Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 24 (1950)

Artikel: Les groupes engendrés par un système connexe de cycles d'ordre sept.

Autor: Piccard, Sophie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20296

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 17.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les groupes engendrés par un système connexe

de cycles d'ordre sept et les bases des groupes symétrique et alterné de degré $n \geq 10$ dont l'une des substitutions est un cycle du septième ordre

Par Sophie Piccard, Neuchâtel

Soit k un entier ≥ 2, soit n un entier ≥ 7 et soient

$$T_i = (a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3}\, a_{i4}\, a_{i5}\, a_{i6}\, a_{i7}) \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, k \ ,$$

k cycles d'ordre 7 qui permutent, dans leur ensemble, les n nombres $1, 2, \ldots, n$ et qui constituent un système connexe, c'est-à-dire tel qu'il n'existe aucun sous-ensemble propre E_1 de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, n\}$, composé de la totalité des éléments d'un certain nombre de cycles T_i.

Il s'agit de savoir quels groupes peuvent engendrer les substitutions T_i.

Nous supposerons que $T_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$, ce qui ne restreint pas la généralité des conclusions qui suivent. En effet, quels que soient les nombres $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}$, désignons par $b_{18} \ldots b_{1n}$ une permutation quelconque des nombres de l'ensemble

$$E - \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}\}$$

et posons

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & b_{18} \ldots b_{1n} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \ldots n \end{pmatrix} , \quad T'_i = RT_iR^{-1}, \quad i = 1, \ldots, k \ .$$

Les substitutions T'_i forment un système connexe de cycles du septième ordre, elles engendrent un groupe simplement isomorphe à celui engendré par les cycles T_i et on a $T'_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$.

I. *Soit d'abord* $k = 2$ *et soit* 1) $n = 7$. Alors, si $T_2 = T_1^i$ $(1 \leq i \leq 6)$, T_2 appartient au groupe cyclique G_7, d'ordre 7, engendré par T_1.

Si †) $T_2 = T_1^i U^j T_1^{-i}$, où $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et $U = (1\ 2\ 6\ 5\ 3\ 4\ 7)$, T_1 et T_2 engendrent un groupe ${}_1G_{168}$ d'ordre 168; si T_2 est défini par la formule †) et si $U = (1\ 2\ 5\ 6\ 4\ 3\ 7)$, T_1 et T_2 engendrent également un groupe d'ordre 168, appelons-le ${}_2G_{168}$, simplement isomorphe à ${}_1G_{168}$. Chacun des groupes ${}_1G_{168}$, ${}_2G_{168}$ comprend 48 substitutions du type 7[1]), 42 substitutions du type 4.2, 21 substitutions du type 2.2, 56 substitutions du type 3.3 et la substitution identique 1. Les deux groupes ${}_1G_{168}$ et ${}_2G_{168}$ sont distincts, ils ont en commun le groupe G_{21} d'ordre 21 engendré par les deux substitutions (1 2 3 4 5 6 7) et (2 3 5) (4 7 6) ; chacun des groupes ${}_1G_{168}$, ${}_2G_{168}$ est deux fois transitif.

Chacun des groupes ${}_1G_{168}$, ${}_2G_{168}$ peut être caractérisé par les quatre relations fondamentales $S^7 = 1$, $T^2 = 1$, $(TS^3)^3 = 1$, $(TS^2)^4 = 1$. Chacun de ces deux groupes est à base du second ordre et possède au total 9576 bases, dont 8736 sont de première espèce et du genre 1 et 840 sont de seconde espèce[2]).

Il y a en tout 84 substitutions T_2 qui engendrent, avec T_1, soit le groupe ${}_1G_{168}$ soit le groupe ${}_2G_{168}$.

Dans tous les autres cas possibles, soit dans 630 cas, T_1 et T_2 engendrent le groupe alterné $\mathfrak{A}_7$.

2) *Soit encore* $k = 2$ *et soit* $n = 8$. Les cycles d'ordre 7 de T_1 et de T_2 ont alors six éléments communs.

Alors si a) T_2 est défini par la formule †) $T_2 = T_1^i U^j T_1^{-i}$, où $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et $U = (1\ 2\ 5\ 4\ 6\ 3\ 8)$, T_1 et T_2 engendrent le groupe ${}_1G'_{56}$, d'ordre 56, comprenant 48 substitutions du type 7, 7 substitutions du type 2.2.2.2 et 1, groupe qui est caractérisé par les trois relations $S^7 = 1$, $T^2 = 1$, $TSTS^4TS^2 = 1$ et qui possède au total 1344 bases, dont 1176 sont de première espèce et du genre 1 et 168 sont de seconde espèce. Si T_2 est défini par la formule †), où $U = (1\ 2\ 6\ 4\ 3\ 5\ 8)$, T_1 et T_2 engendrent le groupe ${}_2G''_{56}$ simplement isomorphe à ${}_1G'_{56}$ mais différent de ce dernier groupe et n'ayant avec lui en commun que le groupe cyclique G_7 engendré par T_1. Chacun des groupes ${}_1G'_{56}$, ${}_2G''_{56}$ est deux fois transitif.

---

[1]) Soient $u_1, u_2, \ldots, u_t$ des entiers au nombre $t \geq 1$, tels que $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_t \geq 2$. Nous disons qu'une substitution S est du type $u_1 . u_2 \ldots u_t$ si l'on peut former avec tous les cycles d'ordre > 1 de S une suite $C_1, C_2, \ldots, C_t$, telle que le cycle C_i est d'ordre u_i, $i = 1, 2, \ldots, t$.

[2]) Soit n un entier > 2, soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre $n!$ et soit G un sous-groupe transitif et primitif quelconque de $\mathfrak{S}_n$, à base du second ordre (sous-groupe non cyclique qui possède des couples d'éléments générateurs). Soit S, T une base de G. Cette base est dite *de première espèce et du genre 1* s'il n'existe aucune substitution du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui transforme S en T et T en S; elle est dite *de première espèce et du genre 2* s'il existe une substitution R de l'ensemble $\mathfrak{S}_n - G$ telle que $RST^{-1} = T$ et que $RTR^{-1} = S$; elle est dite *de seconde espèce* s'il existe une substitution R de G, telle que $RSR^{-1} = T$ et que $RTR^{-1} = S$. Lorsque la base S, T est de première espèce et du genre 2 ou de seconde espèce, la substitution correspondante R est du second ordre et unique.

