Zur Axiomatik der teilweise geordneten Mengen.

Zur Axiomatik der teilweise geordneten Mengen

Von Martin Altwegg, Zürich

G. Birkhoff erwähnt in seiner Lattice Theory [1]) das Problem, die Axiome der teilweisen Ordnung unter Verwendung der Relation „zwischen" zu formulieren. Das von ihm zur Diskussion gestellte Axiomensystem ist aber weder vollständig noch unabhängig [2]). Die vorliegende Arbeit soll diese Lücke ausfüllen. Das in § 1 aufgestellte Axiomensystem (Z) wird in § 2 als vollständig, in § 3 als unabhängig nachgewiesen. § 4 zeigt schließlich, wie dieses Axiomensystem zweckmäßig zu einem solchen der (vollständigen) linearen Ordnung ergänzt werden kann.

§ 1. Das Axiomensystem

$\mathfrak{M} = \{a, b \ldots x, y \ldots\}$ sei eine teilweise geordnete Menge, also Feld einer Relation $x \geqslant y$ mit den Axiomen:

(L_1) Für jedes x ist $x \geqslant x$.

(L_2) Aus $x \geqslant y$ und $y \geqslant x$ folgt $x = y$.

(L_3) Aus $x \geqslant y$ und $y \geqslant z$ folgt $x \geqslant z$.

Setzt man $\zeta(x, y, z)$ (in Worten „y liegt *zwischen* x und z") dann und nur dann, wenn $x \geqslant y \geqslant z$ oder $z \geqslant y \geqslant x$, $\bar{\zeta}(x, y, z)$ in allen andern Fällen, so gelten:

(Z_1) Für jedes x ist $\zeta(x, x, x)$.

(Z_2) Aus $\zeta(x, y, z)$ folgt $\zeta(z, y, x)$.

(Z_3) Aus $\zeta(x, y, z)$ folgt $\zeta(x, x, y)$.

(Z_4) Aus $\zeta(x, y, x)$ folgt $x = y$.

(Z_5) Aus $\zeta(x, y, z)$ und $\zeta(y, z, u)$, $y \neq z$ folgt $\zeta(x, y, u)$.

---

[1]) *G. Birkhoff*, Lattice Theory, 2. ed. (1948), p. 2, Ex. 4 und Problem 1.

[2]) Das in § 3 dieser Arbeit an letzter Stelle konstruierte Modell erfüllt sämtliche Forderungen dieses Systems, ist aber nicht teilweise geordnet. Überdies folgt die dritte Forderung aus der ersten, vierten und fünften.

(Z_6) Gilt in der endlichen Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1} = x_0$ für $0 < i \leqslant 2n+1$ $\zeta(x_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$ und für $0 < i < 2n+1$ $\bar{\zeta}(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$, so ist $\zeta(x_{2n}, x_0, x_1)$.[3]

Die zweigliedrige Relation $\geqslant$ ist antisymmetrisch, die dreigliedrige ζ ist symmetrisch. Wenn wir behaupten, daß *die Eigenschaften* (Z) *ein vollständiges Axiomensystem der teilweisen Ordnung darstellen*, m. a. W., daß aus der Relation ζ unter Verwendung von (Z) allein die Ausgangsrelation $\geqslant$ rekonstruiert werden kann, so ist das nur bedingt richtig : $\mathfrak{M}$ zerfällt in einer später zu präzisierenden Weise in Komponenten derart, daß die Beziehungen $\geqslant$ innerhalb einer Komponente gesamthaft, unter Festhaltung aller übrigen, unbeschadet der Eigenschaften (L) umgekehrt werden können. Die Rekonstruktion der zweigliedrigen Relation wird daher nur bis auf Umkehrungen innerhalb einzelner Komponenten möglich sein. Jedoch wird eine anschließende Wiederholung des Überganges zur dreigliedrigen Relation wieder eindeutig zur Relation ζ führen.

Noch eine Bemerkung zu Z_6. Es ist wohl kaum möglich, dieses Axiom durch eine einfachere Aussage zu ersetzen, die sich auf eine von vorneherein beschränkte Anzahl von Elementen bezieht. Man denke nur an eine teilweise geordnete Menge, deren Hasse-Diagramm[4]) aus einem geschlossenen, zickzackförmigen Streckenzug besteht.

