Über endliche p-Gruppen, deren Elemente der Gleichung xP = 1 genügen.

Autor(en): **Meier-Wunderli, Heinrich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **24 (1950)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20297

Über endliche p-Gruppen*), deren Elemente der Gleichung $x^p = 1$**) genügen

Von Heinrich Meier-Wunderli, Rorbas (Zürich)

Von *Burnside* stammt die Vermutung: *Genügen alle Elemente einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit endlichem Erzeugendensystem der Gleichung $x^k = 1$, so ist die Gruppe endlich* [1]).

Nun ist $\mathfrak{G}$ als Faktorgruppe $\mathfrak{F}_n/\mathfrak{N}$ einer freien Gruppe $\mathfrak{F}_n$ mit n freien Erzeugenden nach dem Normalteiler $\mathfrak{N}$ darstellbar. $\mathfrak{N}$ enthält alle k-ten Potenzen der Elemente aus $\mathfrak{F}_n$. Bedeutet $\mathfrak{F}_{n,k}$ den Normalteiler aus $\mathfrak{F}_n$, der durch die k-ten Potenzen erzeugt wird, so ist $\mathfrak{G}$ offenbar Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{n,k} = \mathfrak{F}_n/\mathfrak{F}_{n,k}$. $\mathfrak{B}_{n,k}$ ist in diesem Sinne die allgemeinste Gruppe aus n Erzeugenden, deren Elemente der Gleichung $x^k = 1$ genügen.

Die Vermutung von Burnside würde also besagen, daß $\mathfrak{B}_{n,k}$ für jedes natürliche n und k eine endliche Gruppe darstellt. Das berühmte *Problem von Burnside* besteht gerade in der Bestimmung der Ordnung und der Struktur der Gruppen $\mathfrak{B}_{n,k}$ [2]).

Burnside selbst hat die Endlichkeit von $\mathfrak{B}_{n,2}$, $\mathfrak{B}_{n,3}$ und $\mathfrak{B}_{2,4}$ bewiesen; ebenfalls von Burnside stammt der Satz, wonach es endliche Faktorgruppen von $\mathfrak{B}_{2,p}$ gibt, deren Ordnung $\geqslant p^{2p-3}$ [3]).

In letzter Zeit hat *P. Hall* die schöne Entdeckung gemacht, daß die größte Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,5}$ der Klasse $c = 7$ existiert, und die Ordnung 5^{18} besitzt [4]).

Wir befassen uns in dieser Arbeit mit endlichen Faktorgruppen von $\mathfrak{B}_{n,p}$. Im ersten Teil entwickeln wir eine Methode, die es erlaubt, jede endliche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{n,p}$ zu konstruieren. Der zweite Teil bringt Anwendungen auf das Problem der Konstruktion von endlichen Faktorgruppen von $\mathfrak{B}_{2,p}$.

---

*) p = Primzahl.

**) 1 ist Gruppeneinheit.

1) Vgl. [2]. Zahlen in eckiger Klammer beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

2) Vgl. [1] und das ausführliche Literaturverzeichnis auf p. 158—160.

3) Vgl. [2] Schluß.

4) Mündliche Mitteilung.

Insbesondere werden wir durch direkte Konstruktion einen Beweis für das folgende Theorem erbringen:

Zu jeder Primzahl $p \neq 2, 3$ *existiert eine Faktorgruppe von* $\mathfrak{B}_{2,p}$ *von der Ordnung* $p^{\binom{p}{2}}$. *Sie ist 3-stufig metabelsch und von der Klasse* p.

Die bekannte *Identität von Zassenhaus* [5]) werden wir wiederfinden und in rein gruppentheoretischem Gewande beweisen.

Zum Abschluß konstruieren wir die *maximale endliche Faktorgruppe von* $\mathfrak{B}_{2,5}$ *der Klasse 6. Sie besitzt die Ordnung* 5^{14}. *Das vollständige Relationensystem ist durch* (72) *gegeben.*

I. TEIL

Ein Verfahren zur Konstruktion aller endlichen Faktorgruppen von $\mathfrak{B}_{n,p}$

§ 1. Der Begriff der "uniqueness Basis" einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$

P. Hall [6]) hat den Begriff der Basis einer Abelschen Gruppe verallgemeinert, indem er definiert hat: Ein geordnetes System von Elementen $P_1, \ldots, P_r$ $(P_i \neq 1)$ aus einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Ordnungen resp. $\pi_1, \ldots, \pi_r$ heißt eine U-Basis von $\mathfrak{G}$, wenn jedes Element P von $\mathfrak{G}$ auf eine und nur eine Weise dargestellt werden kann in der Form

$$P = P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_r^{x_r} \quad (0 \leqslant x_i < \pi_i \; ; \; i = 1, \ldots, r) \, . \tag{1}$$

Offenbar ist die Ordnung der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}$ gleich dem Produkt der Ordnungen der Basiselemente.

Wie *Hall* gezeigt hat, besitzen die regulären p-Gruppen stets eine U-Basis (1). Die regulären p-Gruppen sind dadurch definiert, daß in ihnen für irgend zwei Elemente a, b eine Beziehung besteht der Form

$$(ab)^{p^\alpha} = a^{p^\alpha} b^{p^\alpha} c_1^{p^\alpha} \ldots c_r^{p^\alpha} \, , \tag{2}$$

wobei p^α beliebige Primzahlpotenz und c_i Elemente der Ableitung der von a und b erzeugten Untergruppe $\{a, b\}$ darstellen.

Eine endliche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{n,p}$ genügt (2); sie besitzt somit als reguläre p-Gruppe eine U-Basis (1).

---

[5]) Vgl. [11].

[6]) Vgl. [5]. Diese Arbeit von P. Hall bildet die Grundlage unserer Untersuchungen.

Eine besonders einfache U-Basis dieser speziellen p-Gruppen erhält man folgendermaßen[7]: Ist $P_1, \ldots, P_n$ $(n \leqslant r)$ eine Minimalbasis unserer Gruppe, so wähle man als Basiselemente der elementaren Abelschen Faktorgruppen $\mathfrak{H}_{k-1}/\mathfrak{H}_k$ der absteigenden Zentralreihe Kommutatoren erster Stufe und vom Gewicht $k-1$ in den Komponenten P_i $(i = 1, \ldots, n)$. Durch Hintereinanderschreiben dieser Basiselemente nach steigendem k erhält man eine U-Basis unserer Gruppe mit den bemerkenswerten Eigenschaften[8]:

$$\begin{aligned} &P_j P_i = P_i P_j P_{j+1}^{\alpha_{j,i}^{j+1}} P_{j+2}^{\alpha_{j,i}^{j+2}} \ldots P_r^{\alpha_{j,i}^{r}} && (0 \leqslant \alpha_{j,i}^{k} < p\,;\ 1 \leqslant i < j < k \leqslant r) \\ &P_i^p = 1\,. && (i = 1, 2, \ldots, r) \qquad (3) \end{aligned}$$

Der Beweis ergibt sich sofort durch vollständige Induktion nach der Länge der absteigenden Zentralreihe.

Nun haben wir eben betont, daß man sich die $P_k (n < k \leqslant r)$ als gewisse Kommutatoren erster Stufe in den Komponenten P_i $(i = 1, \ldots, n)$ zu denken hat. Diese Bedeutung der P_k muß aber im Relationensystem (3) zutage treten, d. h. im System (3) besitzt jedes P_k $(n < k \leqslant r)$ mindestens eine Darstellung der Form

$$P_j P_i = P_i P_j P_k \qquad (1 \leqslant i \leqslant n\;;\quad i < j < k \leqslant r\;;\quad n < k)\,. \qquad (4)$$

Wir fassen diese Resultate zusammen in den

1. Satz: *Jede endliche p-Gruppe der Ordnung p^r, deren Elemente der Gleichung $x^p = 1$ genügen, besitzt eine U-Basis* (1) *mit den Relationen* (3) *und* (4).

§ 2. Die Konstanten $\alpha_{j,i}^{k}$

Wir betrachten jetzt die Gruppe mit den Erzeugenden $P_1, P_2, \ldots, P_r$ und dem System der definierenden Relationen (3).

Offenbar ist die Ordnung dieser Gruppe $\leqslant p^r$, denn wegen (3) kann jedes Element in der Gestalt (1) geschrieben werden. Hieraus geht hervor, daß eine endliche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{n,p}$ der Ordnung p^r durch (3) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist[9]).

Wir fragen daher nach den Bedingungen, denen die Konstanten in (3) zu genügen haben, damit die durch sie definierte abstrakte Gruppe als Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{n,p}$ erscheint.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in unserer Gruppe die Relation $x^p = 1$ identisch erfüllt ist, besteht nach Satz 1 im

---

[7]) Vgl. [5]. Theorem 2.8.2. [8]) Vgl. [6]. [9]) Vgl. [6].

folgenden: Berechnet man durch Benutzung von (3) die Funktionen $\mathfrak{F}_i^n(x)$ in den Unbestimmten x_i gemäß der Definition

$$\left(P_1^{x_1} P_2^{x_2} \dots P_r^{x_r}\right)^n = P_1^{\mathfrak{F}_1^n(x)} P_2^{\mathfrak{F}_2^n(x)} \dots P_r^{\mathfrak{F}_r^n(x)}, \tag{5}$$

so erweisen sich ihre Koeffizienten als Funktionen der $\alpha_{j,i}^k$ und wir haben zu fordern

$$\mathfrak{F}_i^p(x) \equiv 0 \mod p \tag{6}$$

bei beliebiger Wahl der x_i. Wir bezeichnen die sich aus (6) ergebenden Bedingungen für die $\alpha_{j,i}^k$ in der Folge stets als Bedingungen $\mathfrak{P}$ (*Potenz-Bedingung*).

Gehören die $\alpha_{j,i}^k$ in (3) zu einer Gruppe der Ordnung p^r, so stellen die P_i eine U-Basis dieser Gruppe dar; allgemeiner kann man aber sagen, daß auch $P_l, P_{l+1}, \dots, P_r$ $(1 \leqslant l \leqslant r)$ eine U-Basis für den Normalteiler $\mathfrak{N}_l = \{P_l, \dots, P_r\}$ darstellen. Die aufeinanderfolgenden Faktorgruppen $\mathfrak{N}_l/\mathfrak{N}_{l+1}$ sind alle zyklisch von der Ordnung p.

Unsere Gruppe muß sich also durch eine Reihe von zyklischen Erweiterungen der Ordnung p gewinnen lassen[10]).

Nach der Erweiterungstheorie existiert aber die Erweiterung $\mathfrak{N}_l$ von $\mathfrak{N}_{l+1}$ mit $\{P_l\}$ dann und nur dann, wenn die Abbildung

$$P_k \longrightarrow T_k^l = P_l^{-1} P_k P_l \qquad (l < k \leqslant r) \tag{7}$$

in $\mathfrak{N}_{l+1}$ einen Automorphismus bewirkt mit der Eigenschaft

$$P_l^{-p} P_k P_l^p = P_k . \tag{8}$$

Dabei haben wir von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß $P_{l+1}, \dots, P_r$ eine U-Basis für $\mathfrak{N}_{l+1}$ darstellen.