Si b) T_2 est défini par la formule †), où $U = (1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6\ 8)$, alors T_1 et T_2 engendrent le groupe ${}_1G'_{168}$ d'ordre 168 composé de 48 substitutions du type 7, 42 substitutions du type 4.4, 21 substitutions du type 2.2.2.2, 56 substitutions du type 3.3 et de 1, groupe qui est caractérisé par les relations fondamentales $S^7 = 1$, $T^2 = 1$, $(TS^3)^3 = 1$, $(TS^2)^4 = 1$ et qui possède au total 9576 bases, dont 7392 sont de première espèce et du genre 1, 1344 sont de première espèce et du genre 2 et 840 sont de seconde espèce. Le groupe ${}_1G'_{168}$ est deux fois transitif. [3])

Si c) T_2 est défini par la formule †), où U est l'une des six substitutions $(1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4\ 8)$, $(1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8)$, $(1\ 3\ 5\ 6\ 4\ 2\ 8)$, $(1\ 4\ 6\ 3\ 5\ 2\ 8)$, $(1\ 6\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8)$, $(1\ 6\ 5\ 3\ 2\ 4\ 8)$, alors T_1 et T_2 engendrent le groupe ${}_1G_{1344}$, d'ordre 1344, composé de 384 substitutions du type 7, 224 substitutions du type 6.2, 224 substitutions du type 3.3, 252 substitutions du type 4.4, 49 substitutions du type 2.2.2.2, 168 substitutions du type 4.2, 42 substitutions du type 2.2 et de 1, groupe qui possède au total 459.648 bases (il y en a de première espèce et du genre 1, ainsi que de seconde espèce) et qui est caractérisé par les six relations fondamentales $S^7 = 1$, $T^2 = 1$, $(TS^3)^4 = 1$, $(TS)^6 = 1$, $(TS^3TS^2TS)^2 = 1$ et $TS^3TSTSTS^4TS^5TS^6TS^5 = 1$.

Et si T_2 est défini par la formule †), où U est l'une des six substitutions $(1\ 6\ 2\ 5\ 3\ 4\ 8)$, $(1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6\ 8)$, $(1\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2\ 8)$, $(1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4\ 8)$, $(1\ 5\ 4\ 6\ 3\ 2\ 8)$, $(1\ 4\ 3\ 6\ 2\ 5\ 8)$, T_1 et T_2 engendrent le groupe ${}_2G_{1344}$ d'ordre 1344, simplement isomorphe à ${}_1G_{1344}$ et qui a avec ${}_1G_{1344}$ en commun le groupe ${}_1G'_{168}$ dont nous avons parlé plus haut.

Chacun des groupes ${}_1G_{1344}$, ${}_2G_{1344}$ est trois fois transitif.

Il y a en tout 630 substitutions T_2 qui engendrent, avec T_1, un vrai sous-groupe de $\mathfrak{A}_8$.

d) Dans tous les autres cas possibles, soit dans 4410 cas, T_1 et T_2 engendrent le groupe alterné $\mathfrak{A}_8$ des substitutions des éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

3) *Soit encore* $k = 2$ *et soit* $n = 9$. T_1 et T_2 ont alors cinq éléments communs.

---

[3]) Remarquons que les groupes ${}_1G_{168}$ et ${}_1G'_{168}$ sont simplement isomorphes. On établit un isomorphisme entre ces deux groupes en faisant correspondre à la substitution $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ de ${}_1G_{168}$ la même substitution S de ${}_1G'_{168}$, à la substitution $T = (1\ 2\ 6\ 5\ 3\ 4\ 7)$ de ${}_1G_{168}$ la substitution $T' = (1\ 3\ 7\ 5\ 8\ 6\ 4)$ de ${}_1G'_{168}$ et à la substitution $\varphi(S, T)$ de ${}_1G_{168}$ la substitution $\varphi(S, T')$ de ${}_1G'_{168}$, quelle que soit la composition finie φ de S et de T, car S, T est une base de ${}_1G_{168}$ qui est caractérisée par les mêmes relations que la base S, T' de ${}_1G'_{168}$.

Alors, si $T_2 = R^i T_1 U^l T_1^{-j} R^{-i}$, où $R = (8\ 9)$, U est l'une des trois substitutions $(1\ 2\ 8\ 9\ 4\ 5\ 3)$, $(1\ 8\ 2\ 3\ 9\ 4\ 6)$, $(1\ 9\ 2\ 8\ 3\ 5\ 6)$, $i = 1$ ou 2, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, T_1 et T_2 engendrent un groupe d'ordre 504. C'est le groupe ${}_1G_{504}$, si $i = 2$, et le groupe ${}_2G_{504}$, si $i = 1$. Les groupes ${}_1G_{504}$ et ${}_2G_{504}$ sont simplement isomorphes, mais distincts, et ils ont commun le seul groupe cyclique G_7 engendré par T_1. Chacun des deux groupes ${}_1G_{504}$, ${}_2G_{504}$ comprend 168 substitutions du type 9, 216 substitutions du type 7, 56 substitutions du type 3.3.3, 63 substitutions du type 2.2.2.2 et 1. Ces deux groupes sont caractérisés par les cinq relations $S^7 = 1$, $T^7 = 1$, $(T^6 S)^2 = 1$, $(T^2 S^3)^2 = 1$, $T^3 S^5 T^2 S^5 T^3 S = 1$. Chacun d'eux possède 107.352 bases, dont 96.768 sont de première espèce et du genre 1 et 10.584 sont de seconde espèce. Chacun des groupes ${}_1G_{504}$, ${}_2G_{504}$ est trois fois transitif.

Au total 252 substitutions T_2 engendrent avec T_1 un groupe d'ordre 504.

Dans tous les autres cas possibles, soit dans 14.868 cas, T_1 et T_2 constituent une base du groupe alterné $\mathfrak{A}_9$.

