Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung

Von László Fejes Tóth, Budapest

Es bezeichne $a(r)$ die Maximalzahl der Kreise vom Halbmesser r, die in ein vorgegebenes konvexes Gebiet T (ohne einander zu überdecken) eingelagert werden können, $A(r)$ die Mindestzahl der Kreise vom Halbmesser r, die T überdecken. Bekanntlich gelten für die Lagerungsdichte[1]) $d(r) = \pi r^2 a(r)/T$ bzw. Überdeckungsdichte $D(r) = \pi r^2 A(r)/T$ die Relationen[2])

$$\lim_{r\to 0} d(r) = \sqrt{3}\,\pi/6 = 0{\cdot}906\ldots \qquad (1)$$

$$\lim_{r\to 0} D(r) = 2\sqrt{3}\,\pi/9 = 1{\cdot}209\ldots\,. \qquad (2)$$

Die Gleichheit (1) wurde im Jahre 1892 von *A. Thue*, die Gleichheit (2) im Jahre 1939 von *R. Kershner* bewiesen. Neulich wurden durch mehrere Autoren verschiedenartige Vereinfachungen der Beweise sowie mannigfaltige Verschärfungen und Verallgemeinerungen erzielt.

Wir beweisen hier folgende zwei einander dual gegenüberstehende Sätze:

Sind in einem konvexen Gebiet T wenigstens zwei kongruente Kreise eingelagert, so ist ihre Inhaltssumme

$$s < \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\,T\,. \qquad (1\text{a})$$

Wird ein konvexes Gebiet T von wenigstens zwei kongruenten Kreisen bedeckt, so ist ihre Inhaltssumme

$$S > \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}\,T\,. \qquad (2\text{a})$$

---

[1]) Im folgenden bezeichnen wir ein Gebiet und seinen Flächeninhalt mit demselben Symbol. Sind u und v zwei Gebiete, so soll uv als Größe den Flächeninhalt des Durchschnittes uv bedeuten.

[2]) Die Gleichheiten (1) und (2) gelten natürlich unter viel allgemeineren Voraussetzungen bezüglich des Gebietes T. Siehe z. B. das in unserem Schriftenverzeichnis zitierte Übersichtsreferat: *H. Hadwiger* [3]. — Es sei hier noch bemerkt, daß sowohl bei der dichtesten ebenen Kreislagerung als auch bei der dünnsten Bedeckung der Ebene durch Kreise die Kreismittelpunkte ein gleichseitiges Dreiecksgitter bilden, dieweil die räumlichen Analoga der beiden entsprechenden Extremalaufgaben zu verschiedenartigen Punktanordnungen führen.

Aus diesen Sätzen folgt als

Korollarium. Zwischen den Anzahlen A und a der kongruenten Kreise, die ein beliebig vorgegebenes konvexes Gebiet überdecken bzw. ins Gebiet eingelagert werden können, besteht die Ungleichung $A/a > 4/3$. Es sei denn, daß das Gebiet selbst eine Kreisscheibe ist und $A = a = 1$ ausfällt.

Beweis von (1a). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Kreise $k_1, k_2, \ldots, k_a$ den Halbmesser 1 besitzen. Der Abstand von je zwei Kreismittelpunkten ist dann $\geqslant 2$. Weiterhin genügt es offenbar, statt T die kleinste konvexe Hülle H der Kreise in Betracht zu ziehen.

Wir greifen einen Kreis k_i heraus und zeichnen die Potenzlinien von k_i und den übrigen $a - 1$ Kreisen, fassen von den beiden Halbebenen, die durch je eine Potenzlinie bestimmt werden, diejenige ins Auge, die k_i enthält, und betrachten den gemeinsamen Teil t_i dieser Halbebenen und der konvexen Hülle H. Das Gebiet H wird von den so konstruierten konvexen Gebieten $t_1, t_2, \ldots, t_a$ schlicht und lückenlos bedeckt.

Wir reihen nun die Gebiete t_i in zwei Gruppen ein je nachdem t_i erstens nur von gradlinigen Strecken oder zweitens teilweise auch von einem Kreisbogen berandet ist. Wir zeigen, daß im ersten Fall

$$t_i \geqslant 2\sqrt{3}\ ,$$

im zweiten

$$t_i \geqslant 2 + \pi/2 > 2\sqrt{3}$$

ausfällt.