Es handelt sich nun darum, die Bedingungen (7) und (8) in unserer Gruppe geeignet zu formulieren.

Aus (3) folgt zunächst

$$T_k^l = P_k P_{k+1}^{\alpha_{k,l}^{k+1}} P_{k+2}^{\alpha_{k,l}^{k+2}} \dots P_r^{\alpha_{k,l}^r} . \tag{9}$$

Für die Gültigkeit von (7) ergeben sich daher die notwendigen Bedingungen

$$T_j^l T_i^l = T_i^l T_j^l T_{j+1}^{l^{\alpha_{j,i}^{j+1}}} T_{j+2}^{l^{\alpha_{j,i}^{j+2}}} \dots T_r^{l^{\alpha_{j,i}^r}} \tag{10}$$

$$T_i^{l^p} = 1 . \tag{11}$$

---

10) Vgl. [10]. III, § 7.

Drückt man in (10) die T_k^l gemäß (9) wieder durch die P_k aus, und bringt man beide Seiten vermittelst des Durchziehprozesses (3) auf die Form (1), so ergibt sich wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung durch Vergleich entsprechender Exponenten ein System von Kongruenzen mod. p, denen die $\alpha_{j,i}^k$ notwendig zu genügen haben. Wir bezeichnen diese Bedingungen, die *Assoziativitätsrelationen* gleichkommen, im folgenden stets als Bedingungen $\mathfrak{A}$.

Die Bedingung (11) ist in $\mathfrak{P}$ enthalten. Aber auch die Bedingung (8) kann als Bedingung $\mathfrak{P}$ gedeutet werden, denn man kann (8) in der Form schreiben

$$P_l^{-p}(P_k P_l P_k^{-1})^p = 1 ,$$

woraus hervorgeht, daß sie eine spezielle Potenzbedingung darstellt.

Es sei jetzt ein System von Erzeugenden P_i und ein System (3) von definierenden Relationen gegeben, derart aber, daß die zugehörigen $\alpha_{j,i}^k$ den Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$ genügen. Dann behaupten wir, daß die dadurch festgelegte abstrakte Gruppe die Ordnung p^r besitzt und der identischen Relation $x^p = 1$ genügt.

Ist $N_2 = \{P_2, P_3, \ldots, P_r\}$ Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{n,p}$ der Ordnung p^{r-1}, so hat man in den P_i $(i = 2, \ldots, r)$ eine U-Basis von $\mathfrak{N}_2$. Dann bilden auch die T_k^1 $(1 < k \leqslant r)$ eine U-Basis von $\mathfrak{N}_2$, denn da $\mathfrak{A}$ offenbar äquivalent mit (10) ist, kann jede Relation zwischen den T_k^1 in der Form $T_2^{1x_2}\, T_3^{1x_3} \ldots T_r^{1x_r} = 1$ geschrieben werden mit $(x_2, \ldots, x_r) \not\equiv (0)$ mod. p. Ist x_k der erste von 0 verschiedene Exponent, so gilt wegen der Bedeutung der T_k^1 in (9): $(P_k \ldots)^{x_k} \ldots = 1$. Da P_k sonst nicht mehr auftritt, schließt man wegen (3): $P_k^{x_k} \ldots = 1$. Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Eindeutigkeit der Basisdarstellung in $\mathfrak{N}_2$. Die Abbildung (7) stellt somit einen Automorphismus von $\mathfrak{N}_2$ dar. Wegen $\mathfrak{P}$ gilt auch (8) und es ist $x^p = 1$ eine identische Relation. Aus (7) und (8) ergibt sich die Existenz der Erweiterung $\mathfrak{N}_1$ von $\mathfrak{N}_2$ mit $\{P_1\}$. Da man die Konstruktion mit dem Zentrum der durch (3) definierten Gruppe beginnen kann, so ergibt sich durch Induktion die Richtigkeit der angekündigten Behauptung.

Damit ist der fundamentale Satz bewiesen:

2. Satz: *Man erhält alle p-Gruppen der Ordnung p^r, deren Elemente der Gleichung $x^p = 1$ genügen, wenn man in (3) für die $\alpha_{j,i}^k$ nacheinander eine Lösung der Assoziativitätsrelationen $\mathfrak{A}$ und der Potenzrelationen $\mathfrak{P}$ einsetzt.*

§ 3. Ein Konstruktionsprinzip

Die Sätze 1 und 2 erlauben es, die maximalen Faktorgruppen $\mathfrak{B}_{n,p,c}$ von $\mathfrak{B}_{n,p}$ der Klasse c schrittweise zu konstruieren.

Ist nämlich $\mathfrak{B}_{n,p,c}$ bereits gegeben, so sei $P_1, \ldots, P_n, \ldots, P_r$ eine U-Basis mit der Eigenschaft (4) und es liege in (3) ein System von definierenden Relationen von $\mathfrak{B}_{n,p,c}$ vor.

Es sollen die Existenzbedingungen für $\mathfrak{B}_{n,p,c+1}$ festgestellt werden. Nach Satz 1 wird man zu diesem Zweck ein System (3) von Relationen ansetzen, mit den $\alpha_{j,i}^{k}$ $(k \leqslant r)$ als Bekannten und den $\alpha_{j,i}^{r+1}$ als Unbekannten. Dieser Ansatz ist offenbar gleichwertig mit dem Versuch, eine zentrale Erweiterung von $\{P_{r+1}\}$ mit $\mathfrak{B}_{n,p,c}$ herbeizuführen. Bestimmt man dann gemäß (3) die Kongruenzen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$, so ist die Frage nach der Existenz von $\mathfrak{B}_{n,p,c+1}$ nach Satz 2 zurückgeführt auf die Frage nach der Existenz von geeigneten Lösungen dieser Kongruenzen. *Jede Lösung, in der nicht alle Konstanten, die zu $(c+1)$-fachen Kommutatoren gehören, $\equiv 0 \bmod. p$ sind, führt nach Satz 2 und (4) zu einer Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{n,p}$ der Klasse $c+1$.* Da P_{r+1} im Zentrum und Repräsentant der U-Basiselemente vom Gewicht $c+1$ ist, erhält man durch Trennung in unabhängige Basiselemente das vollständige Relationensystem der maximalen endlichen Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{n,p}$ der Klasse $c+1$.

Die Anzahl der unabhängigen Basiselemente vom Gewicht $c+1$ ist offenbar gleich der Anzahl der linear unabhängigen Konstanten in unsern Kongruenzen, die zu $c+1$-fachen Kommutatoren gehören,

II. TEIL

Über die endlichen Faktorgruppen von $\mathfrak{B}_{2,p}$

§ 1. Der 2-stufig metabelsche Fall

Der Inhalt dieses Abschnittes ist der Beweis des Satzes:

3. Satz: *Die größte 2-stufig metabelsche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,p}$ $(p \neq 2)$ besitzt die Ordnung $p^{\binom{p}{2}-(p-3)}$ und kann in den U-Basiselementen $P_{(0\,1)}$, $P_{(1,0)}$, $P_{(1,1)}$, $P_{(1,2)}$, $P_{(2,1)}$, $P_{(1,3)}$, $P_{(2,2)}$, $P_{(3,1)}, \ldots, P_{(p-2,1)}$ wie folgt definiert werden:*

$$\left.\begin{array}{lr}
P_{(1,0)}\,P_{(0,1)} = P_{(0,1)}\,P_{(1,0)}\,P_{(1,1)} & \\
P_{(a,b)}\,P_{(0,1)} = P_{(0,1)}\,P_{(a,b)}\,P_{(a,b+1)} & a,b \geqslant 1 \\
P_{(a,b)}\,P_{(1,0)} = P_{(1,0)}\,P_{(a,b)}\,P_{(a+1,b)} & a,b \geqslant 1 \\
P_{(a,b)}\,P_{(c,d)} = P_{(c,d)}\,P_{(a,b)} & a,b,c,d \geqslant 1 \\
\quad P_{(0,1)}^{p} = P_{(1,0)}^{p} = P_{(a,b)}^{p} = 1\,. & a,b \geqslant 1 \\
\quad a+b < p \neq 2\,. &
\end{array}\right\} \quad (12)$$

$P_{(c,d)}$ kommt vor $P_{(a,b)}$ zu stehen, wenn entweder $c+d<a+b$ oder wenn $c<a$ falls $c+d=a+b$.

Wie man erkennt, handelt es sich in (12) um die Definition einer Gruppe durch ein System (3) von definierenden Relationen in den U-Basiselementen $P_{(0,1)}$, $P_{(1,0)}$, $P_{(a,b)}$ mit $a, b \geqslant 1$. Die α nehmen dabei nur die Werte 0 und 1 an und die Bedingung (4) ist erfüllt. Außerdem erkennt man in $P_{(0,1)}, P_{(1,0)}$ ein System von minimalen Erzeugenden der Gruppe (12). Man findet leicht die Darstellungen:

$$P_{(a,b)} = \Big(P_{(1,0)},\ \underbrace{P_{(0,1)},\ \rlap{$\overbrace{\phantom{P_{(0,1)},\dots,P_{(0,1)},\ P_{(1,0)},\dots,P_{(1,0)}}}^{\text{beliebige Anordnung}}$}P_{(0,1)},\dots,P_{(0,1)}}_{b\,-\,\text{mal}},\ \underbrace{P_{(1,0)},\dots,P_{(1,0)}}_{(a-1)\,-\,\text{mal}}\Big). \tag{13}$$

Zum Beweis von Satz 3 haben wir nach Satz 2 lediglich das Erfülltsein der Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$ nachzuweisen. Nun lauten die mit $\mathfrak{A}$ äquivalenten Bedingungen (10) in unserm Fall

$$\begin{aligned}
P_{(a,b)}\,P_{(a,b+1)}\cdot P_{(1,0)}\,P_{(1,1)} &= P_{(1,0)}\,P_{(1,1)}\cdot P_{(a,b)}\,P_{(a,b+1)}\cdot P_{(a+1,b)}\,P_{(a+1,b+1)}\\
P_{(a,b)}\,P_{(a,b+1)}\cdot P_{(c,d)}\,P_{(c,d+1)} &= P_{(c,d)}\,P_{(c,d+1)}\cdot P_{(a,b)}\,P_{(a,b+1)}\\
P_{(a,b)}\,P_{(a+1,b)}\cdot P_{(c,d)}\,P_{(c+1,d)} &= P_{(c,d)}\,P_{(c+1,d)}\cdot P_{(a,b)}\,P_{(a+1,b)}\,.
\end{aligned}$$

Dies sind aber Folgerelationen von (12), wie man leicht nachrechnet.