4) $k = 2$ *et* $n = 10, 11, 12$ *ou* 13. T_1 et T_2 ont alors respectivement 4, 3, 2 ou un élément commun. Dans tous ces cas, T_1 et T_2 engendrent le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.

Remarque 1. Les deux groupes ${}_1G'_{56}$ et ${}_1G_{1344}$ sont composés alors que les trois groupes ${}_1G_{168}$, ${}_1G'_{168}$ et ${}_1G_{504}$ sont simples.

II. Soit à présent k un entier positif quelconque ≥ 2. La proposition suivante a alors lieu :

Proposition 1. *Tout système connexe de cycles du septième ordre qui permutent, dans leur ensemble, un nombre* ≥ 10 *d'éléments, engendrent le groupe alterné des substitutions de l'ensemble des éléments permutés par les cycles du système.*

La démonstration de la proposition 1 repose sur les trois lemmes suivants.

Lemme 1. Soit ${}_1G'_{56}$ le groupe d'ordre 56 engendré par les deux substitutions $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$, $(1\ 2\ 5\ 4\ 6\ 3\ 8)$ et soit $C = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7)$ un cycle d'ordre 7, connexe avec ${}_1G'_{56}$ (c'est-à-dire tel que les ensembles $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ ont au moins un élément commun) et qui contient parmi ses éléments les $r \geq 1$ nombres $9, 10, \ldots, 8 + r$. Alors, si $\{b_1, b_2, \ldots, b_7\} \subset \{1, 2, \ldots, 8 + r\}$, en composant C avec les substitutions de ${}_1G'_{56}$, on obtient soit le groupe ${}_1G_{504}$ soit le groupe $\mathfrak{A}_{8+r}$.

Démonstration. Soit t le nombre d'éléments communs aux deux ensembles $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$.

Si $t = 1$, C et ${}_1G'_{56}$ engendrent le groupe $\mathfrak{A}_{8+r}$. En effet, il ressort de la sucture du groupe ${}_1G'_{56}$ que ce groupe contient des cycles d'ordre sept permutant sept quelconques des nombres $1, 2, \ldots, 8$. Il contient donc aussi des cycles ayant un seul élément commun avec le cycle C. Soit C' un tel cycle. D'après le lemme I de Hoyer[4]) les deux substitutions C et C' engendrent le groupe alterné A des substitutions des éléments qu'elles permutent. Or l'ensemble des éléments permutés par C et C' comprend tous les nombres de la suite $1, 2, \ldots, 8 + r$, sauf un a, tel que $1 \leq a \leq 8$, et il existe (au moins) un cycle C'' d'ordre sept du groupe ${}_1G'_{56}$ qui permute a. Et, d'après le lemme II de Hoyer (voir note au bas de la page), en composant C'' avec les substitutions de A, on obtient le groupe $\mathfrak{A}_{8+r}$. Donc C et ${}_1G'_{56}$ engendrent bien le groupe $\mathfrak{A}_{8+r}$, si $t = 1$.

Soit $t \geq 2$. Supposons d'abord que $r > 1$. Alors parmi les éléments de C figurent au plus cinq des nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Comme le groupe ${}_1G'_{56}$ contient des cycles d'ordre sept qui permutent sept quelconques des nombres $1, 2, \ldots, 8$, ce groupe contient donc (au moins) une substitution C' de la forme $C' = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7)$, où $a_1, a_2, \ldots, a_7$ sont sept nombres de la suite $1, 2, \ldots, 8$, tels que $\{1, 2, \ldots, 8\} - \{a_1, a_2, \ldots, a_7\} \subset \{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$. C' a donc au moins un et au plus quatre éléments communs avec C. C et C' permutent, ensemble, tous les éléments de la suite $1, 2, \ldots, 8 + r$ et, comme les cycles C et C' sont connexes, ils engendrent, d'après ce qui précède, le groupe $\mathfrak{A}_{8+r}$.

Soit, à présent, $t \geq 2$ *et soit* $r = 1$. Comme $r = 1$, C permute le nombre 9 qui n'est pas permuté par les substitutions de ${}_1G'_{56}$. Donc $C \bar{\in} {}_1G'_{56}$. Deux cas sont alors possibles. a) $C \in {}_1G_{504} - {}_1G'_{56}$. Soit alors G le groupe engendré par C et ${}_1G'_{56}$. Comme $C \bar{\in} {}_1G'_{56}$, ${}_1G'_{56}$ est un vrai sous-groupe de G et, comme ${}_1G'_{56} \subset {}_1G_{504}$ et que $C \in {}_1G_{504}$, on a $G \subset G_{504}$. Or, de l'étude des sous-groupes de ${}_1G_{504}$, il ressort que ${}_1G_{504}$ ne possède aucun sous-groupe propre dont ${}_1G'_{56}$ soit un vrai sous-groupe. Il s'ensuit que $G = {}_1G_{504}$. b) $C \in \mathfrak{A}_9 - {}_1G_{504}$. Soit encore G le groupe engendré par

---

[4]) *Lemme I de Hoyer:* Quels que soient les entiers $m > 1$ et $n > m$, les deux substitutions $(1\,2 \ldots m)$ et $(m\; m+1 \ldots n)$ engendrent le groupe symétrique ou le groupe alterné des substitutions des éléments $1, 2, \ldots, n$.

Lemme II de Hoyer: Soit G un groupe de substitutions des éléments $1, 2, \ldots, n$ $(n \geq 3)$ qui contient l'alterné des substitutions des éléments $1, 2, \ldots, n$ et soit $S = (a_1 a_2 \ldots a_m)$, où $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}\{1, 2, \ldots, n\} \neq 0$, mais $\{1, 2, \ldots, n\} \not\subset \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ et $m \geq 2$. Alors le groupe Γ que la substitution S engendre avec G contient l'alterné des substitutions de tous les éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\} + \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

${}_1G'_{56}$ et C. ${}_1G'_{56}$ est un vrai sous-groupe de G qui, à son tour, est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{A}_9$. On a $G \neq {}_1G_{504}$, puisque $C \in G$ et $C \overline{\in} {}_1G_{504}$. Or ${}_1G_{504}$ est le seul vrai sous-groupe transitif de $\mathfrak{A}_9$ qui possède le sous-groupe ${}_1G'_{56}$.