Fall 1. Wir betrachten ein konvexes Vieleck, das den Einheitskreis enthält und die Eigenschaft besitzt, daß die Fußpunkte der vom Kreismittelpunkt auf die Seiten gefällten Lote voneinander einen Abstand $\geqslant 1$ besitzen. Es handelt sich um eine leicht einzusehende Tatsache, daß unter diesen Vielecken das umbeschriebene reguläre Sechseck den kleinst möglichen Inhalt besitzt [3]).

Fall 2. Wir schreiten von einem gemeinsamen Randpunkt von k_i und H ausgehend am Rand von t_i in den beiden entgegengesetzten Richtungen fort, bis wir auf je einen Eckpunkt E_1 bzw. E_2 stoßen. Die Ungleichung $t_i \geqslant 2 + \pi/2$ ergibt sich aus der Tatsache, daß t_i einen Kappenbereich von k_i enthält bzw. selbst ein Kappenbereich von k_i ist, dessen Innenwinkel bei den Eckpunkten E_1 und E_2 nicht stumpf sein können.

---

[3]) Ein Beweis dieser Tatsache befindet sich z. B. in meinem Aufsatz [6].

Summieren wir die obigen Ungleichungen für sämtliche t_i, so erhalten wir die gewünschte Ungleichung (1a).

Beweis von (2a). Wir nehmen die Kreise $k_1, k_2, \ldots, k_A$ wieder vom Halbmesser 1 an, zerlegen T durch die obige Konstruktion in die konvexen Teilgebiete $t_1, t_2, \ldots, t_A$ und betrachten das Netz N dieser Zer-

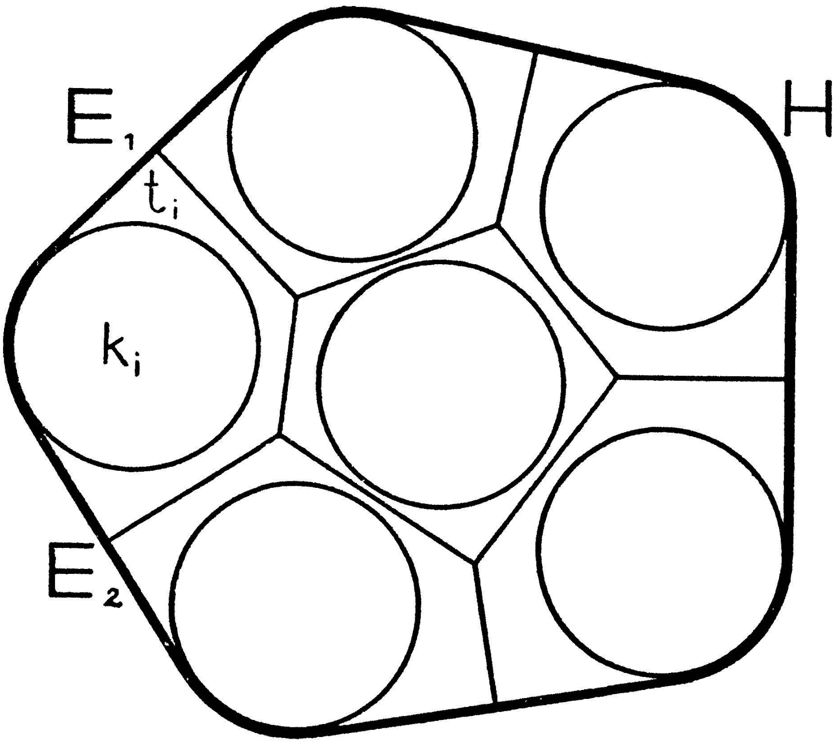

Fig. 1

legung, wobei auch der Rand R von T zu N mitgerechnet werden soll. Wir können voraussetzen, daß N nur dreikantige Ecken besitzt, da eine beliebige m-kantige Ecke als Grenzlage von $m-2$ zusammenfallenden dreikantigen Ecken aufgefaßt werden kann. In diesem Sinn ist die Gesamtzahl der Ecken von N bekanntlich genau $\gamma = 2A - 2$.