Wir zeigen jetzt, daß auch die Bedingungen $\mathfrak{P}$ durch (12) erfüllt werden. Zu diesem Zweck berechnen wir die Kompositionsfunktionen $f_{(a,b)}$, die wir definieren durch

$$\begin{aligned}
P_{(0,1)}^{x(0,1)}\,P_{(1,0)}^{x(1,0)}\,P_{(1,1)}^{x(1,1)}\dots P_{(a,b)}^{x(a,b)}\cdot P_{(0,1)}^{y(0,1)}\,P_{(1,0)}^{y(1,0)}\,P_{(1,1)}^{y(1,1)}\dots P_{(a,b)}^{y(a,b)} &=\\
= P_{(0,1)}^{f(0,1)}\,P_{(1,0)}^{f(1,0)}\,P_{(1,1)}^{f(1,1)}\dots P_{(a,b)}^{f(a,b)}\,. &
\end{aligned} \tag{14}$$

Man gelangt besonders einfach zu diesen Funktionen, wenn man die nützlichen Formeln notiert:

$$P_{(1,0)}^{x(1,0)}\cdot P_{(0,1)}^{y(0,1)} = P_{(0,1)}^{y(0,1)}\cdot P_{(1,0)}^{x(1,0)}\prod_{a,b\geqslant 1}^{a+b<p} P_{(a,b)}^{\binom{x(1,0)}{a}\binom{y(0,1)}{b}} \tag{15}$$

$$P_{(a,b)}^{x(a,b)}\cdot P_{(0,1)}^{y(0,1)} = P_{(0,1)}^{y(0,1)}\cdot P_{(a,b)}^{x(a,b)}\prod_{\tau=1}^{a+b+\tau<p} P_{(a,b+\tau)}^{x(a,b)\cdot\binom{y(0,1)}{\tau}} \tag{16}$$

$$P_{(a,b)}^{x(a,b)}\cdot P_{(1,0)}^{y(1,0)} = P_{(1,0)}^{y(1,0)}\cdot P_{(a,b)}^{x(a,b)}\prod_{\varrho=1}^{a+b+\varrho<p} P_{(a+\varrho,b)}^{x(a,b)\cdot\binom{y(1,0)}{\varrho}}\,. \tag{17}$$

Wir beweisen diese Formeln, indem wir den Durchziehprozeß (12) auf die linken Seiten anwenden. Um etwa (15) zu beweisen, schreiben wir den Ausdruck links des Gleichheitszeichens einer schönen Idee von *P. Hall*[11]) folgend in der Form

$$P^{(1)}_{(1,0)} \cdot P^{(2)}_{(1,0)} \cdot P^{(3)}_{(1,0)} \ldots P^{(x(1,0))}_{(1,0)} \cdot P^{(1)}_{(0,1)} \cdot P^{(2)}_{(0,1)} \cdot P^{(3)}_{(0,1)} \ldots P^{(y(0,1))}_{(0,1)}$$

$$P^{(i)}_{(1,0)} \equiv P_{(1,0)} \qquad i = 1, 2, \ldots, x_{(1,0)} \,.$$

$$P^{(j)}_{(0,1)} \equiv P_{(0,1)} \qquad j = 1, 2, \ldots, y_{(0,1)} \,.$$

Übt man (12) auf diesen Ausdruck aus, indem man zuerst $P^{(1)}_{(0,1)}$ ganz nach links schiebt, dann der Reihe nach $P^{(2)}_{(0,1)}, \ldots, P^{(y(0,1))}_{(0,1)}$ und zuletzt noch die $P^{(i)}_{(1,0)}$ gleichermaßen nach links schafft, beginnend bei $P^{(1)}_{(1,0)}$, bis sie alle hinter die $P^{(j)}_{(0,1)}$ zu stehen kommen, so hat man zufolge (12) lediglich Kommutatoren einzuführen der Form

$$P_{(a,b)} = \left(P^{(i_1)}_{(1,0)}, P^{(j_1)}_{(0,1)}, P^{(j_2)}_{(0,1)}, \ldots, P^{(j_b)}_{(0,1)}, P^{(i_2)}_{(1,0)}, P^{(i_3)}_{(1,0)}, \ldots, P^{(i_a)}_{(1,0)}\right)$$

$$\text{mit} \quad \begin{array}{l} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_a \leqslant x_{(1,0)} \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_b \leqslant y_{(0,1)} \end{array} \,.$$

$P_{(a,b)}$ tritt also genau so oft auf[12]), als es Lösungen gibt in ganzen Zahlen, die den obigen Bedingungen genügen. Solcher gibt es in der Tat

$$\binom{x_{(1,0)}}{a}\binom{y_{(0,1)}}{b}.$$

Nach der Erklärung der $f_{(a,b)}$ hat man zu ihrer Bestimmung das Produkt auf der linken Seite von (14) auf Basisdarstellung zu bringen, unter Berücksichtigung von (12). Zu diesem Zweck schieben wir wie vorhin alle $P_{(a,b)}$ ihrer Anordnung gemäß sukzessive nach links; wenn man nur diejenigen Glieder notiert, die zu $f_{(a,b)}$ einen Beitrag liefern, so findet man in den einzelnen Schritten des Durchziehprozesses:

1. Beim Durchgang von $P_{(0,1)}$ entstehen zufolge (15) und (16) Beiträge der Form

$$\binom{x_{(1,0)}}{a}\binom{y_{(0,1)}}{b} + \sum_{\tau=0}^{b-1} x_{(a,b-\tau)} \binom{y_{(0,1)}}{\tau}$$

d. h. nach dem Durchgang hat unser Produkt die Gestalt angenommen

$$P^{x(0,1)+y(0,1)}_{(0,1)} P^{x(1,0)}_{(1,0)} \prod_{\substack{a+b<p \\ a,b \geqslant 1}} P_{(a,b)}^{\binom{x(1,0)}{a}\binom{y(0,1)}{b} + \sum\limits_{\tau=0}^{b-1} x(a,b-\tau)\binom{y(0,1)}{\tau}} \cdot P^{y(1,0)}_{(1,0)} P^{y(1,1)}_{(1,1)} \ldots P^{y(a,b)}_{(a,b)}$$

---

[11]) Vgl. [5]. Insbesondere § 3: A formula for $(PQ)^x$. Existenzbeding. 3.4.4, 5, 6.

[12]) Vgl. [5], § 3.

2. Beim Durchgang von $P_{(1,0)}$ erhalten wir wegen (12) und (17) Beiträge der Form

$$\sum_{\varrho=0}^{a-1} \left\{ \binom{x_{(1,0)}}{a-\varrho} \binom{y_{(0,1)}}{b} + \sum_{\tau=0}^{b-1} x_{(a-\varrho,\, b-\tau)} \binom{y_{(0,1)}}{\tau} \right\} \binom{y_{(1,0)}}{\varrho} .$$

3. Da bei spätern Durchgängen von andern Elementen nur noch $P_{(a,b)}$ Beiträge liefern kann, so hat man die schöne Formel gefunden und bewiesen

$$\left.\begin{aligned} f_{(0,1)} &= x_{(0,1)} + y_{(0,1)} \\ f_{(1,0)} &= x_{(1\ 0)} + y_{(1,0)} \\ f_{(a,b)} &= y_{(a,b)} + \sum_{\varrho=0}^{a-1} \binom{x_{(1,0)}}{a-\varrho} \binom{y_{(1,0)}}{\varrho} \binom{y_{(0,1)}}{b} + \\ &+ \sum_{\varrho=0}^{a-1} \sum_{\tau=0}^{b-1} x_{(a-\varrho,\, b-\tau)} \binom{y_{(1,0)}}{\varrho} \binom{y_{(0,1)}}{\tau} \qquad (a-\varrho\,,\, b-\tau \geqslant 1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Jetzt ist es nicht mehr schwierig, die Funktionen $\mathfrak{F}^n_{(a,b)}$, die wir in (5) definiert haben, zu bestimmen. Es gilt nämlich die Entwicklung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^n_{(0,1)} &= n \cdot x_{(0,1)} \\ \mathfrak{F}^n_{(1,0)} &= n \cdot x_{(1,0)} \\ \mathfrak{F}^n_{(a,b)} &= \binom{n}{a+b} \binom{a+b-1}{b} x^a_{(1,0)}\, x^b_{(0,1)} + \cdots \left(\text{Terme in } \binom{n}{w} \text{ mit } 1 \leqslant w < a+b\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Man hat sich dabei die Funktion $\mathfrak{F}^n_{(a,b)}$ nach der Unbestimmten n entwickelt zu denken in die eindeutig bestimmte Gestalt

$$c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \cdots + c_k\binom{n}{k}\,. \tag{20}$$

Zum Beweis kann man induktiv vorgehen, da die Formeln (19) für die beiden ersten Funktionen $\mathfrak{F}^n_{(0,1)}$ und $\mathfrak{F}^n_{(1,0)}$ sicher richtig sind. Es sei die Formel als richtig erkannt für alle $\mathfrak{F}^n_{(a,b)}$ mit $1 < a + b < k$. Dann beweisen wir ihre Gültigkeit für alle $\mathfrak{F}^n_{(a,b)}$ mit $a + b = k$.

Nach der Definition in (5) hat man

$$P_{(0,1)}^{\mathfrak{F}^{n-1}_{(0,1)}} \cdots P_{(a,b)}^{\mathfrak{F}^{n-1}_{(a,b)}} \cdot P_{(0,1)}^{x_{(0,1)}} \cdots P_{(a,b)}^{x_{(a,b)}} = P_{(0,1)}^{\mathfrak{F}^{n}_{(0,1)}} \cdots P_{(a,b)}^{\mathfrak{F}^{n}_{(a,b)}}\,. \tag{21}$$

Durch Anwendung von (18) auf (21) folgt

$$\mathfrak{F}^{n}_{(a,b)} = x_{(a.b)} + \sum_{\varrho=0}^{a-1} \binom{(n-1)\,x_{(1,0)}}{a-\varrho} \binom{x_{(1,0)}}{\varrho} \binom{x_{(0,1)}}{b} +$$

$$+ \sum_{\varrho=0}^{a-1} \sum_{\tau=0}^{b-1} \mathfrak{F}^{n-1}_{(a-\varrho,\, b-\tau)} \binom{x_{(1,0)}}{\varrho} \binom{x_{(0,1)}}{\tau} \,. \tag{22}$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{F}^{n}_{(a,b)} = \mathfrak{F}^{n-1}_{(a,b)} + \sum_{\varrho=0}^{a-1} \binom{(n-1)\,x_{(1\ 0)}}{a-\varrho} \binom{x_{(1,0)}}{\varrho} \binom{x_{(0,1)}}{b} +$$

$$+ \mathfrak{F}^{n-1}_{(a-1,b)}\, x_{(0,1)} + \mathfrak{F}^{n-1}_{(a,b-1)}\, x_{(0,1)} + \cdots \tag{23}$$

Aus (23) folgt aber

$$\mathfrak{F}^{n}_{(a,b)} = \sum_{\varepsilon=1}^{n-1} \left\{ \sum_{\varrho=0}^{a-1} \binom{\varepsilon\, x_{(1,0)}}{a-\varrho} \binom{x_{(1,0)}}{\varrho} \binom{x_{(0,1)}}{b} + \mathfrak{F}^{\varepsilon}_{(a-1,b)}\, x_{(1,0)} + \mathfrak{F}^{\varepsilon}_{(a,b-1)}\, x_{(0,1)} + \cdots \right\} \tag{24}$$

Unter Beachtung der einfach zu beweisenden Entwicklung

$$\binom{n\,x}{a} = \binom{n}{a} x^{a} + \binom{n}{a-1} (a-1)\, x^{a-2} \binom{x}{2} + \cdots \tag{25}$$

und nach Induktionsvoraussetzung erkennt man, daß bei der Überführung von (24) in die Form (20) nur die folgenden Terme höchster Dimension in $\binom{n}{\lambda}$ entstehen:

1\. Fall $a, b \neq 1$. $\quad \mathfrak{F}^{n}_{(a,b)} = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{n-1} \left\{ \mathfrak{F}^{\varepsilon}_{(a-1,b)}\, x_{(1,0)} + \mathfrak{F}^{\varepsilon}_{(a,b-1)}\, x_{(0,1)} \right\}$ (26)

2\. Fall $a = 1$. $\quad \mathfrak{F}^{n}_{(a,b)} = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{n-1} \left\{ \mathfrak{F}^{\varepsilon}_{(a,b-1)}\, x_{(0,1)} \right\}$ (27)

3\. Fall $b = 1$. $\quad \mathfrak{F}^{n}_{(a,b)} = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{n-1} \left\{ \binom{\varepsilon\, x_{(1,0)}}{a} \binom{x_{(0,1)}}{b} + \mathfrak{F}^{\varepsilon}_{(a-1,b)}\, x_{(1,0)} \right\}$. (28)

Durch Einsetzen der Werte aus (19) in (26), (27) und (28) ergibt sich nach (25) sofort das behauptete Resultat.

