkurve C_r eines beliebigen schiefsymmetrischen Produktes, das in (9) vorkommt, für jede $\varphi(t) \subset (\bar{A}, \sigma)$ der Null wählen kann.

Es ist dann

$$\left| G_n^y[\varphi(t)] \right| < \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^n \left| \int_C d\alpha_1 \int_C d\alpha_2 \ldots \int_C d\alpha_n \left| F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \right| \right|$$

$$= \sigma^n M_n \leq \left(\frac{\sigma l}{2\pi}\right)^n N_n \ ,$$

wo wir

$$M_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_C d\alpha_1 \int_C d\alpha_2 \ldots \int_C d\alpha_n \left| F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \right| \right|$$

$$N_n = \text{Max} \left| F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \right| \qquad \text{für die } \alpha_k \text{ auf } C$$

gesetzt haben und wo wir mit l die als endlich vorausgesetzte Länge der geschlossenen Kurve C bezeichnet haben.

So haben wir schließlich

$$\boxed{\left| G_n^y[\varphi(t)] \right| < \sigma^n M_n \leq \left(\frac{\sigma l}{2\pi}\right)^n N_n} \tag{18}$$

mit M_n und N_n unabhängig von $\varphi(t)$.

Dieses Ergebnis können wir kurz fassen, indem wir sagen, daß die $G_n^y[\varphi(t)]$ beschränkt sind oder, genauer:

Wenn man in beliebiger Weise eine Funktion $y(t)$ und eine ihrer Umgebungen (A, σ) fixiert, beide dem Definitionsgebiet G eines analytischen Funktionals F angehörig, so ist für einen beliebigen Wert von n das durch (9) *definierte Funktional in der Umgebung $(\bar{A}, \sigma)$ des Nullpunktes beschränkt. Hierbei ist $\bar{A}$ ein beliebiger Bereich des Definitionsgebietes von $y(t)$, dessen Grenze regulär und von endlicher Länge ist und der die Punkte der Menge A als innere Punkte enthält.*

b) Wir nehmen nun an, daß F ein in einem Funktionsgebiet G definiertes analytisches Polinomialfunktional n-ten Grades sei und daß diesem Gebiet $y(t)$ samt einer Umgebung (A, σ) angehöre. Wenn man nun eine wie oben definierte Menge $\bar{A}$ nimmt, so wird, auf Grund von (18), für eine beliebige Funktion $\varphi(t)$ von $(\bar{A}, \sigma)$ des Nullpunktes

$$\left| F[y(t) + \alpha\, \varphi(t)] - F[y(t)] \right| = \left| \sum_1^n {}_k \frac{\alpha^k}{k!} G_k^y[\varphi(t)] \right| \leq \sum_1^n {}_k \frac{|\alpha|^k}{k!} \left| G_k^y[\varphi(t)] \right|$$

$$< \sum_1^n {}_k \frac{|\alpha|^k}{k!} \sigma^k M_k \leq \bar{M} \sum_1^n {}_k \frac{|\alpha|^k}{k!} \sigma^k$$

oder

$$\left| F[y(t) + \alpha\, \varphi(t)] - F[y(t)] \right| < \bar{M} \sum_1^n {}_k \frac{|\alpha|^k \sigma^k}{k!} \ , \tag{19}$$

wobei $\bar{M}$ der größte Wert der M_k ist.

Wir betrachten nun die Umgebung $\left(\bar{A}, \frac{\sigma}{2}\right)$ der Null und es sei $\varphi^*(t)$ die allgemeinste Funktion ihrer Grenze[11]) und daher

$\text{Max} \mid \varphi^*(t) \mid = \frac{\sigma}{2}$ für t in $\bar{A}$.

Aus (19) wird alsdann

$$| F[y(t) + \alpha \varphi^*(t)] - F[y(t)] | \leq \bar{M} \sum_1^n {}_k \frac{|\alpha|^k \sigma^k}{2^k k!} .$$

Das zweite Glied reduziert sich für $|\alpha| = \delta$ auf die Funktion der positiven Veränderlichen δ

$$\bar{M}\left[\frac{\delta\sigma}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta\sigma}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\delta\sigma}{2}\right)^n\right],$$

die eine stetige, für $\delta \to 0$ gegen Null konvergierende Funktion ist.