Wir greifen ein Gebiet t_i heraus und bezeichnen die durch die Seiten von t_i bzw. von R abgeschnittenen Kreissegmente bzw. Teilgebiete von k_i in zyklischer Reihenfolge mit $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$. Dann gilt

$$t_i = \pi - (s_1 + s_2 + \cdots + s_\nu) + (s_1 s_2 + s_2 s_3 + \cdots + s_\nu s_1) .$$

Schreiben wir die entsprechenden Gleichheiten für sämtliche t_i auf und summieren sie, so verifiziert sich leicht folgende Beziehung:

$$T = \pi A - \tfrac{1}{2} \sum S_{\lambda\mu\nu} .$$

Dabei bedeutet

$$S_{\lambda\mu\nu} = k_\lambda k_\mu + k_\mu k_\nu + k_\nu k_\lambda - 2 k_\lambda k_\mu k_\nu$$

den von den Kreisen k_λ, k_μ, k_ν wenigstens zweifach bedeckten Teil der Ebene, $\lambda\mu\nu$ ein Indextripel für den t_λ, t_μ und t_ν in einem Eckpunkt von N zusammenstoßen, und die Summation ist über sämtliche γ Ecken von N zu erstrecken mit der Vereinbarung, daß bei den etwa ϱ zu R gehörigen Eckpunkten der dritte, fehlende Kreis stets durch das zu T komplementäre Gebiet k_0 der Ebene zu ersetzen ist.

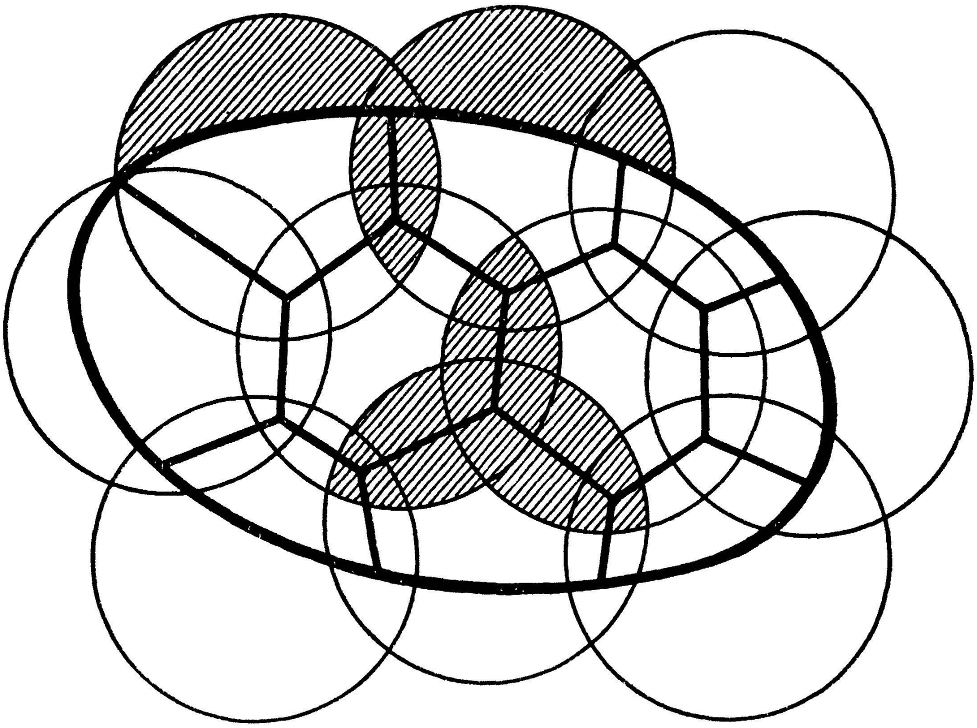

Fig. 2

Es handelt sich nun um die Frage, wann der Flächeninhalt desjenigen Gebietes, das von drei Kreisen k_λ, k_μ, k_ν bzw. von zwei Kreisen k_λ, k_μ und durch das Äußere k_0 eines konvexen Gebiets wenigstens zweifach bedeckt ist, sein Minimum erreicht. Dabei sollen in beiden Fällen die drei Gebiete einen gemeinsamen Punkt besitzen und im zweiten Fall sei auch noch k_0 ganz frei veränderlich.

Es ist leicht einzusehen, daß im ersten Fall das extremale Gebiet sich aus sechs, im zweiten aus vier kongruenten Kreisabschnitten zusammensetzt. Dies bedeutet, daß für einen inneren bzw. zum Rand gehörigen Eckpunkt von N

$$S_{\lambda\mu\nu} \geqq \pi - 3\sqrt{3}/2 \quad \text{bzw.} \quad S_{\lambda\mu 0} \geqq \pi - 2$$

gilt. Daher haben wir mit Rücksicht auf $\gamma = 2A - 2$

$$T \leqq \pi A - \tfrac{1}{2}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)(2A - 2 - \varrho) - \tfrac{1}{2}(\pi - 2)\,\varrho\,,$$

d. h.