Damit sind die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$ als erfüllt nachgewiesen. Die durch (12) definierte Gruppe ist also in der Tat Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,p}$. Sie ist Faktorgruppe der Klasse $c = p - 1$.

Daß es sich um die maximale 2-stufig metabelsche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,p}$ handeln muß, werden wir im nächsten Abschnitt einsehen.

Nimmt man dieses Resultat mit hinzu, so ist der Satz 3 in allen Teilen bewiesen.

Zu den Formeln (18) haben wir noch eine Bemerkung zu machen. Ihrer Bedeutung wegen kann man sie nämlich auffassen als Multiplikations-Gesetz der Punkte Q eines n-dimensionalen Euklidischen Raumes. Verstehen wir unter dem Punkt $Q_{(x)}$ den Punkt mit den Koordinaten $(x_{(0,1)}, x_{(1,0)}, x_{(1,1)}, \ldots, x_{(a,b)})$, so definieren wir:

$$Q_{(x)}\, Q_{(y)} = Q_{(f)} \,.$$

Diese Multiplikation genügt sämtlichen Gruppenaxiomen. Nicht trivial ist die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes. Es ist aber in unserer Gruppe (12) das assoziative Gesetz in der folgenden Form richtig:

$$f_{(a,b)}\big(f_{(a,b)}\,(x\,;\,y)\;;\;z\big) \equiv f_{(a,b)}\big(x\,;\,f_{(a,b)}\,(y\,;\,z)\big) \mod p\,.$$

Nun bleibt diese Eigenschaft richtig, auch wenn die zunächst fest gedachte Primzahl $p \neq 2$ beständig größere Primzahlen durchläuft. Hieraus schließt man aber, daß die obige Kongruenz sogar eine Identität sein muß. Das assoziative Gesetz ist damit als erfüllt nachgewiesen.

Damit ist der Satz bewiesen:

4. Satz: *Die Funktionen*

$$f_{(0,1)} = x_{(0,1)} + y_{(0,1)}$$
$$f_{(1,0)} = x_{(1,0)} + y_{(1,0)}$$
$$f_{(a,b)} = y_{(a,b)} + \sum_{\varrho=0}^{a-1} \binom{x_{(1,0)}}{a-\varrho}\binom{y_{(1,0)}}{\varrho}\binom{y_{(0,1)}}{b} +$$
$$+ \sum_{\varrho=0}^{a-1}\sum_{\tau=0}^{b-1} x_{(a-\varrho,\, b-\tau)} \binom{y_{(1,0)}}{\varrho}\binom{y_{(0,1)}}{\tau} \qquad (a-\varrho\,,\; b-\tau \geqslant 1)$$

sind bei festem $a, b \geqslant 1$ *das Multiplikationsgesetz einer n-parametrigen Lieschen Gruppe im vollen* $\mathfrak{R}_n$. *Es ist* $n = \binom{a}{2} + \binom{b}{2} + b(a-1) + 3.$

Die Dimension n ist nichts anderes als die Nummer, die den $P_{(a,b)}$ mit $a, b \geqslant 1$ in der früher beschriebenen Anordnung zukommt.

Durch Verallgemeinerung des Systemes (12) kann man auch im Fall von mehr als zwei minimalen Erzeugenden eine analoge 2-stufig metabelsche Gruppe aufstellen. Wir behalten uns vor, in einer andern Arbeit auf diese Verallgemeinerung zurückzukommen.

§ 2. Eine 3-stufig metabelsche Faktorgruppe der Klasse p und die Identität von Zassenhaus

Das in I, § 3 umrissene Konstruktionsprinzip besagt: Wenn es eine größere endliche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,p}$ gibt, als die in II, § 1 konstruierte, dann existiert eine zentrale Erweiterung einer zyklischen Gruppe $\{P\}$ der Ordnung p mit der in § 1 konstruierten Faktorgruppe der Klasse $p-1$, die wie folgt durch Erzeugende und Relationen definiert werden kann:

$$\left.\begin{aligned}
P_{(1,0)} P_{(0,1)} &= P_{(0,1)} P_{(1,0)} P_{(1,1)} \\
P_{(a,b)} P_{(0,1)} &= P_{(0,1)} P_{(a,b)} P_{(a,b+1)} P^{\alpha((a,b),(0,1))} && (a+b<p-1) \\
P_{(a,b)} P_{(0,1)} &= P_{(0,1)} P_{(a,b)} P^{\alpha((a,b),(0,1))} && (a+b=p-1) \\
P P_{(0,1)} &= P_{(0,1)} P \\
P_{(a,b)} P_{(1,0)} &= P_{(1,0)} P_{(a,b)} P_{(a+1,b)} P^{\alpha((a,b),(1,0))} && (a+b<p-1) \\
P_{(a,b)} P_{(1,0)} &= P_{(1,0)} P_{(a,b)} P^{\alpha((a,b),(1,0))} && (a+b=p-1) \\
P P_{(1,0)} &= P_{(1,0)} P \\
P_{(a,b)} P_{(c,d)} &= P_{(c,d)} P_{(a,b)} P^{\alpha((a,b),(c,d))} && (a+b+c+d \leqslant p) \\
P_{(a,b)} P_{(c,d)} &= P_{(c,d)} P_{(a,b)} && (a+b+c+d > p) \\
P P_{(a,b)} &= P_{(a,b)} P \\
P_{(0,1)}^{p} &= P_{(1,0)}^{p} = P_{(a,b)}^{p} = P^{p} = 1 \,.
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Das zu adjungierende Element hat man sich nach (4) als p-fachen Kommutator in den $P_{(0,1)}$ und $P_{(1,0)}$ zu denken. Der wesentliche Schritt besteht jetzt in der Ableitung und der Diskussion der Kongruenzen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$.

Aus (29) ergibt sich ohne weiteres die antikommutative Relation

$$\alpha_{((a,b),(c,d))} + \alpha_{((c,d),(a,b))} \equiv 0 \mod p \qquad (30)$$

und nach leichter Rechnung findet man als Relationen $\mathfrak{A}$ die merkwürdigen Kongruenzen mod. p:

$$\underline{\alpha_{((a,b+1),(1,0))}+\alpha_{((a,b),(1,1))}+\alpha_{((a,b+1),(1,1))}+\alpha_{((a+1,b),(1,1))}+}$$
$$\underline{+\alpha_{((a+1,b),(a,b+1))}+\alpha_{((a+1,b+1),(1,1))}\equiv\alpha_{((a+1,b),(0,1))}} \,. \tag{31}$$

$$\underline{\alpha_{((a,b+1),(c,d))}+\alpha_{((a,b),(c,d+1))}+\alpha_{((a,b+1),(c,d+1))}\equiv 0} \,. \tag{32}$$

$$\underline{\alpha_{((a+1,b),(c,d))}+\alpha_{((a,b),(c+1,d))}+\alpha_{((a+1,b),(c+1,d))}\equiv 0} \,. \tag{33}$$

Beschränkt man sich auf den 2-stufig metabelschen Fall, so erhält man hieraus die einzige Relation

$$\alpha_{((a,b+1),(1,0))}\equiv\alpha_{((a+1,b),(0,1))} \qquad (a+b+2\leqslant p)\,. \tag{34}$$

Zur Erfüllung der Bedingung (4) haben wir zu verlangen: Eine von den beiden Konstanten in (34) muß $\equiv 0$ sein mod. p, sobald $a+b+2<p$. Aus demselben Grunde hat man zu setzen

$$\alpha_{((a,b+1),(1,0))}\equiv\alpha_{((a+1,b),(0,1))}\equiv 1 \qquad (a+b+2=p) \tag{35}$$

Damit erhalten wir aber ein Relationensystem (12). Wegen (19) ergibt sich als Folgerung: *Die in* (12) *definierte Gruppe ist die größte 2-stufig metabelsche Faktorgruppe von* $\mathfrak{B}_{2,p}$. Der Beweis von Satz 3 ist damit vervollständigt.

Um die Relationen $\mathfrak{P}$ ableiten zu können, gehen wir aus von einer Identität für das Produkt $Q^y P^x$. Nach *T. E. Easterfield* gilt [13]): Ordnet man die Gesamtheit der Kommutatoren in den Komponenten P und Q in eine Reihe R_i nach steigenden Gewichten $w_i=p_i+q_i$, so gilt eine Identität der Form

$$\left.\begin{aligned} Q^y P^x &= P^x Q^y R_3^{f_3(x)\cdot g_3(y)} R_4^{f_4(x)\cdot g_4(y)} \ldots R_i^{f_i(x)\cdot g_i(y)} \ldots \\ f_i(x) &= a_1\binom{x}{1}+a_2\binom{x}{2}+\cdots+a_{p_i}\binom{x}{p_i} \\ g_i(y) &= b_1\binom{y}{1}+b_2\binom{y}{2}+\cdots+b_{q_i}\binom{y}{q_i} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

d. h. $f_i(x)$ und $g_i(y)$ sind ganzwertige Polynome, deren Grad durch das Gewicht von R_i in P resp. Q limitiert ist.

---

[13]) Vgl. [3]. Theorem *C*.

Hieraus schließen wir in Verbindung mit (19), daß ein Kommutator vom Gewicht a in $P_{(1,0)}$ und vom Gewicht b in $P_{(0,1)}$ zu $\mathfrak{F}^n(x)$ höchstens Beiträge liefert von der Form

$$\binom{n}{a+b} C_{(a,b)}\, x_{(1,0)}^{a}\, x_{(0,1)}^{b} + \left(\text{Glieder in } \binom{n}{\lambda} \text{ mit } 1 \leqq \lambda < a+b\right). \quad (37)$$

$C_{(a,b)}$ ist eine natürliche Zahl, die noch vom betrachteten Kommutator abhängt.

Insbesondere folgt, daß bei der Überführung von $\mathfrak{F}^n(x)$ in die Form (20) nur solche Kommutatoren Beiträge mit $\binom{n}{p}$ liefern, deren Gesamtgewicht in $P_{(1,0)}$ und $P_{(0,1)}$ mindestens p ist.