Wenn man nun eine beliebige positive Zahl ε wählt, existiert dementsprechend eine positive Zahl $\bar{\delta}$ derart, daß für $\delta < \bar{\delta}$

$$\bar{M} \sum_1^n {}_k \frac{1}{k!}\left(\frac{\delta\sigma}{2}\right)^k < \varepsilon$$

ist und daher für jedes $|\alpha| = \delta < \bar{\delta}$

$$| F[y(t) + \alpha \varphi^*(t)] - F[y(t)] | < \varepsilon .$$

Für die untere Grenze δ^*, die in der genannten Arbeit [12]) betrachtet wurde, hat man sodann

$$\delta^* \geq \bar{\delta} > 0 ,$$

d. h. es wird die für die Stetigkeit in $y(t)$ schon bewiesene hinreichende Bedingung[12]) verifiziert und daher ist das Polinomialfunktional F in $y(t)$ stetig.

Wir schließen daraus:

Jedes analytische Polinomialfunktional ist in jedem Punkt seines Definitionsgebiets stetig.

Daraus folgt, daß im besonderen die Funktionale $G_n^y[\varphi(t)]$ stetig sind, da sie, wie wir gesehen haben, Polinomialfunktionale sind. Daher:

Der Koeffizient des allgemeinen n-ten Gliedes der Fantappièschen Reihe ist ein Polinomial n-ten Grades homogen n-ten Grades, und ist in einer günstigen, nicht linearen Umgebung (die gewiß existiert) beschränkt und stetig.

---

[11]) Vgl. die in Fußnote 1 zitierte Arbeit.

[12]) Vgl. die in Fußnote 1 zitierte Arbeit.

4. Stetigkeit der Funktionale, die Funktionen eines oder mehrerer Polinomialfunktionale sind

Die eben bewiesene Stetigkeit der Polinomialfunktionale ermöglicht es, die Stetigkeit weiter Klassen analytischer Funktionale festzustellen. Es sei $H\ [y(t)]$ ein analytisches Funktional, das man durch Berechnung einer analytischen Funktion $f(\tau)$ im Punkt τ erhält, wo τ durch ein analytisches Polinomialfunktional F der Funktion $y(t)$ bestimmt ist. Es sei also

$$H[y(t)] = f(F[y(t)]) \ , \tag{20}$$

was zur Folge hat, daß F in einem das Funktionalgebiet G (wo H definiert ist) enthaltenden Gebiet G_1 definiert ist und daß das Definitionsgebiet M von $f(\tau)$ die Menge der vom Funktional F beim Variieren von $y(t)$ im Teilgebiet G von G_1 angenommenen Werte enthält.

Die Stetigkeit von H kann sodann mühelos nachgewiesen werden, wenn man sich auf die schon bewiesene Stetigkeit von F und diejenige der analytischen Funktionen beruft.

In der Tat, sobald man eine beliebige Funktion $y_0(t)$ in G fixiert und $\tau_0 = F[y_0(t)]$ setzt, so ist τ_0 in M und $f(\tau)$ regulär in der Umgebung von τ_0. Wie auch immer man ein positives ε wähle, wird es möglich sein, ein entsprechendes $\bar{\varepsilon}$ zu finden derart, daß für

$$|\,\tau - \tau_0\,| < \bar{\varepsilon},\ |\,f(\tau) - f(\tau_0)\,| < \varepsilon$$

ist.

Da F in $y_0(t)$ stetig ist, existiert dem positiven $\bar{\varepsilon}$ entsprechend in G eine Umgebung (A^*, σ) von $y_0(t)$ derart, daß für jede in (A^*, σ) von $y_0(t)$ enthaltene $y(t)$

$$|\,F[y(t)] - F[y_0(t)]\,| < \bar{\varepsilon}$$

ist. Sodann ist aber auch für jede $y(t)$ von (A^*, σ) von y_0

$$|\,H[y(t)] - H[y_0(t)]\,| < \varepsilon$$

und somit ist die behauptete Stetigkeit bewiesen.

Vollkommen analog gestaltet sich der Beweis der Stetigkeit eines beliebigen Funktionals

$$H[y(t)] = f(F_1[y(t)], F_2[y(t)], \ldots, F_n[y(t)]) \ , \tag{21}$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_n$ Polinomialfunktionale seien. Wir ziehen den Schluß:

Jedes Funktional $H\,[y(t)]$, *das durch Ausübung einer analytischen Funktion* $f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ *in den Werten* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *erhalten wird, die ihrer-*

seits aus analytischen Polinomialfunktionalen entstehen, ist in jedem Punkt des Definitionsgebiets stetig.