§ 2. Beweis der Vollständigkeit

(1) Aus $\zeta(x, y, z)$ folgen $\zeta(x, x, y)$, $\zeta(x, x, z)$, $\zeta(y, y, z)$, $\zeta(z, z, y)$, $\zeta(z, z, x)$ und $\zeta(y, y, x)$.

Zunächst gilt Z_3. $\zeta(x, x, z)$ ist ohnehin richtig für $x = y$ und folgt andernfalls aus $\zeta(x, x, y)$ und $\zeta(x, y, z)$ nach Z_5. Weiter gelten $\zeta(z, y, x)$, $\zeta(z, z, y)$, $\zeta(y, z, z)$ und damit $\zeta(y, y, z)$. Schließlich dürfen wir x und z vertauschen.

(2) Aus $\zeta(x, y, z)$ und $\zeta(x, z, y)$ folgt $y = z$.

Denn $\zeta(x, y, z)$, $\zeta(y, z, x)$, $y \neq z$ führt zu $\zeta(x, y, x)$ (Z_5), $x = y$ (Z_4), $y = z$ (Z_4), im Widerspruch zur Annahme.

(3) Aus $\zeta(x, y, z)$ und $\zeta(x, z, u)$ folgt $\zeta(y, z, u)$.

---

[3]) Die Voraussetzung von Z_6 lautet einfach: Es ist $x_0 > x_1 < x_2 > \cdots < x_{2n} > x_0$ oder $x_0 < x_1 > x_2 < \cdots > x_{2n} < x_0$.

[4]) Siehe *Birkhoff*, l. c., Fußnote [1]), p. 5.

Die Behauptung gilt nach (1) sicher dann, wenn $y = z$, wenn $x = z$ und damit wegen Z_4 auch $y = z$, oder wenn $z = u$ ist. Aus $y \neq z$, $x \neq z$ und $z \neq u$ folgt aber mit Rücksicht auf (2) $\bar{\zeta}(x, z, y)$, $\bar{\zeta}(z, x, u)$ und $\bar{\zeta}(x, u, z)$. Wäre nun $\bar{\zeta}(y, z, u)$, so würde die Folge y, z, x, u, z, y die Voraussetzungen von Z_6 erfüllen. $\zeta(z, y, z)$ steht aber im Widerspruch zur Annahme $y \neq z$.

Die nachfolgend eingeführten Bezeichnungen dienen zur einfacheren Formulierung der weiteren Hilfssätze. Die Bedeutung der verwendeten Begriffe läßt sich leicht am Diagramm einer teilweise geordneten Menge veranschaulichen. Diese Hilfsvorstellung erhellt auch unmittelbar den der Beweisführung zugrunde liegenden Gedankengang.

Ist $\zeta(x,x,y)$ oder nach (1) gleichbedeutend $\zeta(y,y,x)$, so nennen wir die Elemente x und y *vergleichbar*. Eine endliche Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt eine *V-Folge*, wenn je zwei konsekutive Glieder vergleichbar sind; sie heißt eine *Z-Folge*, wenn jedes Glied zwischen den beiden benachbarten liegt. Ist $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine V-Folge, so ist $x_1, x_2, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}, x_n$ eine Z-Folge. Umgekehrt ist jede Z-Folge eo ipso auch eine V-Folge.

Enthält eine Z-Folge dasselbe Element wiederholt nacheinander, $\ldots x, y, y \ldots y, z \ldots$, $x \neq y$, $y \neq z$, so ist sicher $\ldots x, y, y, z \ldots$, falls $\zeta(x, y, z)$ sogar $\ldots x, y, z \ldots$ wieder eine Z-Folge. Wir nennen eine in diesem Sinne weitmöglichst reduzierte Z-Folge eine *Kette* und falls zwei aufeinanderfolgende Glieder durchwegs verschieden sind insbesondere eine *einfache Kette*. Sehen wir von der Möglichkeit ab, daß in der ursprünglichen Z-Folge überhaupt alle Glieder gleich sind, so sind die beiden ersten bzw. die beiden letzten Glieder einer Kette stets verschieden. Es ist aber auch x, y als (einfache) Kette zu bezeichnen, wenn nur $x \neq y$ und $\zeta(x, x, y)$ ist, obschon diese zweigliedrige Folge keine eigentliche Z-Folge darstellt. — Jede nicht einfache Kette

$$x_1, x_2 \ldots x_{r_1} / x_{r_1}, x_{r_1+1} \ldots x_{r_2} / x_{r_2} \ldots\ldots x_{r_s} / x_{r_s} \ldots x_n$$

erscheint so als Folge von $s + 1$ einfachen Ketten, die nacheinander in ihrem letzten bzw. ersten Glied übereinstimmen. Für $1 \leqslant \nu \leqslant s$ gilt überdies $\bar{\zeta}(x_{r_\nu - 1}, x_{r_\nu}, x_{r_\nu + 1})$.