Dans le cas b) on peut aussi raisonner comme suit. Il existe des cycles d'ordre 7 de ${}_1G'_{56}$ qui ont avec C seulement 5 éléments communs. Soit C_1 un tel cycle. D'après ce qui précède, les deux cycles C et C_1 ne pourraient engendrer que l'un des deux groupes ${}_1G_{504}$ ou $\mathfrak{A}_9$ et, comme $C \overline{\in} {}_1G_{504}$, par hypothèse, il s'ensuit que C et C_1, donc aussi C et ${}_1G'_{56}$, engendrent le groupe $\mathfrak{A}_9$.

On a donc nécessairement $G = \mathfrak{A}_9$, c. q. f. d.

Lemme 2. Soit ${}_1G'_{168}$ le groupe d'ordre 168 engendré par les deux substitutions $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ et $(1\,4\,5\,2\,3\,6\,8)$ et soit $C = (b_1\,b_2\ldots b_7)$ un cycle d'ordre 7 connexe avec ${}_1G'_{168}$, qui permute au moins un nombre de la suite $1, 2, \ldots, 8$ ainsi que les $r \geq 1$ nombres $9, 10, \ldots, 8+r$. Alors, si $\{b_1, b_2, \ldots, b_7\} \subset \{1, 2, \ldots, 8+r\}$, en composant C avec les substitutions de ${}_1G'_{168}$, on obtient toujours le groupe alterné $\mathfrak{A}_{8+r}$.

Démonstration. Soit t le nombre d'éléments communs aux deux ensembles $\{1, 2, \ldots, 8\}$ et $\{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$. Il ressort de la définition de C que $6 \geq t \geq 1$. *Supposons d'abord que* $t = 1$. Il ressort de la structure du groupe ${}_1G'_{168}$ que ce groupe contient des cycles d'ordre sept qui permutent sept quelconques des nombres $1, 2, \ldots, 8$. Il existe donc un cycle C_1 d'ordre 7 de ${}_1G'_{168}$ qui a avec C un seul élément commun. Le cycle C_1 laisse fixe un seul nombre a de la suite $1, 2, \ldots, 8$ et il existe au moins un cycle C_2 d'ordre 7 de ${}_1G'_{168}$ qui permute a. Les deux substitutions C et C_1 engendrent le groupe alterné A des substitutions des éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 8+r\} - \{a\}$, d'après le lemme I de Hoyer, et en composant C_2 avec les substitutions de A, on obtient le groupe $\mathfrak{A}_{8+r}$, d'après le lemme II de Hoyer. Donc C et ${}_1G'_{168}$ engendrent bien le groupe $\mathfrak{A}_{8+r}$.

Soit, à présent, $t > 1$ *et supposons d'abord* que $r > 1$, *donc* $t \leq 5$. Comme ${}_1G'_{168}$ contient des cycles d'ordre 7 qui permutent cinq quelconques des nombres $1, 2, \ldots, 8$, il existe un cycle $C' = (a_1\,a_2\ldots a_7)$ d'ordre 7 de ${}_1G'_{168}$, tel que C et C' ont $t-1$ éléments communs, $4 \geq t - 1 \geq 1$. C et C' permutent, ensemble, tous les éléments de la suite $1, 2, \ldots, 8+r$ et engendrent, d'après ce qui précède, le groupe $\mathfrak{A}_{8+r}$. Il en est donc de même de C et ${}_1G'_{168}$.

Soit à présent $r = 1$, *donc* $t = 6$. Soit G le groupe engendré par ${}_1G'_{168}$ et par C. G est transitif. Comme $C \overline{\in} {}_1G'_{168}$, ${}_1G'_{168}$ est un vrai sous-groupe de G et, comme $C \in \mathfrak{A}_9$ et ${}_1G'_{168} \subset \mathfrak{A}_9$, on a $G \subset \mathfrak{A}_9$. Or $\mathfrak{A}_9$ ne possède aucun vrai sous-groupe transitif, dont ${}_1G'_{168}$ soit un sous-groupe propre. On en déduit que $G = \mathfrak{A}_9$, c. q. f. d.

Dans ce dernier cas où $r = 1$, donc $t = 6$, on peut aussi raisonner comme suit. Comme ${}_1G'_{168}$ contient des cycles d'ordre 7 qui permutent 7 quelconques des nombres $1, 2, \ldots, 8$, il existe un cycle C_1 d'ordre 7 de ${}_1G'_{168}$ qui a avec C cinq éléments communs. D'après ce qui précède, C et C_1 ne pourraient engendrer que l'un des deux groupes ${}_1G_{504}$ ou $\mathfrak{A}_9$ et comme $C \bar{\in} {}_1G_{504}$, C et C_1, donc aussi C et ${}_1G'_{168}$, engendrent nécessairement le groupe $\mathfrak{A}_9$.

Le lemme 2 est donc démontré.

Lemme 3. Soit ${}_1G_{504}$ le groupe d'ordre 504 engendré par les deux substitutions $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ et $(1\,2\,8\,9\,4\,5\,3)$ et soit $C = (b_1\,b_2 \ldots b_7)$ un cycle d'ordre sept qui permute au moins un nombre de la suite 1, $2, \ldots, 9$ ainsi que les $r \geq 1$ nombres $10, \ldots, 9 + r$ $(r \leq 6)$. Alors, si $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\} \subset \{1, 2, \ldots, 9 + r\}$, en composant C avec les substitutions de ${}_1G_{504}$, on obtient toujours l'alterné $\mathfrak{A}_{9+r}$.

Démonstration. Soit t le nombre d'éléments de l'ensemble $\{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$ qui font partie de la suite $1, 2, \ldots, 9$. On a, par définition de C, $1 \leq t \leq 6$.