Im besonderen folgt daraus, daß alle analytischen gebrochenen Funktionale und deren Funktionen stetig sind.

5. Stetigkeit analytischer Funktionale, deren Fantappièsche Reihenentwicklung total konvergiert

a) Es sei $\{H_n[\varphi(t)]\}$ eine Folge analytischer Funktionale. Wir nehmen an, daß den einzelnen Definitionsgebieten G_n ihrer Glieder ein gewisses nicht leeres Funktionalgebiet Ω gemeinsamen sei.

Wir setzen weiter voraus, daß die obere Grenze H_n^* von $|H_n[\varphi(t)]|$ in Ω endlich sei, d. h. daß für jedes n und jede $\varphi(t)$ in Ω

$$|H_n[\varphi(t)]| \leq H_n^*$$

sei.

Wir sagen nun, die Reihe ist in Ω total konvergent, wenn die Reihe $\sum\limits_1^\infty H_n^*$ *konvergiert.*

b) Wie in der Funktionentheorie gilt sodann das leicht beweisbare Theorem :

Wenn die Reihe $\sum\limits_1^\infty{}_n C_n$ *mit positiven Gliedern konvergiert und für jede* $\varphi(t)$ *von Ω und jedes n* $|H_n[\varphi(t)]| \leq C_n$ *ist, so ist die Reihe* $\sum\limits_1^\infty{}_n H_n[\varphi(t)]$ *in Ω total konvergent.*

c) Es sei nun F ein analytisches Funktional und $y(t)$ eine Funktion, die samt einer ihrer Umgebungen (A, σ) dem Definitionsgebiet G von F angehört; es sei ferner $\varphi^*(t)$ die allgemeine Funktion der Grenze der Umgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ der Null. F ist sodann für $y(t) + \varphi^*(t)$ definiert und man hat

$$F[y(t) + \varphi^*(t)] = F[y(t)] + \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n!} G_n^y[\varphi^*(t)] \ . \tag{22}$$

Nun wollen wir beweisen, daß :

Jedes analytische Funktional F in $y(t)$ stetig ist, dessen Fantappièsche Reihenentwicklung in der Umgebung von $y(t)$ total auf der Grenze einer Umgebung der Null konvergiert.

In der Tat, betrachten wir die Reihe

$$F[y(t) + \alpha\,\varphi^*(t)] = F[y(t)] + \sum_1^\infty{}_n \frac{\alpha^n}{n!} G_n^y[\varphi^*(t)] \ , \tag{22'}$$

die sicherlich für $|\alpha|<2$ konvergiert, wenn nur $y(t)$ samt einer Umgebung (A, σ) dem Gebiet G angehört.

Man hat

$$|F[y(t)+\alpha\varphi^*(t)]-F[y(t)]| = \left|\sum_1^\infty{}_n \frac{\alpha^n}{n!} G_n^y[\varphi^*(t)]\right| \leq \sum_1^\infty{}_n \frac{|\alpha|^n}{n!} |G_n^y[\varphi^*(t)]| \, ,$$

wobei die letzte Reihe noch immer für $|\alpha|<2$ konvergiert, da es sich ja um eine Potenzreihe und daher eine im Inneren ihres Konvergenzkreises absolut konvergente Reihe handelt.

Wir nehmen nun an, daß die Fantappièsche Reihe (22) total auf der Grenze Ω^* der Nullumgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ konvergiere; d. h. daß die Reihe

$$\sum_1^\infty{}_n M_n^* = \sum_1^\infty{}_n \frac{G_n^*}{n!} \tag{23}$$

konvergiere, wo G_n^* die obere Grenze von $|G_n^y[\varphi^*(t)]|$ in Ω^* und daher M_n^* die obere Grenze von $\frac{|G_n^y[\varphi^*(t)]|}{n!}$ für $\varphi^*(t)$ in Ω^* bezeichnet.

Angenommen, daß (23) konvergiere, wird für $|\alpha|<1$ die Reihe

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{|\alpha|^n}{n!} G_n^*$$

sicherlich ebenfalls konvergieren und daher haben wir einstweilen, auf Grund des in b) aufgestellten Theorems:

Wenn die Fantappièsche Reihe auf der Grenze Ω^* von $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ der Null total konvergiert, konvergiert sie total auch in der ganzen Umgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ von der Null.