D. h. wir haben eine Entwicklung der Form

$$\mathfrak{F}^n(x) = \binom{n}{p}\left(\sum_{\varrho=1}^{p-1} \mathfrak{C}_{(\varrho,p-\varrho)}\, x_{(1,0)}^{\varrho}\, x_{(0,1)}^{p-\varrho}\right) + \left\{\text{Glieder in} \binom{n}{\lambda} \text{ mit } 1 \leqq \lambda < p\right\}. \quad (38)$$

Die Kongruenzen $\mathfrak{P}$ lauten daher

$$\mathfrak{C}_{(\varrho,p-\varrho)} \equiv 0 \quad \operatorname{mod} p\,(\varrho = 1, 2, \ldots, p-1). \quad (39)$$

Zur Berechnung der $\mathfrak{C}_{(\varrho,p-\varrho)}$ müssen wir von den Kongruenzen $\mathfrak{A}$ ausgehen. Aus (31), (32) und (33) folgt

$$\alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),(1,0))} + \alpha_{((\varrho-1,p-\varrho-1),(1,1))} \equiv \alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),(0,1))} \quad (40)$$

$$\alpha_{((\varrho-\tau,p-\varrho-\varepsilon),(\tau,\varepsilon))} + \alpha_{((\varrho-\tau,p-\varrho-(\varepsilon+1)),(\tau,\varepsilon+1))} \equiv 0 \quad (41)$$

$$\alpha_{((\varrho-\tau,p-\varrho-\varepsilon),(\tau,\varepsilon))} + \alpha_{((\varrho-(\tau+1),p-\varrho-\varepsilon),(\tau+1,\varepsilon))} \equiv 0\,. \quad (42)$$

Die allgemeine Lösung von (41) und (42) ist gegeben durch

$$\alpha_{((\varrho-\tau,p-\varrho-\varepsilon),(\tau,\varepsilon))} = (-1)^{\tau+\varepsilon} k^{(\varrho,p-\varrho)}\,. \quad (43)$$

$k^{(\varrho,p-\varrho)}$ ist zunächst eine willkürliche ganzzahlige Konstante, über die wir später verfügen werden.

Damit sind wir nun befähigt, die Bestimmung von $\mathfrak{F}^n(x)$ durchzuführen. Der Vorgang ist derselbe, wie bei der Ableitung der Formeln (19), d. h. wir bestimmen zunächst diejenigen Terme aus $f(x; y)$, die zu $\mathfrak{F}^n(x)$ Beiträge mit $\binom{n}{p}$ liefern. Bedenkt man, daß für $f(x; y)$ eine Darstellung gelten muß der Form

$$f(x; y) = x + y + (\text{Terme in } x \text{ und } y) \quad (44)$$

und betrachtet man $x_{(a,b)}$ und $y_{(a,b)}$ als Terme $(a+b)$-ter Dimension in x resp. y, so folgt aus (18), (19), (21), (25) mit (37), (38) und (44): *Nur diejenigen Terme aus $f(x\,;\,y)$ ergeben zu $\mathfrak{F}^n(x)$ Beiträge in $\binom{n}{p}$, die in x von der Dimension $p-1$ und in y von der Dimension* 1 *sind.*

Wir haben somit die Aufgabe zu lösen, alle Terme aus $f(x\,;\,y)$ aufzuzählen, die in x von der Dimension $p-1$ und in y von der Dimension 1 sind. Zu diesem Zweck ist die Kenntnis der zu (15), (16) und (17) analogen Formeln von großem Nutzen, denn wir müssen ja (14) vermittelst (29) in die Form (1) überführen. Das Mittel zu ihrer Berechnung wird geliefert durch eine elegante Methode von *P. Hall* [14]), die man dargestellt findet in seinen Arbeiten im Zusammenhang mit dem Beweis einer wichtigen Identität (*Hallsche Identität*). Für die Einzelheiten seiner Methode müssen wir auf diese unübertreffliche Darstellung verweisen.

Die Hallsche Methode besagt kurz folgendes: Soll das Produkt $P^x_{(a,b)}\,P^y_{(c,d)}$ auf Basisdarstellung gebracht werden, so gehe man aus von der gleichwertigen Darstellung

$$P^{(1)}_{(a,b)}\,P^{(2)}_{(a,b)}\cdots P^{(x)}_{(a,b)}\cdot P^{(1)}_{(c,d)}\,P^{(2)}_{(c,d)}\cdots P^{(y)}_{(c,d)}\;.$$

Die Indizes (i) sollen lediglich die Stellung der Faktoren ein für allemal festhalten. Die einzelnen Schritte bis zur Überführung in die Normalform bestehen nun darin, daß man bei $P^{(1)}_{(c,d)}$ beginnend alle Basiselemente ihrer Reihenfolge gemäß sukzessive nach links schiebt, so daß bei unter sich gleichen Basiselementen immer das am weitesten links stehende zuerst vom Durchziehprozeß erfaßt wird. Dieses Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab und es kommt nun alles darauf an, die Exponenten, die den einzelnen Basiselementen in der Darstellung (1) zukommen, zu ermitteln. Diese Exponenten sind offenbar gleichwertig mit der Anzahl der Basiselemente einer bestimmten Sorte, die im Zuge des Durchziehprozesses entstehen. Nun wird aber durch die Indizes (i) jedem Kommutator eindeutig ein Symbol zugeordnet, das man dadurch erhält, indem man an Stelle der Komponenten $P^{(i)}_{(a,b)}$ und $P^{(j)}_{(c,d)}$ in der symbolischen Schreibweise der Kommutatoren einfach die entsprechenden Indizes setzt. So wird z. B. dem Kommutator $(P^{(i)}_{(a,b)}, P^{(j)}_{(c,d)})$ das Symbol (i, j) zugeordnet. Die Frage ist also, welche Relationen zwischen den Zahlen eines solchen Symboles bestehen müssen, damit es zu einem Kommutator gehört, der im Durchziehprozeß wirklich auftritt. Der gesuchte Exponent ist dann gleich der Anzahl der Lösungen in natür-

[14]) Vgl. [5], § 3.

lichen Zahlen, die den Bedingungen genügen. Die Relationen, denen die Symbole zu unterliegen haben, können nach *Hall* rekursiv bestimmt werden — man findet sie in der genannten Abhandlung von *Hall* aufgezählt — so daß wir sie jeweilen ohne Begründung einfach übernehmen können.

In der Ableitung der Formel (15) hatten wir früher bereits alle Kommutatoren der Form (13) berücksichtigt.

Wegen der Anwesenheit von 2-ten Kommutatoren bleibt noch der Beitrag eines Kommutators von zwei Kommutatoren der Gestalt (13) abzuschätzen. Aus (37) ergibt sich sofort, daß die Dimension in x dieser Beiträge höchstens $p-2$ sein kann, so daß wir diese Beiträge gar nicht zu bestimmen brauchen.

Wir gehen weiter zum Analogon der Formel (16). Man hat hier noch den Einfluß der Kommutatoren zu berücksichtigen der Form

$$(P_{(a,b+\tau_1)}\,,\ P_{(a,b+\tau_2)}) =$$

$$= \left(\left(P^{(i_1)}_{(a,b)}\,,\ P^{(j_1)}_{(0,1)}\,,\ \ldots,\ P^{(j\tau_1)}_{(0,1)}\right),\ \left(P^{(i_1^*)}_{(a,b)}\,,\ P^{(j_1^*)}_{(0,1)}\,,\ldots,\ P^{(j^*_{\tau_2})}_{(0,1)}\right)\right)\,. \tag{45}$$

Als Existenzbedingungen ergeben sich nach *Hall*

$$i_1 < i_1^* \ ; \quad 1 \leqslant i_1 \leqslant x_{(a,b)} \ ; \quad 1 \leqslant i_1^* \leqslant x_{(a,b)}$$

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j\tau_1 \leqslant y(0,1) \ ; \quad 1 \leqslant j_1^* < j_2^* < \cdots < j^*_{\tau_2} \leqslant y(0,1)\,.$$

Man findet als Zahl der Lösungen

$$\binom{x_{(a,b)}}{2}\binom{y_{(0,1)}}{\tau_1}\binom{y_{(0,1)}}{\tau_2}$$

und mit Berücksichtigung von (29) die Zahl

$$\alpha_{((a,b+\tau_1),\,(a,b+\tau_2))}\binom{x_{(a,b)}}{2}\binom{y_{(0,1)}}{\tau_1}\binom{y_{(0,1)}}{\tau_2} \tag{46}$$

Entsprechend liefert die Entwicklung (17) noch Beiträge der Form

$$\alpha_{((a+\varrho_1,b),\,(a+\varrho_2,b))}\binom{x_{(a,b)}}{2}\binom{y_{(1,0)}}{\varrho_1}\binom{y_{(1,0)}}{\varrho_2}\,. \tag{47}$$

Die Bedingungen mit $i_1 = i_1^*$ können wir in beiden Fällen unberücksichtigt lassen, denn ihre Dimension in x ist nur $a + b < 2(a + b)$.

Für das Produkt ergibt sich noch die einfach zu bestätigende Formel:

$$P_{(a,b)}^{x(a,b)} \cdot P_{(c,d)}^{y(c,d)} = P_{(c,d)}^{y(c,d)} \cdot P_{(a,b)}^{x(a,b)} P^{\alpha((a,b),\ c,d))\, x(a,b)\, y(c,d)} . \qquad (48)$$

Bringt man nun die linke Seite von (14) auf die Form (1), so ergibt sich aus $f_{(a,b)}$ mit $a + b < p$ in (18), daß beim Durchgang von $P_{(0,1)}^{y(0,1)}$ und $P_{(1,0)}^{y(1,0)}$ nur die nachfolgend aufgezählten Terme erster Dimension in y entstehen:

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & x_{(a,b-1)}\, y_{(0,1)} & (a, b-1 \geqslant 1) \\ 2. & x_{(a-1,b)}\, y_{(1,0)} & (a-1, b \geqslant 1) \\ 3. & \binom{x_{(1,0)}}{a} y_{(0,1)} & (b = 1) \end{array}\right\} \qquad (49)$$

Für $a + b = p$ ergeben sich hieraus wegen (29) die Terme

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & \alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),\,(0,1))}\, x_{(\varrho,p-\varrho-1)}\, y_{(0,1)} & (\varrho = 1, 2, \ldots, p-2) \\ 2. & \alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),\,(1,0))}\, x_{(\varrho-1,p-\varrho)}\, y_{(1,0)} & (\varrho = 2, 3, \ldots, p-1) \\ 3. & \alpha_{((p-2,1),\,(1,0))} \binom{x_{(1,0)}}{p-1} y_{(0,1)} & \end{array}\right\} \qquad (50)$$

Es bleibt übrig, den Durchgang des Elementes $P_{(c,d)}^{x(c,d)}$ zu verfolgen, denn alle andern würden die Dimension 1 in y erhöhen. Mit Berücksichtigung von (48) folgt aus (49):