Supposons d'abord que $t = 1$. Il ressort de la structure du groupe ${}_1G_{504}$ que ce groupe contient des cycles d'ordre 7 qui permutent sept quelconques des nombres $1, 2, \ldots, 9$. Il existe donc un cycle C_1 d'ordre 7 de ${}_1G_{504}$ qui a avec C un seul élément commun. C_1 laisse fixes deux nombres a et b de la suite $1, 2, \ldots, 9$ et il existe un cycle C_2 d'ordre 7 de ${}_1G_{504}$ qui permute les deux nombres a et b. C et C_1 engendrent le groupe alterné A des substitutions des éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 9 + r\} - \{a, b\}$, d'après le lemme I de Hoyer, et, en composant C_2 avec les substitutions de A, on obtient le groupe $\mathfrak{A}_{9+r}$, d'après le lemme II de Hoyer. Il s'ensuit que C et ${}_1G'_{504}$ engendrent le groupe $\mathfrak{A}_{9+r}$.

Soit, à présent, $t > 1$. Comme ${}_1G_{504}$ contient des cycles d'ordre 7 qui permutent sept quelconques des nombres $1, 2, \ldots, 9$, il existe un cycle $C' = (a_1\,a_2 \ldots a_7)$ de ${}_1G_{504}$, tel que C et C' ont en commun $t - 2$ éléments.

Si $t > 2$, les substitutions C et C' sont connexes, elles permutent ensemble tous les nombres $1, 2, \ldots, 9 + r$ et elles engendrent, d'après ce qui précède, le groupe $\mathfrak{A}_{9+r}$, d'où résulte le lemme 3 dans le cas considéré.

Et, si $t = 2$, il ressort de la structure de ${}_1G_{504}$ que ce groupe contient un cycle d'ordre sept, soit $C'' = (c_1 c_2 \ldots c_7)$, qui a avec C un seul élément commun. C et C'' permutent, ensemble, $8 + r$ des nombres $1, 2, \ldots, 9 + r$ et ils engendrent, d'après le lemme I de Hoyer, le groupe alterné A des substitutions des éléments qu'ils permutent. Soit a le nombre de la suite $1, 2, \ldots, 9$ qui n'est permuté ni par C ni par C'' et soit C''' un cycle du septième ordre de ${}_1G_{504}$ qui permute a. D'après le lemme II de Hoyer, C''' et A engendrent le groupe $\mathfrak{A}_{9+r}$. Le lemme 3 est donc démontré.

Démonstration de la proposition 1. Soit S un système connexe de cycles du septième ordre qui permutent, dans leur ensemble, un nombre $n \geq 10$ d'éléments. Rangeons les cycles de S en une suite

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m , \tag{1}$$

telle que σ_1 est un cycle quelconque de S et que, quel que soit l'indice $i \geq 2$, σ_i est un cycle de S qui a au moins un élément commun avec l'un au moins des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}$. Il est toujours possible de former une telle suite 1), puisque le système S est connexe. Supprimons dans la suite 1) tout cycle σ_i $(i \geq 2)$, s'il y en a, qui ne contient aucun élément laissé fixe par chacun des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}$.

Soit 2) $C_1, C_2, \ldots, C_r$ la suite des cycles d'ordre 7 ainsi obtenue. Quel que soit l'indice $i \geq 2$, C_i a au moins un élément commun avec l'un au moins des cycles $C_1, \ldots, C_{i-1}$ et permute au moins un élément laissé fixe par chacun des cycles $C_1, \ldots, C_{i-1}$, et les cycles $C_1, C_2, \ldots, C_r$ permutent, dans leur ensemble, les mêmes éléments que $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ et ils constituent également un système connexe. Pour démontrer la proposition 1, il nous suffira de prouver que les cycles 2) engendrent toujours le groupe alterné des substitutions des éléments qu'ils permutent. C'est ce que nous allons faire.

Comme tous les cycles C_i $(1 \leq i \leq r)$ sont d'ordre 7 et qu'ils permutent dans leur ensemble un nombre $n \geq 10$ d'éléments, on a $r \geq 2$.

Si les deux cycles C_1 et C_2 engendrent le groupe alterné des substitutions des éléments qu'ils permutent, la proposition à démontrer résulte alors immédiatement du lemme II de Hoyer.

Supposons que C_1 et C_2 n'engendrent pas le groupe alterné des substitutions des éléments qu'ils permutent. Alors, d'après les hypothèses faites sur la suite 2) et d'après ce qui précède, C_1 et C_2 ont 5 ou 6 éléments communs. Soit G le groupe engendré par C_1 et C_2.

Si a) C_1 et C_2 ont 6 éléments communs, le groupe G est de degré 8 et il est simplement isomorphe à l'un des trois groupes ${}_1G'_{56}$, ${}_1G'_{168}$ ou ${}_1G_{1344}$.

Et si b) C_1 et C_2 ont cinq éléments communs, le groupe G est de degré 9 et il est simplement isomorphe à ${}_1G_{504}$.

Dans tous ces cas, comme les substitutions 2) permutent, dans leur ensemble, un nombre $n \geq 10$ d'éléments, on a $r \geq 3$ et C_3 permute au moins un élément laissé fixé par C_1 et C_2. Les substitutions C_1, C_2, C_3 permutent, ensemble, au moins 9 éléments dans le cas a) et au moins 10 éléments dans le cas b).

Dans le cas b), la substitution C_3 engendre, avec les substitutions de G, le groupe alterné des substitutions des éléments permutés par C_1, C_2 et C_3, d'après le lemme 3, d'où il découle aussitôt, d'après le lemme II de Hoyer, que $C_1, C_2, \ldots, C_r$ engendrent bien le groupe alterné des substitutions de tous les éléments permutés par ces cycles.