Außerdem ist

$$|F[y(t)+\alpha\,\varphi^*(t)]-F[y(t)]| \leq \sum_1^\infty{}_n \frac{|\alpha|^n}{n!} G_n^* \, .$$

Wenn wir nun mit M^* das größte Glied der Reihe (23) bezeichnen (das gewiß existiert), so haben wir immer für $|\alpha|<1$

$$|F[y(t)+\alpha\,\varphi^*(t)]-F[y(t)]| \leq M^* \sum_1^\infty{}_n |\alpha|^n = M^* \frac{|\alpha|}{1-|\alpha|} \, .$$

Fixiert man nun beliebig ein positives ε, so hat man

$$\frac{|\alpha|}{1-|\alpha|} M^* < \varepsilon$$

für jedes α für das

$$|\alpha| < \bar{\delta} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + M^*} \, .$$

Es ist dann $\delta^* \geq \bar{\delta} > 0$, und man kann somit den Schluß ziehen, daß F in $y(t)$ stetig ist und daß eine Umgebung von $y(t)$, in der die Stetigkeitsbedingung

$$|F[\bar{y}(t)] - F[y(t)]| < \varepsilon$$

entsprechend einem beliebig gewählten ε erfüllt ist, durch

$$\left(A, \frac{\sigma}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + M^*}\right) \quad \text{von} \quad y(t)$$

dargestellt wird.

6. Stetigkeit der beschränkten analytischen Funktionale

Wenn ein Funktional F in $y_0(t)$ stetig ist, folgt, daß für ein beliebiges positives ε eine entsprechende in G enthaltene Umgebung (A, σ) von $y_0(t)$ existiert, derart, daß für jedes $y(t)$ dieser Umgebung

$$|F[y(t)] - F[y_0(t)]| < \varepsilon$$

ist. Daraus ergibt sich, daß in einer *solchen Umgebung das Funktional beschränkt ist.*

Hier wollen wir beweisen, daß umgekehrt ein analytisches, in einer Umgebung (A, σ) einer Funktion $y_0(t)$ beschränktes Funktional in $y_0(t)$ stetig ist.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß eine positive Zahl M existiere, so, daß für jedes $y(t)$ aus (A, σ)

$$|F[y(t)]| < M$$

sei. Nun entwickeln wir F in der gleichen Umgebung von y_0 und $\varphi^*(t)$ sei eine beliebige Funktion der Grenze der Umgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ von der Null.

Man hat

$$f(\alpha) = F[y_0(t) + \alpha\,\varphi^*(t)] = f(0) + \alpha\, f'(0) + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots$$

$$= F[y_0(t)] + \sum_1^\infty {}_n \frac{\alpha^n}{n!} G_n^{y_0}[\varphi^*(t)] \;,$$

und diese Entwicklung konvergiert sicher für $|\alpha| < 2$; man hat sogar

$$|f(\alpha)| = |F[y_0(t) + \alpha\,\varphi^*(t)]| < M \;.$$

Es ist

$$\frac{1}{n!} G_n^{y_0}[\varphi^*(t)] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\alpha)}{\alpha^{n+1}}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F[y_0(t) + \alpha\,\varphi^*(t)]}{\alpha^{n+1}}\, d\alpha \;,$$

wobei C einen Kreis bezeichnet, der den Mittelpunkt im Ursprung und den Radius beliebig, jedoch < 2, hat.

Daraus folgt sofort

$$\frac{1}{n\,!}\,|\,G_n^{y_0}[\varphi^*(t)]\,| < \frac{M}{r^n} \tag{24}$$

und, setzt man $r = 1$

$$\frac{1}{n\,!}\,|\,G_n^{y_0}[\varphi^*(t)]\,| < M \;.$$

Dann ist aber für $|\,\alpha\,| < 1$

$$|\,F[y_0(t) + \alpha\,\varphi^*(t)] - F[y_0(t)]\,| \leq \sum_1^\infty{}_n \frac{|\,\alpha\,|^n}{n\,!}\,|\,G_n^{y_0}[\varphi^*(t)]\,|$$
$$\leq \sum_1^\infty{}_n M\,|\,\alpha\,|^n = M\,\frac{|\,\alpha\,|}{1 - |\,\alpha\,|} \;.$$

Dann bringt der gleiche Gedankengang wie in Nr. 5 zum gewollten Ergebnis, und zwar

Jedes in einer Umgebung eines Punktes $y_0(t)$ *beschränkte Funktional ist in ihr stetig.*

Zum gleichen Ergebnis wäre man sofort nach Aufstellung der Beschränkung (24) gelangt, wenn man beachtet hätte, daß sie in unserem Fall die totale Konvergenz der Fantappièschen Reihe auf der Grenze der Null-Umgebung $\left(A, \frac{\sigma}{2}\right)$ bestätigt.