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & \alpha_{((a,b),\,(c,d))}\, x_{(a,b-1)}\, y_{(0,1)}\, x_{(c,d)} & (a, b-1 \geqslant 1) \\ 2. & \alpha_{((a,b),\,(c,d))}\, x_{(a-1,b)}\, y_{(1,0)}\, x_{(c,d)} & (a-1, b \geqslant 1) \\ 3. & \alpha_{((a,b),\,(c,d))} \binom{x_{(1,0)}}{a} y_{(0,1)}\, x_{(c,d)} & (b = 1) \end{array}\right\} \qquad (51)$$

Aus (46) und (47) ergeben sich noch die Terme

$$\left.\begin{array}{ll} 4. & \alpha_{((a,b+1),\,(a,b))} \binom{x_{(a,b)}}{2} y_{(0,1)} \\ 5. & \alpha_{((a+1,b),\,(a,b))} \binom{x_{(a,b)}}{2} y_{(1,0)} \end{array}\right\} \qquad (52)$$

Beachtet man die unter Satz 3 festgelegte Anordnung der $P_{(a,b)}$, so findet man zufolge (51) und (52) für die natürlichen Zahlen a, b, c, d leicht die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & a+b=\dfrac{p+1}{2}\,;\quad c+d=\dfrac{p-1}{2}\,;\quad c>a\,;\quad a+c=\varrho\,;\quad b+d=p-\varrho\,. \\
 & \hfill (\varrho=2,\ldots,p-2) \\
2. & a+b=\dfrac{p+1}{2}\,;\quad c+d=\dfrac{p-1}{2}\,;\quad c>a-1;\quad a+c=\varrho;\quad b+d=p-\varrho\,. \\
 & \hfill (\varrho=2,\ldots,p-2) \\
3. & a+c+d=p-1\,;\quad c+d<a+1\,;\quad a+c=\varrho\,;\quad d+1=p-\varrho\,. \\
 & \hfill (\varrho=2,\ldots,p-2) \\
4. & a+b=\dfrac{p-1}{2}\,;\quad 2a=\varrho\,;\quad 2b+1=p-\varrho\,.\quad (\varrho=2,\ldots,p-2) \\
5, & a+b=\dfrac{p-1}{2}\,;\quad 2a+1=\varrho\,;\quad 2b=p-\varrho\,.\quad (\varrho=2,\ldots,p-2)
\end{array}\right\} (53)$$

In (50), (51), (52) und (53) haben wir alle Glieder aus $f(x\,;y)$ vor uns, die in x von der Dimension $p-1$ und in y von der Dimension 1 sind. D. h. es gilt eine Entwicklung der Form:

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\alpha_{((1,p-2),\,(0,1))}\,x_{(1,p-2)}\,y_{(0,1)}\right\}\ \text{I.} \\
&\left.\begin{aligned}
&+\alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),(0,1))}\,x_{(\varrho,p-\varrho-1)}\,y_{(0,1)}+\alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),\,(1,0))}\,x_{(\varrho-1,p-\varrho)}\,y_{(1,0)} \\
&+\alpha_{\left(\left(\frac{\varrho+1}{2},\frac{p-\varrho}{2}\right),\left(\frac{\varrho-1}{2},\frac{p-\varrho}{2}\right)\right)}\binom{x_{\left(\frac{\varrho-1}{2},\frac{p-\varrho}{2}\right)}}{2}\,y_{(1,0)} \\
&+\sum_{\tau=1}^{\frac{\varrho-1}{2}}\alpha_{\left(\left(\frac{\varrho+1}{2}-\tau,\frac{p-\varrho}{2}+\tau\right),\left(\frac{\varrho-1}{2}+\tau,\frac{p-\varrho}{2}-\tau\right)\right)} \\
&\qquad\qquad\cdot x_{\left(\frac{\varrho-1}{2}-(\tau-1),\frac{p-\varrho}{2}+(\tau-1)\right)}\,x_{\left(\frac{\varrho-1}{2}+\tau,\frac{p-\varrho}{2}-\tau\right)}\,y_{(0,1)} \\
&+\sum_{\tau=1}^{\frac{\varrho-3}{2}}\alpha_{\left(\left(\frac{\varrho+1}{2}-\tau,\frac{p-\varrho}{2}+\tau\right),\left(\frac{\varrho-1}{2}+\tau,\frac{p-\varrho}{2}-\tau\right)\right)} \\
&\qquad\qquad\cdot x_{\left(\frac{\varrho-1}{2}-\tau,\frac{p-\varrho}{2}+\tau\right)}\,x_{\left(\frac{\varrho-1}{2}+\tau,\frac{p-\varrho}{2}-\tau\right)}\,y_{(1,0)}
\end{aligned}\right\}\ \text{II.}
\end{aligned}\right\} (54)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left.
\begin{aligned}
&+ \alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),\,(0,1))}\, x_{(\varrho,p-\varrho-1)}\, y_{(0,1)} \\
&\qquad\qquad + \alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),\,1,0))}\, x_{(\varrho-1,p-\varrho)}\, y_{(1,0)} \\
&+ \alpha_{\left(\left(\frac{\varrho}{2},\frac{p-\varrho+1}{2}\right),\left(\frac{\varrho}{2},\frac{p-\varrho-1}{2}\right)\right)} \binom{x_{\left(\frac{\varrho}{2},\frac{p-\varrho-1}{2}\right)}}{2}\, y_{(0,1)} \\
&+ \sum_{\tau=1}^{\frac{\varrho-2}{2}} \alpha_{\left(\left(\frac{\varrho}{2}-\tau,\frac{p-\varrho+1}{2}+\tau\right),\left(\frac{\varrho}{2}+\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}-\tau\right)\right)} \\
&\qquad\qquad \cdot x_{\left(\frac{\varrho}{2}+\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}-\tau\right)}\, x_{\left(\frac{\varrho}{2}-\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}+\tau\right)}\, y_{(0,1)} \\
&+ \sum_{\tau=0}^{\frac{\varrho-4}{2}} \alpha_{\left(\left(\frac{\varrho}{2}-\tau,\frac{p-\varrho+1}{2}+\tau\right),\left(\frac{\varrho}{2}+\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}-\tau\right)\right)} \\
&\qquad\qquad \cdot x_{\left(\frac{\varrho}{2}+\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}-\tau\right)}\, x_{\left(\frac{\varrho}{2}-(\tau+1),\frac{p-\varrho-1}{2}+\tau+1\right)}\, y_{(1,0)}
\end{aligned}
\right\}\ \text{III.} \\[2ex]
&\left.
\begin{aligned}
&+ \alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),\,(0,1))}\, x_{(\varrho,p-\varrho-1)}\, y_{(0,1)} \\
&\qquad\qquad + \alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),\,(1,0))}\, x_{(\varrho-1,p-\varrho)}\, y_{(1,0)} \\
&+ \alpha_{\left(\left(\frac{\varrho+1}{2},\frac{p-\varrho}{2}\right),\left(\frac{\varrho-1}{2},\frac{p-\varrho}{2}\right)\right)} \binom{x_{\left(\frac{\varrho-1}{2},\frac{p-\varrho}{2}\right)}}{2}\, y_{(1,0)} \\
&+ \sum_{\tau=1}^{\frac{p-\varrho-2}{2}} \alpha_{\left(\left(\frac{\varrho+1}{2}-\tau,\frac{p-\varrho}{2}+\tau\right),\left(\frac{\varrho-1}{2}+\tau,\frac{p-\varrho}{2}-\tau\right)\right)} \\
&\qquad\qquad \cdot x_{\left(\frac{\varrho-1}{2}+\tau,\frac{p-\varrho}{2}-\tau\right)}\, x_{\left(\frac{\varrho-1}{2}-(\tau-1)\ \ \frac{p-\varrho}{2}+\tau-1\right)}\, y_{(0,1)} \\
&+ \sum_{\tau=1}^{\frac{p-\varrho-2}{2}} \alpha_{\left(\left(\frac{\varrho+1}{2}-\tau,\frac{p-\varrho}{2}+\tau\right),\left(\frac{\varrho-1}{2}+\tau,\frac{p-\varrho}{2}-\tau\right)\right)} \\
&\qquad\qquad \cdot x_{\left(\frac{\varrho-1}{2}+\tau,\frac{p-\varrho}{2}-\tau\right)}\, x_{\left(\frac{\varrho-1}{2}-\tau,\frac{p-\varrho}{2}+\tau\right)}\, y_{(1,0)} \\
&+ \sum_{\tau=0}^{\varrho-\frac{p+1}{2}} \alpha_{\left(\left(\frac{p-1}{2}+\tau,1\right),\left(\varrho-\frac{p-1}{2}-\tau,\,p-\varrho-1\right)\right)} \\
&\qquad\qquad \cdot x_{\left(\varrho-\frac{p-1}{2}-\tau,\,p-\varrho-1\right)} \binom{x_{(1,0)}}{\frac{p-1}{2}+\tau}\, y_{(0,1)}
\end{aligned}
\right\}\ \text{IV.}
\end{aligned}
\right\} \quad (54)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&+\alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),(0,1))}\,x_{(\varrho,p-\varrho-1)}\,y_{(0,1)}\\
&\qquad\qquad\qquad+\alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),(1,0))}\,x_{(\varrho-1,p-\varrho)}\,y_{(1,0)}\\
&+\alpha_{\left(\left(\frac{\varrho}{2},\frac{p-\varrho+1}{2}\right),\left(\frac{\varrho}{2},\frac{p-\varrho-1}{2}\right)\right)}\binom{x_{\left(\frac{\varrho}{2},\frac{p-\varrho-1}{2}\right)}}{2}\,y_{(0,1)}\\
&+\sum_{\tau=1}^{\frac{p-\varrho-3}{2}}\alpha_{\left(\left(\frac{\varrho}{2}-\tau,\frac{p-\varrho+1}{2}+\tau\right),\left(\frac{\varrho}{2}+\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}-\tau\right)\right)}\\
&\qquad\qquad\cdot x_{\left(\frac{\varrho}{2}+\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}-\tau\right)}\,x_{\left(\frac{\varrho}{2}-\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}+\tau\right)}\,y_{(0,1)}\\
&+\sum_{\tau=0}^{\frac{p-\varrho-3}{2}}\alpha_{\left(\left(\frac{\varrho}{2}-\tau,\frac{p-\varrho+1}{2}+\tau\right),\left(\frac{\varrho}{2}+\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}-\tau\right)\right)}\\
&\qquad\qquad\cdot x_{\left(\frac{\varrho}{2}+\tau,\frac{p-\varrho-1}{2}-\tau\right)}\,x_{\left(\frac{\varrho}{2}-(\tau+1),\frac{p-\varrho-1}{2}+\tau+1\right)}\,y_{(1,0)}\\
&+\sum_{\tau=0}^{\varrho-\frac{p+1}{2}}\alpha_{\left(\left(\frac{p-1}{2}+\tau,1\right),\left(\varrho-\frac{p-1}{2}-\tau,p-\varrho-1\right)\right)}\\
&\qquad\qquad\cdot x_{\left(\varrho-\frac{p-1}{2}-\tau,p-\varrho-1\right)}\binom{x_{(1,0)}}{\frac{p-1}{2}+\tau}\,y_{(0,1)}\,.
\end{aligned}\right\}\text{V.}\\
&\left.\begin{aligned}
&+\alpha_{((p-2,1),(1,0))}\,x_{(p-2,1)}\,y_{(1,0)}\\
&+\alpha_{((p-2,1),(1,0))}\binom{x_{(1,0)}}{p-1}\,y_{(0,1)}
\end{aligned}\right\}\text{VI.}
\end{aligned}\right\}\quad(54)
$$