(4) In einer einfachen Kette $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind nicht nur benachbarte, sondern irgend zwei Glieder verschieden, und jede Teilfolge $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\nu}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu$, $\nu \geqslant 2$ ist wieder eine einfache Kette.

Die Behauptung ist trivial für $n=2$. Gilt sie für alle einfachen Ketten der Länge $\leqslant n-1$, so gilt sie auch für die einfache Kette $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wenn wir noch zeigen, daß $x_1 \neq x_n$ und für $1<k<n$ $\zeta(x_1, x_k, x_n)$ ist. Die zweite (und damit nach Z_4 die erste) dieser Behauptungen folgt für $k<n-1$ aus der Induktionsvoraussetzung $\zeta(x_1, x_k, x_{n-1})$, $\zeta(x_k, x_{n-1}, x_n)$ und aus Z_5. Ist aber $k = n-1$, so kehren wir die Kette um.

(5) Streicht man beliebige Glieder einer Kette, Anfangs- und Endglied jeder einfachen Teilkette ausgenommen, so erhält man wieder eine Kette.

Für Glieder, die nicht an zweiter oder vorletzter Stelle einer einfachen Teilkette stehen, folgt die Behauptung aus (4). Bleibt zu zeigen, daß in der Kette $\ldots x_{r-2}, x_{r-1}, x_r/x_r, x_{r+1}, x_{r+2} \ldots$ a) $\bar{\zeta}(x_{r-2}, x_r, x_{r+1})$ und b) $\bar{\zeta}(x_{r-1}, x_r, x_{r+2})$ gilt. a) Andernfalls ergibt $\zeta(x_{r-2}, x_r, x_{r+1})$ und $\zeta(x_{r-2}, x_{r-1}, x_r)$ nach (3) $\zeta(x_{r-1}, x_r, x_{r+1})$. b) Aus $\zeta(x_{r+2}, x_r, x_{r-1})$, $\zeta(x_{r+2}, x_{r+1}, x_r)$ und (3) folgt $\zeta(x_{r+1}, x_r, x_{r-1})$.

(6) Ist $a \ldots b \ldots x_1/x_1 \ldots\ldots x_s/x_s \ldots b \ldots a$ eine Kette mit $s+1$ einfachen Teilketten, so ist $s \equiv 1 \pmod{2}$. (b darf mit x_1, mit x_s oder mit beiden zusammenfallen.)

Sei $s \equiv 0 \pmod{2}$. Nach (5) ist auch $a, x_1/x_1, x_2/x_2 \ldots x_s/x_s, a$ eine Kette und die Folge $a, x_1, x_2 \ldots x_s, a$ erfüllt die Voraussetzungen von Z_6. Aus $\zeta(x_s, a, x_1)$ und $\zeta(x_s, b, a)$ folgt aber nach (3) $\zeta(b, a, x_1)$, im Widerspruch zu $\zeta(a, b, x_1)$ und $a \neq b$.

(7) Sind $a, b \ldots x_1/x_1 \ldots x_s/x_s \ldots u, v$ und $a, b \ldots y_1/y_1 \ldots y_r/y_r \ldots u, v$ Ketten mit $s+1$ bzw. $r+1$ einfachen Teilketten, so ist $r \equiv s \pmod{2}$.

Denn $a, b, x_1/x_1 \ldots x_s/x_s, u, v/v, u, y_r/y_r \ldots y_1/y_1, b, a$ ist wieder eine Kette und aus (6) folgt $s+1+r \equiv 1 \pmod{2}$.

Mit (7) verfügen wir über den notwendigen Hilfssatz, um im Feld $\mathfrak{M}$ der Relation ζ eine den Axiomen (L) genügende, zweigliedrige Relation einzuführen, die mit der Ausgangsrelation $\geqslant$ im wesentlichen (das heißt abgesehen von Umkehrungen) identisch ist.