7. Beschränktheit des allgemeinen abgeleiteten Funktionals eines beschränkten Funktionals

Es sei F ein in G definiertes und beschränktes Funktional; es existiere somit ein M derart, daß für eine beliebige Funktion $y(t)$ aus G

$$|\,F[y(t)]\,| < M \tag{25}$$

sei.

Wir setzen

$$F\left[y(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right] = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots .\, \varepsilon_n) \;. \tag{26}$$

Wenn $y(t)$ samt einer Umgebung (A, σ) dem Gebiet G angehört, so liegt

$$y(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t} \tag{27}$$

noch in G, wenn

$$\left|\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1-t}+\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2-t}+\cdots+\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n-t}\right| \leq \left|\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1-t}\right|+\left|\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2-t}\right|+\cdots\left|\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n-t}\right|<\sigma \tag{28}$$

ist, gemeinsam mit der Bedingung, daß die α_k $(k=1,2,\ldots,n)$ außerhalb von A variieren.

Betrachten wir nun die Punktmenge $\bar{A}$, wobei $\bar{A}$ wie in Nr. 3 definiert ist, und sei ϱ der Abstand zwischen der Grenze C von $\bar{A}$ und A. Damit die Funktion (27) in $(\bar{A},\sigma)$ von $y(t)$ liege, ist es hinreichend, daß

$$\frac{n\,|\,\varepsilon_k\,|}{\varrho}<\sigma \qquad \text{oder} \qquad |\,\varepsilon_k\,|<\frac{\varrho\,\sigma}{n}$$

sei, wenn die α_k $(k=1,2,\ldots,n)$ außerhalb von $\bar{A}$ variieren.

Definitionsgemäß ist

$$F^{(n)}[y(t)\,;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]=\left\{\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1\,\partial\varepsilon_2\ldots\partial\varepsilon_n}f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\right\}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots\varepsilon_n=0},$$

und daher

$$F^{(n)}[y(t)\,;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_C d\varepsilon_1\int\limits_C d\varepsilon_2\ldots\int\limits_C d\varepsilon_n\,\frac{F\left[y(t)+\dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_1-t}+\cdots+\dfrac{\varepsilon_n}{\alpha_n-t}\right]}{\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2\ldots\varepsilon_n^2},$$

wobei die Integrale auf einen Kreis erstreckt sind, der den Mittelpunkt im Ursprung und Radius

$$r=\frac{\varrho'\,\sigma}{n} \qquad \text{mit} \qquad \varrho'<\varrho$$

hat.

So hat man dann, wenn man sich (25) vergegenwärtigt, für ein beliebiges $\varrho'<\varrho$

$$|\,F^{(n)}[y(t)\,;\alpha_1\,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]\,|<\frac{M}{r^n}=\frac{n^n\,M}{(\varrho'\,\sigma)^n}\,. \tag{29}$$

Es ist jedoch

$$\frac{n^n\,M}{(\varrho\,\sigma)^n}<\frac{n^n\,M}{(\varrho'\,\sigma)^n}$$

einerseits, andererseits kann nicht

$$|\,F^{(n)}[y(t)\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_n]\,|>\frac{n^n\,M}{(\varrho\,\sigma)^n}$$

sein, da dann ein ϱ' existieren würde, für das (29) ungültig wäre.

Man schließt daher, daß unter der Voraussetzung (25) für alle $y(t)$ aus G die Ungleichung

$$| F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] | \leq \frac{n^n M}{(\varrho \sigma)^n} \tag{30}$$

gilt, wenn die α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ außerhalb eines jeweils zu konstruierenden $\bar{A}$ variieren.

Wenn man nun der Voraussetzung (25) diejenige zufügt, daß F in einem linearen Gebiet (A) definiert ist, so sagt uns (30), da diese Ungleichung für ein beliebig großes σ gilt, daß alle Ableitungen identisch null sind und daher F konstant ist. Man ermittelt somit neuerdings das schon in Nr. 2b) aufgestellte Theorem.

(Eingegangen den 31. Juli 1948.)