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} A \geqslant T + \frac{3\sqrt{3}-4}{4} \varrho - \pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx T + 0{\cdot}3\varrho - 0{\cdot}54\,,$$

womit wegen $\varrho \geqslant 2$ die Ungleichung (2a) bewiesen ist[4]).

Wir wenden uns nun einer Verallgemeinerung von (1) und (2) in einer anderen Richtung zu, wobei einerseits eine Zusammenfassung von (1) und (2) in eine einzige Ungleichung, andererseits eine Ausdehnung auf die sphärische Geometrie erzielt wird.

Erwähnen wir zunächst folgende Ergebnisse[5]):

Betrachten wir $n \geqslant 3$ kongruente Kugelkalotten einer Kugelfläche T, die einander nicht überdecken, so ist ihre Inhaltssumme

$$s \leqslant \frac{n}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right) T < \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} T\,. \tag{1b}$$

Betrachten wir $n \geqslant 3$ kongruente Kugelkalotten, welche die Kugelfläche T überdecken, so ist ihre Inhaltssumme

$$S \geqslant \frac{n}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg}\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right) T > \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9} T\,. \tag{2b}$$

Wir fassen nun (1b) und (2b) in einem allgemeinen Satz zusammen. Um uns aber bequemer ausdrücken zu können, führen wir zunächst die Dichte d und das Deckungsmaß δ eines Bereichsystems bezüglich einem Gebiet G ein. Bezeichnen wir die Inhaltssumme der in G liegenden Teile der Bereiche mit Σ, den von den Bereichen überdeckten Teil von G mit σ, so erklären wir d und δ durch die Quotienten $d = \Sigma/G$ und $\delta = \sigma/G$.

---

[4]) Ist die Gestalt des Gebiets T vorgegeben, so ist für große Werte des Inhalts T offenbar $\varrho > L/2 + O(1)$, wobei L den Umfang von T bedeutet. Daher gilt für die Mindestzahl A der Einheitskreise, die ein großes Gebiet vorgegebener Gestalt überdecken $A > 2\sqrt{3}\,T/9 + 0.076\,L + O(1)$. Dies gilt auch — unter gewissen Regularitätsannahmen bezüglich der Begrenzungskurve — auch für nicht konvexe Gebiete. Dabei läßt sich der Faktor von L durch etwas feinere Überlegungen noch vergrößern. Andererseits befindet sich in der Abhandlung [1] von *H. Hadwiger* die Abschätzung $A < 2\sqrt{3}\,T/9 + 0.368\,L + 1$.

[5]) Siehe die Aufsätze [3] bzw. [4] des Verfassers. Wir bemerken, daß in (1b) und (2b) nur für $n = 3, 4, 6$ und 12 Gleichheit erreicht werden kann, und zwar falls die Höhenpunkte der Kugelkappen Eckpunkte eines einem Großkreis einbeschriebenen regulären Dreiecks, eines regulären Tetraeders, eines Oktaeders oder eines Ikosaeders sind.

Der angedeutete Satz lautet nun:

Betrachten wir auf der Einheitskugel ein System von $n \geqslant 4$ kongruenten Kugelkalotten von der Dichte d und dem Deckungsmaß δ. Zeichnen wir ein gleichseitiges sphärisches Dreieck Δ vom Inhalt $\Delta = 2\pi/(n-2)$ und legen um jeden Eckpunkt je eine zu den Kalotten des Systems kongruente Kugelkalotte k_1, k_2, k_3. Dann besitzt das System $\{k_i\}$ bezüglich Δ die Dichte d und ein Deckungsmaß $\Delta_n(d)$, für das

$$\delta \leqslant \Delta_n(d) \tag{3}$$

ausfällt.

Haben je zwei Kugelkalotten keinen gemeinsamen inneren Punkt, so ist $\delta = d$. In diesem Fall kann der sphärische Halbmesser der Kalotten nicht größer sein als die halbe Seitenlänge des Dreiecks Δ, da im entgegengesetzten Fall $\Delta_n(d) < d$ wäre, woraus wegen (3) $\delta < d$ folgen würde. Das ist aber gerade der wesentliche Inhalt der Ungleichung (1b).