Nennen wir zwei Elemente von $\mathfrak{M}$ *zusammenhängend*, wenn sie Anfangs- bzw. Endglied einer V-Folge sind, so ist diese Beziehung symmetrisch, transitiv und reflexiv[5]) erzeugt, also eine Einteilung von $\mathfrak{M}$ in Klassen zusammenhängender Elemente, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots$. Wir wählen nun,

[5]) Hier und nur hier verwenden wir Z_1.

willkürlich aber fest, in jeder dieser Klassen $\mathfrak{M}_i$, sofern sie wenigstens zwei verschiedene Elemente enthalten, zwei verschiedene vergleichbare Elemente a_i und b_i. Sind dann x, y beliebige vergleichbare Elemente von $\mathfrak{M}$, so gehören sie zur selben Klasse $\mathfrak{M}_i$ und es existieren: Eine V-Folge $a_i, b_i \ldots x, y$, eine Z-Folge $a_i, b_i, b_i \ldots x, x, y$ und für $x \neq y$ (durch Reduktion, siehe oben) schließlich eine Kette $a_i, b_i \ldots / \ldots / \ldots x, y$ mit $s+1$ einfachen Teilketten, $s \geqslant 0$. Setzen wir $[x, y] = (-1)^s$, so wird dadurch nach (7) jedem geordneten Paar (verschiedener) vergleichbarer Elemente von $\mathfrak{M}$ in eindeutiger Weise einer der Werte $+1$ oder -1 zugeordnet. (Man erkennt ohne weiteres, daß diese Funktion bis auf das Vorzeichen innerhalb der einzelnen Klassen $\mathfrak{M}_i$ unabhängig ist von der Wahl der a_i, b_i: Die mit den Ausgangselementen a_i', b_i' definierte Funktion $[x, y]'$ ist innerhalb $\mathfrak{M}_i$ identisch mit $[x, y]$ bzw. mit $-[x, y]$, je nachdem $[a_i', b_i'] = +1$ bzw. $[a_i', b_i'] = -1$ ist.) Da $x, y / y, x$ eine Kette ist, gilt stets $[x, y] = -[y, x]$. Ist y auch mit z vergleichbar, $y \neq z$, so ist entweder x, y, z oder $x, y / y, z$ eine Kette; für $[x, y] = [y, z]$ muß der erste Fall eintreten und es gilt dann auch $[x, y] = [x, z]$.

Setzen wir schließlich für beliebige Elemente von $\mathfrak{M}$ $x \geqslant y$ dann und nur dann, wenn $[x, y] = +1$ oder wenn $x = y$ ist, so ist (L) erfüllt und man erkennt leicht, daß diese Relation bis auf Umkehrung innerhalb einer Klasse $\mathfrak{M}_i$ mit der ursprünglich eingeführten identisch ist.

§ 3. Beweis der Unabhängigkeit

Die nachfolgend angeführten Modelle genügen allen Axiomen von (Z) mit Ausnahme je eines einzigen:

(Z_1): $\mathfrak{M} = \{a\}$. $\bar{\zeta}(a, a, a)$.

(Z_2): $\mathfrak{M} = \{a, b\}$. $\zeta(a, a, a)$, $\zeta(a, a, b)$, $\zeta(a, b, b)$, $\zeta(b, b, b)$.[6]

(Z_3): $\mathfrak{M} = \{a, b\}$. $\zeta(a, a, a)$, $\zeta(a, a, b)$, $\zeta(b, a, a)$, $\zeta(b, b, b)$.[6]

(Z_4): $\mathfrak{M} = \{a, b\}$. Für beliebige Tripel $x, y, z = a, b$ gilt $\zeta(x, y, z)$.

(Z_5): $\mathfrak{M} = \{a, b, c\}$. Wir nehmen die ζ-Relationen, die sich aus $a > b > c$ ergeben, ersetzen aber $\zeta(a, a, c)$, $\zeta(c, a, a)$, $\zeta(a, c, c)$ und $\zeta(c, c, a)$ durch ihre Negationen. Z_5 wird falsch für x, y, z, u bzw. gleich a, a, b, c. (Die Voraussetzungen von Z_6 sind nicht erfüllbar. Von den Folgen des ursprünglichen Modells $a > b > c$, die den Voraussetzun-

[6]) Für alle andern Tripel $x, y, z = a, b$ gilt $\bar{\zeta}(x, y, z)$.

gen von Z_6 genügen, fallen im modifizierten Modell diejenigen weg, in denen a auf c oder c auf a folgt. Mithin bleiben nur diejenigen Folgen, in denen entweder a und b oder b und c abwechseln. Diese Folgen haben aber nicht die erforderliche Länge.)