Hierbei haben wir die Ausdrücke gemäß (38) zusammengefaßt und der Gültigkeitsbereich der Beiträge II.—V. ist gegeben durch

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{II.}\quad p-\varrho\geqslant\frac{p+1}{2}\;;\quad p-\varrho\quad\textit{ist gerade}\\
&\text{III.}\quad p-\varrho\geqslant\frac{p+1}{2}\;;\quad p-\varrho\quad\textit{ist ungerade}\\
&\text{IV.}\quad p-\varrho\leqslant\frac{p-1}{2}\;;\quad p-\varrho\quad\textit{ist gerade}\\
&\text{V.}\quad p-\varrho\leqslant\frac{p-1}{2}\;;\quad p-\varrho\quad\textit{ist ungerade}
\end{aligned}\right\}\qquad(55)
$$

Unter Verwendung dieser Entwicklungen bestimmen wir $\mathfrak{F}^n(x)$ induktiv wie bei der Ableitung von (19). Nach (19), (21), (25) und (43) folgt:

$$
\mathfrak{F}^p(x) \equiv \left\{
\begin{array}{l}
\underline{\alpha_{((1,p-2),\,(0,1))} \binom{p-2}{p-2} x_{(1,0)}\, x_{(0,1)}^{p-1}} \\[2ex]
+\sum\limits_{\varrho=2}^{p-2} \left\{ \alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),\,(0,1))} \binom{p-2}{p-\varrho-1} + \alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),\,(1,0))} \binom{p-2}{p-\varrho} \right. \\[2ex]
\qquad\qquad \left. + k^{(\varrho,p-\varrho)} \cdot \dfrac{p+1}{2} \cdot \binom{p-2}{p-\varrho} \right\} x_{(1,0)}^{\varrho}\, x_{(0,1)}^{p-\varrho} \\[2ex]
+\ \underline{\alpha_{((p-2,1),\,(1,0))} \binom{p-2}{1} x_{(1,0)}^{p-1}\, x_{(0,1)}} \;.
\end{array}
\right\} \qquad (56)
$$

Die Richtigkeit des ersten und letzten Ausdruckes in (56) ergibt sich sofort aus (19), denn hier fällt der Einfluß der 2-ten Kommutatoren weg.

Die Gültigkeit der andern Fälle beweisen wir, indem wir $\mathfrak{F}^n(x)_{II}$ und $\mathfrak{F}^n(x)_{IV}$ in die Form (20) überführen. Die Fälle $\mathfrak{F}^n(x)_{III}$ und $\mathfrak{F}^n(x)_V$ ergeben sich dann analog.

Wendet man $f(x\,;y)_{II}$ auf (21) an, so hat man wegen (19) und (43)

$$
\left.
\begin{array}{l}
\mathfrak{F}^n(x)_{II} \equiv \mathfrak{F}^{n-1}(x)_{II} \\[1ex]
\qquad + \alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),\,(0,1))} \left\{ \binom{n-1}{p-1} \binom{p-2}{p-\varrho-1} x_{(1,0)}^{\varrho}\, x_{(0,1)}^{p-\varrho-1} + \cdots \right\} x_{(0,1)} \\[2ex]
\qquad + \alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),\,(1,0))} \left\{ \binom{n-1}{p-1} \binom{p-2}{p-\varrho} x_{(1,0)}^{\varrho-1}\, x_{(0,1)}^{p-\varrho} + \cdots \right\} x_{(1,0)} \\[2ex]
+ (-1)^{\frac{p-1}{2}} k^{(\varrho,p-\varrho)} \left(\dfrac{ \binom{n-1}{\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}} x_{(1,0)}^{\frac{\varrho-1}{2}}\, x_{(0,1)}^{\frac{p-\varrho}{2}} + \cdots }{2} \right) x_{(1,0)} \\[3ex]
+ \sum\limits_{\tau=1}^{\frac{\varrho-1}{2}} (-1)^{\frac{p-1}{2}} k^{(\varrho,p-\varrho)} \binom{n-1}{\frac{p-1}{2}}^{2} \binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}-\tau} \binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}+(\tau-1)} x_{(1,0)}^{\varrho}\, x_{(0,1)}^{p-\varrho} + \cdots \\[3ex]
+ \sum\limits_{\tau=1}^{\frac{\varrho-3}{2}} (-1)^{\frac{p-1}{2}} k^{(\varrho,p-\varrho)} \binom{n-1}{\frac{p-1}{2}}^{2} \binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}-\tau} \binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}+\tau} x_{(1,0)}^{\varrho}\, x_{(0,1)}^{p-\varrho} + \cdots
\end{array}
\right\} (57)
$$

Nun gilt die Formel

$$
\binom{n}{a}\binom{n}{b} = \sum_{\varrho=0} \binom{b}{\varrho} \binom{a+b-\varrho}{b} \binom{n}{a+b-\varrho} \,. \qquad (58)
$$

Hieraus folgt
$$\sum_{\varepsilon=1}^{n}\binom{\varepsilon-1}{\frac{p-1}{2}}^2=\binom{n}{p}\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}}+\cdots \tag{59}$$

Beachtet man noch, daß stets
$$\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k \mod p\ , \tag{60}$$

so erhält man aus (56) bei Summation über n

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{F}^n(x)_{II} \equiv{}& \binom{n}{p}\,\alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),\,(0,1))}\binom{p-2}{p-\varrho-1}\,x_{(1,0)}^{\varrho}\,x_{(0,1)}^{p-\varrho}\\
&+\binom{n}{p}\,\alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),\,(1,0))}\binom{p-2}{p-\varrho}\,x_{(1,0)}^{\varrho}\,x_{(0,1)}^{p-\varrho}\\
&+\binom{n}{p}\,k^{(\varrho,p-\varrho)}\cdot\frac{p+1}{2}\binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}}^2 x_{(1,0)}^{\varrho}\,x_{(0,1)}^{p-\varrho}\\
&+\binom{n}{p}\,k^{(\varrho,p-\varrho)}\cdot(p+1)\cdot\left\{\sum_{\tau=1}^{\frac{\varrho-1}{2}}\binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}-\tau}\binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}+(\tau-1)}\right\}x_{(1,0)}^{\varrho}\,x_{(0,1)}^{p-\varrho}\\
&+\binom{n}{p}\,k^{(\varrho,p-\varrho)}\cdot(p+1)\cdot\left\{\sum_{\tau=1}^{\frac{\varrho-3}{2}}\binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}-\tau}\binom{\frac{p-3}{2}}{\frac{p-\varrho}{2}+\tau}\right\}x_{(1,0)}^{\varrho}\,x_{(0,1)}^{p-\varrho}
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Nach dem Additionstheorem der Binomialkoeffizienten können die letzten drei Ausdrücke zusammengefaßt werden zu

$$\binom{n}{p}\,k^{(\varrho,p-\varrho)}\,\frac{p+1}{2}\left\{\binom{p-3}{p-\varrho}+\binom{p-3}{p-\varrho-1}\right\}=\binom{n}{p}\,k^{(\varrho,p-\varrho)}\,\frac{p+1}{2}\binom{p-2}{p-\varrho}$$

womit (56) II vollständig bewiesen ist.

Zum Beweis von (56) IV brauchen wir nur die Umformung für den letzten Summanden anzugeben, denn die andern können wie vorhin behandelt werden.

Nach (19) und (43) hat man für den letzten Ausdruck in $\mathfrak{F}^n(x)_{\mathrm{IV}}$

$$\sum_{\varepsilon=1}^{n}\left\{\sum_{\tau=0}^{\varrho-\frac{p+1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}-\tau}k^{(\varrho,p-\varrho)}\binom{\varepsilon-1}{\frac{p-1}{2}-\tau}\binom{\varepsilon-1}{\frac{p-1}{2}+\tau}\binom{\frac{p-3}{2}-\tau}{p-\varrho-1}x_{(1,0)}^{\varrho}\,x_{(0,1)}^{p-\varrho}\right\} \tag{62}$$

Nach (58) gilt aber

$$\sum_{\varepsilon=1}^{n}\binom{\varepsilon-1}{\frac{p-1}{2}-\tau}\binom{\varepsilon-1}{\frac{p-1}{2}+\tau}=\binom{n}{p}\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}+\tau}+\cdots$$

Dies liefert zusammen mit (60)

$$(62)\equiv(p+1)\sum_{\tau=0}^{\varrho-\frac{p+1}{2}}\binom{\frac{p-3}{2}-\tau}{p-\varrho-1}=(p+1)\binom{\frac{p-3}{2}}{p-\varrho-1}+(p+1)\binom{\frac{p-3}{2}}{p-\varrho}\qquad(63)$$

Nach den vorigen Bemerkungen ergibt sich hieraus nach leichter Rechnung auch die Richtigkeit von (56) für $\mathfrak{F}^n(x)_{\mathrm{IV}}$.

Die entscheidende Relation (56) ist damit in allen Teilen bewiesen. Die Relationen $\mathfrak{P}$ lauten jetzt gemäß (39) und (56):

$$\alpha_{((1,p-2),(0,1))}\equiv 0\qquad\qquad \alpha_{((p-2,1),(1,0))}\equiv 0\qquad(64)$$

$$\alpha_{((\varrho,p-\varrho-1),(0,1))}\binom{p-2}{p-\varrho-1}+\alpha_{((\varrho-1,p-\varrho),(1,0))}\binom{p-2}{p-\varrho}$$

$$+k^{(\varrho,p-\varrho)}\cdot\frac{p+1}{2}\binom{p-2}{p-\varrho}\equiv 0\quad(\varrho=2,3,\ldots,p-2)\,.\qquad(65)$$

Die ersten beiden Kongruenzen in (64) besagen nach (4) und (13):

5. Satz: *In endlichen Gruppen, deren Elemente der Gleichung* $x^p=1$ *genügen, gilt mod* H_{p+1} *die identische Relation* $(x,\underbrace{y,y,\ldots,y}_{p-1})=1$.

Dies ist die bekannte *Identität von Zassenhaus*[15]), die bisher nur auf dem Umweg über die Theorie der Dimensionsgruppen von *Zassenhaus* und *Grün*[16]) bewiesen wurde.

Als Korollar zu Satz 5 notieren wir noch: Es gibt eine größte endliche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,3}$. Sie ist von der Klasse $c=2$ und besitzt die Ordnung 3^3 [17]).

Aus der Form (56) liest man nun ohne weiteres ab, daß die Erweiterung (29) im Maximum auf $p-3$ verschiedene Weisen durchgeführt werden kann, entsprechend den $p-3$ Kommutatoren erster Stufe vom Gewicht p, die sich in den Gewichten der $P_{(1,0)}$ und $P_{(0,1)}$ unterscheiden.

[15]) Vgl. [11]. [16]) Vgl. [4], p. 169. [17]) Vgl. [2] und [7].