Wird dagegen die Kugelfläche von den Kugelkalotten völlig überdeckt, so ist $\delta = 1$. In diesem Fall kann der Halbmesser der Kalotten nicht kleiner sein als der sphärische Halbmesser des Umkreises von Δ, da sonst $\Delta_n(d) < 1$ und daher mit Rücksicht auf (3) $\delta < 1$ wäre. Dies ist aber mit der Ungleichung (2b) äquivalent.

Es sei noch auf die Ungleichung

$$\Delta_n(d) \leqslant \lim_{n\to\infty} \Delta_n(d) = \Delta(d)\,; \qquad d > 0\,, \qquad n = 4, 5, \ldots$$

hingewiesen, welche die — von der Kugelkalottenanzahl unabhängige — genaue Abschätzung $\delta \leqslant \Delta(d)$ der Deckungszahl δ ermöglicht.

Mit Hilfe eines naheliegenden Grenzüberganges kann man die Dichte und das Deckungsmaß eines Bereichsystems auch bezüglich der Ebene definieren. $\Delta(d)$ bedeutet dann das Deckungsmaß desjenigen ebenen Kreissystems von der Dichte d, bei dem die Kreismittelpunkte ein gleichseitiges Dreiecksgitter bilden.

Wir wollen unser Ergebnis bezüglich der Ebene noch ein wenig anders formulieren. Wir stellen uns die Aufgabe, etwa das Einheitsquadrat mit einer großen Anzahl von kleinen kongruenten Kreisen vorgegebener Inhaltssumme d möglichst gut zu bedecken, d. h. so, daß der Inhalt J des überdeckten Teiles des Quadrats möglichst groß sei. Dann ist der Näherungswert des gesuchten Maximums von J gleich $\Delta(d)$.

Die beiliegende Figur stellt die Funktion $\Delta(d)$ dar, im Vergleich zu dem Mittelwert $\overline{\Delta}(d) = 1 - e^{-d}$ von J für eine große Anzahl von Experimenten, wobei die kleinen Kreise aufs Geratewohl auf das Quadrat zerstreut werden [6]).

Zum Beweis unseres Satzes bemerken wir nun zunächst, daß die Tatsache, daß $\{k_i\}$ bezüglich Δ die Dichte d besitzt, trivial ist. Bezeichnen wir nämlich die Winkelsumme von Δ mit α, so ist mit Rücksicht auf $\alpha - \pi = \Delta = 2\pi/(n-2)$ die gesuchte Dichte $(\alpha k_i/2\pi) : \Delta = n k_i/4\pi = d$.

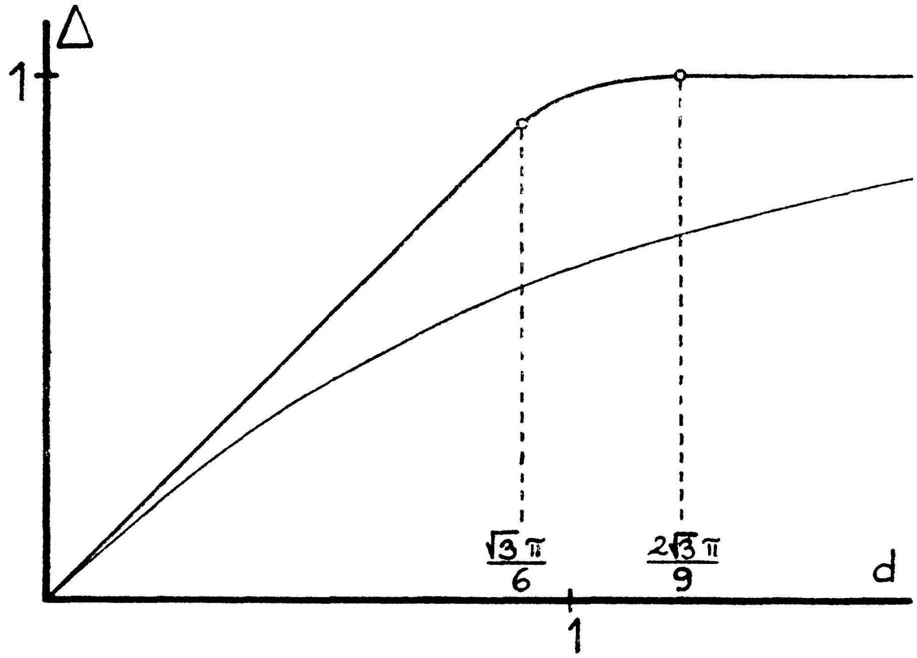

Fig. 3

Das Wesentliche im Satz, d. h. die Ungleichung (3), ist dagegen eine unmittelbare Folgerung einer allgemeineren Ungleichung, auf die Verfasser von einem ganz anderen Problemkreis ausgehend geführt worden ist [7]). Dieselbe lautet:

Es seien auf der Oberfläche Ω der Einheitskugel $n \geqslant 4$ Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$, sowie eine für $0 \leqslant \varrho \leqslant \pi$ erklärte, nirgends zunehmende Funktion $\varphi(\varrho)$ vorgegeben. Es sei P ein weiterer variabler Punkt von Ω und $\varrho_P = \min(PP_1, PP_2, \ldots, PP_n)$ der kürzeste unter den sphärischen Abständen PP_i. Dann gilt für das Oberflächenintegral der für jeden Punkt P von Ω erklärten Funktion $\varphi(\varrho_P)$

$$\int_\Omega \varphi(\varrho_P)\, d\omega \leqslant (2n-4) \int_\Delta \varphi(\bar{\varrho}_P)\, d\omega \ ,$$

---

[6]) Allgemeiner ist der „integralgeometrische" Mittelwert des Inhaltes des genau k-fach ($k = 0, 1, 2, \ldots$) bedeckten Teiles des Quadrats angenähert gleich $d^k/(k!\, e^d)$, und die Abweichung von dieser Konstanten wird desto kleiner, je kleiner die Kreise sind. Dabei können statt Kreisen auch beliebige kleine Bereiche in Betracht gezogen werden, die nicht einmal kongruent zu sein brauchen. Dies steht in Zusammenhang mit einer wohlbekannten Formel von *Poisson*.

[7]) Siehe die Abhandlung [9].

wobei $\Delta \equiv \overline{P}_1\overline{P}_2\overline{P}_3$ ein gleichseitiges sphärisches Dreieck vom Inhalt $\Delta = 2\pi/(n-2)$ und $\overline{\varrho}_P = \min(P\overline{P}_1, P\overline{P}_2, P\overline{P}_3)$ den kürzesten sphärischen Abstand zwischen P und den Ecken von Δ bedeutet.

Für die Funktion

$$\varphi(\varrho) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant r \\ 0 & \text{für} \quad r < \varrho \leqslant \pi \end{cases}$$

ergibt nun die linke Seite der obigen Ungleichung den Oberflächeninhalt des von denjenigen Kugelkalotten bedeckten Teiles von Ω, die um die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mit dem sphärischen Halbmesser r geschlagen sind. Ähnliche Bedeutung hat das Integral auf der rechten Seite. Dividiert man durch 4π, so ergibt sich die gewünschte Ungleichung (3).

(Eingegangen den 2. März 1949.)

SCHRIFTENVERZEICHNIS

L. Fejes Tóth: [1] Über einen geometrischen Satz, Math. Zeitschrift 46 (1940), 83—85; [2] Über die dichteste Kugellagerung, Math. Zeitschrift 48 (1943), 676—684; [3] Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, Jahresbericht der D.M.V. 53 (1943), 66—68; [4] Über die Bedeckung einer Kugelfläche durch kongruente Kugelkalotten (ungarisch mit deutschem Auszug), Mat. Fiz. Lapok 50 (1943), 40—46; [5] Extremale Punktsysteme in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum (ungarisch), Acta Sci. Math. et Nat. 23 (1944, Kolozsvár), IV+54; [6] Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise, Comm. Math. Helv. 17 (1944—1945), 256—261; [7] An inequality concerning polyhedra, Bulletin Amer. Math. Soc. 54 (1948), 139—146; [8] Approximation by polygons and polyhedra, Bulletin Amer. Math. Soc. 54 (1948), 431—438; [9] The isepiphan problem for n-hedra, Amer. J. Math. 70 (1948), 174—180.

H. Hadwiger: [1] Überdeckungen ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate, Comm. Math. Helv. 13 (1940—1941), 195—200; [2] Über extremale Punktverteilungen in ebenen Gebieten, Math. Zeitschrift 49 (1944), 370—373; [3] Lagerungen und Überdeckungen in der Ebene, Experientia 4 (1948).

R. Kershner: The number of circles covering a set, Amer. J. Math. 61 (1939), 665—671.

B. Segre — K. Mahler: On the densest packing of circles, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 261—270.

A. Thue: [1] Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, Naturforskermöde (1892), 352—353; [2] Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene, Christiania Vid.-Selsk. Skr. 1 (1910), 9.