(Z_6): $\mathfrak{M} = \{a, b, c\}$. Wir setzen $\zeta(x, y, z)$ dann und nur dann, wenn $x = y$ oder $y = z$ (oder $x = y = z$) ist. Z_6 wird falsch für die Folge a, b, c, a.

§ 4. Die lineare Ordnung

Ist $\mathfrak{M}$ linear geordnet, das heißt gilt in (L) an Stelle von L_1 das stärkere

(L_4) Für beliebige x und y ist $x \geqslant y$ oder $y \geqslant x$,

so gilt in (Z) zusätzlich

(Z_7) Aus $\bar{\zeta}(x, y, z)$ und $\bar{\zeta}(y, z, x)$ folgt $\zeta(z, x, y)$.

Damit wird aber Z_1 eine Folge von Z_7. Auch Z_3 erübrigt sich; für beliebige x und y gilt jetzt stets $\zeta(x, x, y)$. (Aus $\bar{\zeta}(x, x, y)$ würde $\bar{\zeta}(y, x, x)$ (Z_2), $\zeta(x, y, x)$ (Z_7), $x = y$ (Z_4), also $\bar{\zeta}(x, x, x)$ folgen.) Zwei beliebige Elemente sind daher im Sinne unserer Definition immer vergleichbar und aus § 2 ergibt sich ohne weiteres, daß Z_2, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7 ein vollständiges Axiomensystem der linearen Ordnung darstellen. In diesem System läßt sich nun Z_6 durch die einfachere Aussage (3) ersetzen[7], es gilt nämlich der Satz:

Z_2, Z_4, Z_5, (3), Z_7 bilden ein vollständiges und unabhängiges Axiomensystem der linearen Ordnung.

Zum Vollständigkeitsbeweis bemerken wir zunächst, daß (1), (2) und (4) ihre Gültigkeit behalten; sie ergaben sich aus Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, beruhen also im neuen System auf Z_2, Z_4, Z_5, Z_7. Nun läßt sich zeigen, daß aus $\zeta(x, y, z)$, $\bar{\zeta}(x, u, y)$ und $\bar{\zeta}(y, u, z)$ stets $\bar{\zeta}(x, u, z)$ folgt. Auf Grund dieses Hilfssatzes beweist man leicht, daß jede einfache Kette, sofern sie $\mathfrak{M}$ nicht bereits erschöpft, unter Erhaltung der Ketteneigenschaft um ein beliebiges weiteres Element von $\mathfrak{M}$ erweitert werden kann, dadurch, daß man dieses Element passend einschiebt. Die in § 2 durchgeführte Konstruktion vereinfacht sich dann wesentlich, indem man sich auf die Betrachtung einfacher Ketten beschränken kann, also insbesondere Z_6 nicht mehr benötigt. Man hat lediglich zu beachten, daß die Glieder

[7]) Da die Aussage von Z_6 für $n = 1$ in Z_7 enthalten ist und da beim Beweis von (3) Z_6 nur für $n = 2$ verwendet wurde, ist also bereits Z_2, Z_4, Z_5, Z_6 für $n = 2$, Z_7 ein vollständiges Axiomensystem.

einer einfachen Kette wegen (2) nicht permutiert werden können, abgesehen von der Umkehrung der ganzen Kette, ohne die Ketteneigenschaft zu zerstören.

Die Unabhängigkeit von Z_7 ist klar, diejenige von Z_2 und Z_4 zeigt sich in den entsprechenden Modellen von § 3. Nimmt man vier Punkte auf einem Kreis, von denen jeder zwischen den beiden benachbarten und überdies zwischen sich selbst und irgendeinem Punkt liegt, so gelten $Z_2, Z_4, (3), Z_7$, nicht aber Z_5. Die Unabhängigkeit von (3) schließlich ergibt sich an einem Modell von 4 Punkten a, b, c, d, in dem a zwischen zwei beliebigen (verschiedenen) andern Punkten, b zwischen c und d und jeder Punkt zwischen sich selbst und irgendeinem Punkt liegt.

(Eingegangen den 6. August 1949.)