Dans le cas a), il peut encore arriver que C_1, C_2 et C_3 engendrent le groupe alterné des substitutions des éléments permutés par ces trois cycles et alors la proposition à démontrer résulte du lemme II de Hoyer. Ou bien tel n'est pas le cas et alors le nombre total d'éléments permutés par C_1, C_2 et C_3 est 9. Soit Γ le groupe engendré par les trois cycles C_1, C_2 et C_3. D'après les lemmes 1 et 2, le groupe G est alors nécessairement simplement isomorphe à ${}_1G'_{56}$ et le groupe Γ est simplement isomorphe à ${}_1G_{504}$. G est un sous-groupe de Γ et comme les cycles 2) permutent, dans leur ensemble, un nombre $n \geq 10$ d'éléments, on a $r \geq 4$ et le cycle C_4 est connexe avec Γ mais permute au moins un élément laissé fixe par toutes les substitutions de Γ. D'après le lemme 3, C_4 et Γ engendrent le groupe alterné des substitutions de tous les éléments permutés par les cycles C_1, C_2, C_3, C_4. La proposition à démontrer en résulte aussitôt, d'après le lemme II de Hover.

La proposition 1 est donc entièrement démontrée.

Définition. Soit $C = (a_1 a_2 \ldots a_m)$ un cycle d'ordre $m \geq 2$, soient i et j deux indices distincts quelconques compris au sens large entre 1 et m. Nous appelons *distance entre les éléments a_i et a_j dans le cycle C* et nous désignons par le symbole $\overset{c}{\overline{a_i a_j}}$ le plus petit entier positif, tel que $i + \overset{c}{\overline{a_i a_j}} \equiv j \pmod{m}$.

Proposition 2. *Soit n un entier > 7, soit S une substitution quelconque du groupe $\mathfrak{S}_n$ et soit T un cycle d'ordre 7 du groupe $\mathfrak{S}_n$, connexe avec S et qui contient, par conséquent, au moins un élément de chaque cycle de S. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions S et T soient imprimitives, c'est que C_i $(i = 1, 2, \ldots, t,\ \ t \leq 7)$ étant un cycle* *quelconque de* S, $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ih_i}$ $(1 \leq h_i \leq 7)$ *étant les éléments de* T *qui font partie de* C_i *et* m_i *étant l'ordre du cycle* C_i, *on ait*

1) $$D(\overset{c_1}{\overline{b_{11}b_{12}}}, \overset{c_1}{\overline{b_{11}b_{13}}}, \ldots, \overset{c_1}{\overline{b_{11}b_{1h_1}}}, \ldots, \overset{c_t}{\overline{b_{t1}b_{t2}}}, \overset{c_t}{\overline{b_{t1}b_{t3}}}, \ldots, \overset{c_t}{\overline{b_{t1}b_{th_t}}}, m_1, \ldots, m_t) > 1 \quad ,$$

les nombres $\overset{c_i}{\overline{b_{i1}b_{ij}}}(j = 2, \ldots, h_i)$ ne figurant dans 1) que si $h_i > 1$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, t$.

Démonstration. Soient S une substitution quelconque de $\mathfrak{S}_n$ et soit T un cycle d'ordre 7 de $\mathfrak{S}_n$, connexe avec S. Soit $T = (b_1 b_2 \ldots b_7)$, où $b_1, b_2, \ldots, b_7$ sont sept nombres distincts de la suite $1, 2, \ldots, n$. Comme les substitutions S et T sont, par hypothèse, connexes, S contient un nombre t de cycles satisfaisant les inégalités $1 \leq t \leq 7$. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_t$ les différents cycles de S. S et T étant connexe, le cycle d'ordre 7 de T contient au moins un élément de chaque cycle de S. Soient $b_{i1}, \ldots, b_{ih_i}$ $(1 \leq h_i \leq 7)$ les éléments de T qui $\in C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, soit $C_i = (a_{i1} a_{i2} \ldots a_{im_i})$ et soit $a_{i1} = b_{i1}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Montrons d'abord que la condition énoncée est nécessaire. En effet supposons que les substitutions S et T sont imprimitives. Comme T est d'ordre 7, les 7 nombres $b_1, b_2, \ldots, b_7$ font alors nécessairement partie d'un même système d'imprimitivité de S et de T. Soit k le nombre de systèmes d'imprimitivité de S et de T. On a $k \geq 2$. Aucun cycle de S ne saurait alors être du premier ordre. En effet, supposons le contraire et soit, par exemple, C_1 un cycle du premier ordre de S. S et T étant connexes, il existe donc un élément b_i de T, tel que $C_1 = (b_i)$. Comme S transforme b_i en lui-même, S doit transformer en lui-même tout le système d'imprimitivité E de S et T dont fait partie b_i et qui contient, d'après ce qui précède, tous les éléments de T. Cet ensemble E comprend donc la totalité des éléments de certains cycles de S et, comme $k \geq 2$, S et T ne sont pas connexes, ce qui est contradictoire. Donc $m_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, t$. On a $C_i = (a_{i1} a_{i2} \ldots a_{im_i})$ et $a_{i1} = b_{i1}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. S transforme l'ensemble $\{a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{t1}\}$ en $\{a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{t2}\}$ et ces deux ensembles sont nécessairement disjoints, puisque aucun cycle de S n'est du premier ordre. Je dis qu'aucun élément de l'ensemble $\{a_{12} \ldots a_{t2}\}$ ne fait partie du système d'imprimitivité E_1 de S et de T qui contient tous les éléments permutés par T. En effet, supposons le contraire et soit par exemple, a_{12} un élément de E_1. Mais alors comme E_1 est un système d'imprimitivité de S et de T et que S transforme un élément a_{11} de E_1 en un second élément a_{12} de E_1, S doit transformer tout l'ensemble E_1

en lui-même et, par conséquent, comme S et T sont connexes, tous les éléments de tous les cycles de S doivent appartenir à E_1, ce qui est contraire à l'hypothèse que S et T sont imprimitives et possèdent, par conséquent, au moins deux systèmes d'imprimitivité. Donc $a_{12} \bar{\in} E_1$. On voit de même qu'aucun des nombres $a_{22}, \ldots, a_{t2}$ ne fait partie de E_1. Tous les nombres $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{t2}$ font partie d'un même système d'imprimitivité $E_2 \neq E_1$ de S et T, alors que, d'après ce qui précède, les nombres $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{t1}$ font tous partie de E_1. De même, la substitution S transforme l'ensemble $\{a_{12}, \ldots, a_{t2}\}$ en $\{a_{13}, \ldots, a_{t3}\}$ et ces deux ensembles font partie de deux systèmes d'imprimitivité distincts de S et T, alors que l'ensemble $\{a_{13}, \ldots, a_{t3}\}$ est soit contenu dans E_1 soit contenu dans un système d'imprimitivité E_3 de S et de T, différent de E_1 et de E_2, en vertu de l'imprimitivité de S et de T. Et ainsi de suite. Soit h le plus petit entier ≥ 2, tel que l'un au moins des nombres †) $a_{1h+1}, \ldots, a_{th+1}$ fait partie de E_1. Alors en vertu de l'imprimitivité de S et de T, tous les nombres de la suite †) font alors partie de E_1, tous les nombres de la suite $a_{1h'}, \ldots, a_{th'}$ font partie d'un même système d'imprimitivité $E_{h'}$ de S et de T, quel que soit $h' = 1, 2, \ldots, h$, les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_h$ sont disjoints deux à deux, le nombre h est un diviseur de m_i, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, t$, $h = k =$ nombre de systèmes d'imprimitivité de S et de T, et quels que soient les éléments $a_{ij} a_{ij'}$ d'un cycle quelconque C_i de S, ces deux éléments font partie d'un même système d'imprimitivité de S et de T ou de deux systèmes d'imprimitivité différents suivant que $\overset{c_i}{\overline{a_{ij}\, a_{ij'}}} \equiv h \pmod{m_i}$ ou non. Et comme tous les nombres permutés par T font partie d'un même système d'imprimitivité E_1 de S et de T, on a donc

$$D\,(\overset{c_1}{\overline{b_{11}\, b_{12}}}, \overset{c_1}{\overline{b_{11}\, b_{13}}}, \ldots, \overset{c_1}{\overline{b_{11}\, b_{1h_1}}}, \ldots, \overset{c_t}{\overline{b_{t1}\, b_{t2}}}, \ldots, \overset{c_t}{\overline{b_{t1}\, b_{th_t}}}, m_1, \ldots, m_t) = h$$

et, comme $h = k > 1$, la condition énoncée est bien nécessaire.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. En effet, supposons qu'elle est satisfaite et soit

$$D\,(\overset{c_1}{\overline{b_{11}\, b_{12}}}, \ldots, \overset{c_1}{\overline{b_{11}\, b_{1h_1}}}, \ldots, \overset{c_t}{\overline{b_{t1}\, b_{t2}}}, \ldots, \overset{c_t}{\overline{b_{t1}\, b_{th_t}}}, m_1, \ldots, m_t) = h > 1\,,$$

soit $m_i = m_i' h$, $i = 1, 2, \ldots, t$, et soit

$$E_s = \{a_{1s}, a_{1s+h}, \ldots, a_{1\,s+(m_1'-1)h}, a_{2s}, a_{2s+h}, \ldots, a_{2\,s+(m_2'-1)h}, \ldots,$$
$$a_{ts}, a_{ts+h}, \ldots, a_{t\,s+(m_t'-1)h}\}, s = 1, 2, \ldots, h\,.$$

La substitution T transforme chacun des ensembles E_s en lui-même, alors que S transforme E_s en E_{s+1}, $s = 1, 2, \ldots, h-1$, et E_h est E_1. Donc les substitutions S et T sont imprimitives et admettent pour systèmes d'imprimitivité les h ensembles $E_1, \ldots, E_s$.

La condition énoncée est donc bien suffisante, c. q. f. d.

Proposition 3. *Quel que soit l'entier* $n \geq 10$, *si* S *et* T *sont deux substitutions connexes et primitives du groupe* $\mathfrak{S}_n$, *telles que* $T = (b_1 b_2 \ldots b_7)$ *où* $b_1, b_2, \ldots, b_7$ *sont sept nombres de la suite* $1, 2, \ldots, n$, *alors les substitutions* S *et* T *engendrent toujours le groupe* $\mathfrak{S}_n$, *si* S *est de classe impaire, ou le groupe* $\mathfrak{A}_n$, *si* S *est de classe paire.*

Démonstration. Soient S et T deux substitutions qui satisfont à l'énoncé de la proposition 3. Montrons d'abord que les transformées de T par S et ses itérées constituent un système connexe de cycles d'ordre 7 qui permutent, dans leur ensemble tous les nombres permutés par S et T, c'est-à-dire tous les nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$. En effet, soit i un nombre quelconque de la suite $1, 2, \ldots, n$. Deux cas sont possibles. Ou bien i fait partie du cycle d'ordre 7 de T ou bien i n'est pas permuté par T, mais alors, comme S et T sont connexes, i appartient à un cycle C d'ordre >1 de S, cycle qui contient au moins un élément permuté par T. Soit $C = (a_1 a_2 \ldots a_r)$, $r \geq 2$. On peut toujours choisir les notations de façon à avoir $a_1 = b_j$ $(1 \leq j \leq 7)$. Soit $a_{1+h} = i$ $(h \geq 1)$. Alors la substitution $T_{h+1} = S^h T S^{-h}$ est un cycle du septième ordre, transformé de T par une itérée de S, qui permute l'élément i. Notamment, si on appelle c_i l'élément que S^h substitute à b_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$, on a $T_{h+1} = (c_1 c_2 \ldots c_7)$ et $c_j = i$. Ainsi donc, quel que soit le nombre i de la suite $1, 2, \ldots, n$, il existe au moins un cycle du septième ordre, transformé de T par une itérée de S, qui permute le nombre i.

Posons $T_i = S^{i-1} T S^{-i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (m désignant l'ordre de S). En particulier, $T_1 = T$. Montrons que les cycles †) $T_1, T_2, \ldots, T_m$ constituent un système connexe. En effet, supposons le contraire.

Soit $T_{i_1} = T_1 = T$. Soit T_{i_2} un cycle quelconque (s'il existe) pris parmi les cycles $T_2, \ldots, T_m$ et qui a avec T_{i_1} au moins un élément commun. Soit, à présent, j un entier >2 et $<m$ et supposons que nous ayons déjà défini les cycles $T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_{j-1}}$ de façon que chacun de ces cycles T_{i_l} appartienne à la suite $T_1, T_2, \ldots, T_m$ et ait au moins un élément commun avec l'un au moins des cycles $T_{i_1}, \ldots, T_{i_{l-1}}$, $l = 2, \ldots, j-1$. Soit alors (s'il existe) T_{i_j} un quelconque des cycles T_1, $T_2, \ldots, T_m$ non encore considéré et qui a au moins un élément commun

avec l'un au moins des cycles $T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_{j-1}}$. Comme le système formé de tous les cycles $T_1, T_2, \ldots, T_m$ n'est, par hypothèse, pas connexe, il existe un entier $j \geq 1$ et $< m$ ainsi que j cycles $T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_j}$ de la suite $T_1, T_2, \ldots, T_m$, tels que T_{1_l} $(l = 2, 3, \ldots, j)$ a au moins un élément commun avec l'un au moins des cycles $T_{i_1}, \ldots, T_{i_{l-1}}$, alors qu'aucun cycle de l'ensemble $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\} - \{T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_j}\}$ n'a d'élément commun avec l'un quelconque des cycles $T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}$. La substitution S transforme T_{i_1} en T_{i_1+1}, T_{i_2} en $T_{i_2+1}, \ldots, T_{i_j}$ en T_{i_j+1}, où $T_{i_1+1}, \ldots, T_{i_j+1}$ sont des cycles de la suite $T_1, T_2, \ldots, T_m$ qui constituent un système connexe puisque les cycles $T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}$ constituent, par définition, un système connexe. Soit E_1 l'ensemble des éléments permutés par les cycles $T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}$ et soit E_2 l'ensemble des éléments permutés par $T_{i_1+1}, \ldots, T_{i_j+1}$. On a évidemment $\overline{\overline{E}}_1 = \overline{\overline{E}}_2$, $E_1 \subset E$ et $E_2 \subset E$, où $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Je dis que $E_1 = E_2$ ou que $E_1 E_2 = 0$. En effet, supposons d'abord que E_1 et E_3 ont au moins un élément commun. Mais alors les cycles $T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}, T_{i_1+1}, \ldots, T_{i_j+1}$ forment, dans leur ensemble, un système connexe et comme, par hypothèse, il n'existe aucun cycle de l'ensemble $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\} - \{T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}\}$ qui ait au moins un élément commun avec l'un au moins des cycles $T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}$, il s'ensuit que les cycles $T_{i_1+1}, \ldots, T_{i_j+1}$ font tous partie de la suite $T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}$. Donc $E_2 \subset E_1$ et comme les deux ensembles E_1 et E_2 sont d'égale puissance, on a $E_1 = E_2$. Ou bien les ensembles E_1 et E_2 n'ont aucun élément commun. Transformons, dans ce dernier cas, les cycles $T_{i_1+1}, \ldots, T_{i_j+1}$ par S. Nous obtenons les cycles $T_{i_1+2}, \ldots, T_{i_j+2}$ de la suite $T_1, T_2, \ldots, T_m$, cycles qui forment un système connexe, puisque $T_{i_1+1}, \ldots, T_{i_j+1}$ en forment un, et qui permutent un ensemble E_3 d'éléments, de puissance égale à celle de E_2 donc aussi à celle de E_1. Les ensembles E_2 et E_3 sont disjoints puisque S transforme E_1 en E_2 et que $E_1 E_2 = 0$, et les ensembles E_1 et E_3 sont soit disjoints soit confondus, car si E_3 et E_1 ont au moins un élément commun, les $2j$ cycles $T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}, T_{i_1+2}, \ldots, T_{i_j+2}$ constituent un système connexe, donc, d'après les hypothèses faites sur $T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}$, $\{T_{i_1+2}, \ldots, T_{i_j+2}\} \subset \{T_{i_1}, \ldots, T_{i_j}\}$ et, par suite, $E_3 = E_1$. Et ainsi de suite. Finalement, après un nombre fini $t - 1$ d'opérations analogues, on obtient les t suites

$$T_{i_1+l-1}, T_{i_2+l-1}, \ldots, T_{i_j+l-1} \tag{l}$$

($l = 1, 2, \ldots, t$) de cycles provenant de la suite $T_1, T_2, \ldots, T_m$, telles que les cycles de la suite l) forment un système connexe et permutent un ensemble E_l d'éléments de E, tel que $\overline{\overline{E}}_1 = \overline{\overline{E}}_2 = \cdots = \overline{\overline{E}}_t$ et que S transforme E_l en E_{l+1} ($l = 1, 2, \ldots, t-1$) et E_t en E_1. Il s'ensuit que, si $E_1 + E_2 + \cdots + E_t \neq E$, comme tous les éléments du cycle $T = (b_1 b_2 \ldots b_t)$ font partie de E_1, que les substitutions S et T ne sont pas connexes, ce qui est contradictoire. Et si $E_1 + E_2 + \cdots + E_t = E$, S et T sont imprimitives et admettent pour systèmes d'imprimitivité les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_t$, ce qui est également contraire à notre hypothèse que les substitutions S et T sont connexes et primitives. Donc les cycles du septième ordre $T_1, T_2, \ldots, T_m$ permutent tous les nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$ et constituent un système connexe. Ils engendrent donc, d'après la proposition 1, le groupe $\mathfrak{A}_n$. Or le groupe engendré par $T_1, T_2, \ldots, T_m$ est un sous-groupe du groupe engendré par S et T. Si donc S est de classe impaire, S et T engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$, et, si S est de classe paire, S et T engendrent le groupe $\mathfrak{A}_n$, c. q. f. d.

Remarque 2. Par un raisonnement tout à fait analogue à celui effectué dans la démonstration de la proposition 3, on démontre que quels que soient les entiers $u \geq 2$ et $n > u$, si S et T sont deux substitutions connexes et primitives du groupe $\mathfrak{S}_n$ dont l'une T est un cycle d'ordre u, les substitutions $S^i T S^{-i}$ ($i = 0, 1, \ldots, m-1$, $m =$ ordre de S) forment un système de cycles d'ordre u qui permutent tous les éléments de la suite $1, 2, \ldots, n$ et qui constituent un système connexe.

(Reçu le 9 novembre 1948.)