Wir führen deshalb $p-3$ neue Basiselemente ein durch die Festsetzung

$$\alpha_{((\varrho-1,\,p-\varrho),\,(1,0))} \equiv 1 \qquad (\varrho = 2,3,\ldots,p-2)\ . \tag{66}$$

Nach (4) bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir noch die Bedingungen hinzufügen

$$\alpha_{((a,\,b+1),\,(1,0))} \equiv 0\ , \qquad (a+b+2<p) \tag{67}$$

denn dadurch erreichen wir offenbar, daß die zugrunde gelegte U-Basis die Eigenschaft (4) besitzt.

Wir beweisen, daß unter diesen Umständen die Kongruenzen (40) und (65) genau eine Lösung zulassen.

Nach (43) und (66) erhält (40) die einfachere Gestalt

$$1 + k^{(\varrho,\,p-\varrho)} \equiv \alpha_{((\varrho,\,p-\varrho-1),\,(0,1))}\ . \tag{68}$$

Für die beiden Unbekannten erhält man aus (65), (66) und (68) die schönen Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} k^{(\varrho,\,p-\varrho)}(\varrho+1) &\equiv p-2 \mod p \quad (\varrho = 2,3,\ldots,p-2) \\ \alpha_{((\varrho,\,p-\varrho-1),\,(0,1))}(\varrho+1) &\equiv \varrho-1 \mod p \quad (\varrho = 2,3,\ldots,p-2) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

aus denen hervorgeht, daß die einzige existierende Lösung $\not\equiv 0 \mod. p$. Die Kongruenzen $\mathfrak{P}$ können daher nach (66) und (69) befriedigt werden.

Wir beweisen, daß mit den Anfangswerten (43) die Kongruenzen $\mathfrak{A}$ eindeutige Lösungen zulassen. Offenbar brauchen wir den Beweis nur für (32) und (33) durchzuführen, denn die Kongruenzen (31) sind dann immer lösbar.

Falls $a+b+c+d+1=p$, so ist die Lösung von (32) und (33) durch (43) gegeben. Wir wollen nun annehmen, es sei gelungen, diese Kongruenzen mit den Anfangswerten (43) zu lösen in allen Fällen, wo $a+b+c+d+1 \geqslant \tau$ mit $1<\tau<p$.

Dann betrachte man die Gesamtheit der Kongruenzen (32) und (33), so daß $a+b+c+d+1 \geqslant \tau-1$, und fasse alle Kongruenzen zu einer Klasse zusammen, die aus (32) und (33) durch eine Transformation der Form

$$T\colon\ a \to a+\varrho\ ;\quad b \to b+\tau\ ;\quad c \to c-\varrho\ ;\quad d \to d-\tau \tag{70}$$

mit $\varrho, \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ hervorgehen. Aus dem Bau der Kongruenzen geht hervor, daß auch die $\alpha^k_{j,i}$ dadurch eine Klasseneinteilung erfahren haben, so daß eine Konstante nur einer Klasse angehört. Wir brauchen daher nur die Lösbarkeit der Kongruenzen einer solchen Klasse nachzuprüfen, d. h. wir haben lediglich den Eindeutigkeitsbeweis zu führen, denn durch eine Größe einer Klasse sind alle andern gewiß bestimmt. Sei etwa $\alpha_{((a,b),(c,d))}$ mit $a+b+c+d = \tau - 1$ bekannt. Dann sind es gemäß (32) und (33) auch die Größen $\alpha_{((a+1,b),(c-1,d))}$ und $\alpha_{((a,b+1),(c,d-1))}$, denn man hat offenbar

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{((a,b),(c,d))} + \alpha_{((a+1,b),(c-1,d))} + \alpha_{((a+1,b),(c,d))} &\equiv 0 \\ \alpha_{((a,b),(c,d))} + \alpha_{((a,b+1),(c,d-1))} + \alpha_{((a,b+1),(c,d))} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

und die letzte Größe in beiden Kongruenzen ist nach Induktionsannahme bereits im gewünschten Sinne bestimmt. Wie man aus (70) erkennt, genügt es, wenn wir zeigen, daß dann auch $\alpha_{((a+1,b+1),(c-1,d-1))}$ eindeutig bestimmt ist. Es gelten die Beziehungen

$$\alpha_{((a+1,b),(c-1,d))} + \alpha_{((a+1,b+1),(c-1,d-1))} + \alpha_{((a+1,b+1),(c-1,d))} \equiv 0$$

$$\alpha_{((a,b+1),(c,d-1))} + \alpha_{((a+1,b+1),(c-1,d-1))} + \alpha_{((a+1,b+1),(c,d-1))} \equiv 0\,,$$

Dies führt mit (71) auf die Relation

$$\alpha_{((a+1,b),(c,d))} + \alpha_{((a+1,b+1)\ (c,d-1))} \equiv \alpha_{((a+1,b+1),(c-1,d))} + \alpha_{((a,b+1),(c,d))}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dies eine richtige Kongruenz, womit die Lösbarkeit der Kongruenzen $\mathfrak{A}$ bewiesen ist.

Zusammenfassend fließt aus den vorgetragenen Überlegungen nach Satz 2 das allgemeine Resultat:

6. Satz: *Zu jeder Primzahl $p \neq 2{,}3$ existiert eine 3-stufig metabelsche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,p}$ der Ordnung $p^{\binom{p}{2}}$ und von der Klasse p.*

§ 3. Die maximale Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,5}$ der Klasse 6

7. Satz: *Die Gruppe $\mathfrak{B}_{2,5,6}$ existiert und besitzt die Ordnung 5^{14}. Sie kann folgendermaßen durch Erzeugende und Relationen definiert werden:*

$$\left.\begin{array}{l}
Q_2 \; Q_1 = Q_1 \; Q_2 \; Q_3 \\
Q_3 \; Q_1 = Q_1 \; Q_3 \; Q_4 \\
Q_4 \; Q_1 = Q_1 \; Q_4 \; Q_6 \\
Q_5 \; Q_1 = Q_1 \; Q_5 \; Q_7 \; Q_9 \; Q_{10}^2 \; Q_{11}^3 \; Q_{12}^4 \; Q_{13} \; Q_{14}^3 \\
Q_6 \; Q_1 = Q_1 \; Q_6 \; Q_{13} \\
Q_7 \; Q_1 = Q_1 \; Q_7 \; Q_9^2 \; Q_{11}^4 \; Q_{13}^2 \; Q_{14} \\
Q_8 \; Q_1 = Q_1 \; Q_8 \; Q_{10}^3 \; Q_{11} \; Q_{12}^3 \; Q_{14}^2 \\
Q_9 \; Q_1 = Q_1 \; Q_9 \; Q_{13} \\
Q_{10} \; Q_1 = Q_1 \; Q_{10} \; Q_{11}^2 \; Q_{14} \\
\\
Q_3 \; Q_2 = Q_2 \; Q_3 \; Q_5 \\
Q_4 \; Q_2 = Q_2 \; Q_4 \; Q_7 \\
Q_5 \; Q_2 = Q_2 \; Q_5 \; Q_8 \\
Q_6 \; Q_2 = Q_2 \; Q_6 \; Q_9 \\
Q_7 \; Q_2 = Q_2 \; Q_7 \; Q_{10} \\
Q_8 \; Q_2 = Q_2 \; Q_8 \; Q_{12}^3 \\
Q_9 \; Q_2 = Q_2 \; Q_9 \; Q_{11} \\
Q_{10} \; Q_2 = Q_2 \; Q_{10} \; Q_{12} \\
\\
Q_4 \; Q_3 = Q_3 \; Q_4 \; Q_9 \; Q_{11}^4 \; Q_{13} \\
Q_5 \; Q_3 = Q_3 \; Q_5 \; Q_{10}^2 \; Q_{12}^4 \; Q_{14} \\
Q_6 \; Q_3 = Q_3 \; Q_6 \; Q_{13} \\
Q_7 \; Q_3 = Q_3 \; Q_7 \; Q_{14} \\
Q_8 \; Q_3 = Q_3 \; Q_8 \; Q_{12}^2 \\
\\
Q_5 \; Q_4 = Q_4 \; Q_5 \; Q_{11}^4 \; Q_{14} \\
\qquad Q_k^5 = 1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant 14) \; .
\end{array}\right\} \quad (72)$$

Alle andern Basiselemente sind miteinander vertauschbar.

Beweis. Setzt man $Q_{11} = Q_{12} = Q_{13} = Q_{14} = 1$, so ist die aus (72) hervorgehende Faktorgruppe gerade die in II, § 2 konstruierte Gruppe. Denkt man sich nämlich die U-Basiselemente durchnumeriert, so lauten die Relationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$ (vgl. (31) und (69)):

$$\overset{9}{\alpha}_{(4,2)} + \overset{9}{\alpha}_{(4,3)} \equiv \overset{9}{\alpha}_{(5,1)} \qquad\qquad \overset{10}{\alpha}_{(4,2)} + \overset{10}{\alpha}_{(5,3)} \equiv \overset{10}{\alpha}_{(5,1)}$$

$$\overset{9}{\alpha}_{(6,2)} + \overset{9}{\alpha}_{(4,3)} \equiv \overset{9}{\alpha}_{(7,1)} \qquad\qquad \overset{10}{\alpha}_{(7,2)} + \overset{10}{\alpha}_{(5,3)} \equiv \overset{10}{\alpha}_{(8,1)}$$

$$k^{(2,3)} = 1 \; . \qquad\qquad k^{(3,2)} = 2 \; .$$

Hieraus berechnet man mit (67) die in (72) angegebenen Konstanten. Die maximale 2-stufig metabelsche Faktorgruppe von $\mathfrak{B}_{2,p}$ fällt für $p = 5$ zusammen mit $\mathfrak{B}_{2,5,4}$. Nach dem in I, § 3 skizzierten Verfahren bestimmen wir jetzt $\mathfrak{B}_{2,5,6}$.

Wir finden als Relationen $\mathfrak{A}$:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)} & \alpha_{(5,4)} + \alpha_{(7,3)} + \alpha_{(5,3)} + \alpha_{(4,3)} \equiv \alpha_{(5,1)} \\
\text{b)} & \alpha_{(6,3)} + \alpha_{(7,3)} + \alpha_{(4,3)} \equiv \alpha_{(7,1)} \\
\text{c)} & 2\alpha_{(10,2)} + \alpha_{(9,2)} + \alpha_{(8,3)} + \alpha_{(7,3)} + \alpha_{(5,3)} \equiv \alpha_{(8,1)} \\
\text{d)} & \alpha_{(6,3)} \equiv \alpha_{(9,1)} \\
\text{e)} & \alpha_{(7,3)} + 2a_{(9,2)} \equiv \alpha_{(10,1)} \\
\text{f)} & \alpha_{(8,3)} + 3\alpha_{(10,2)} \equiv 0 \\
\text{g)} & \alpha_{(5,4)} + \alpha_{(7,3)} \equiv 2\alpha_{(10,1)} \\
\text{h)} & \alpha_{(7,3)} \equiv \alpha_{(5,4)} + \alpha_{(9,2)}
\end{array}\right\} \quad (73)$$

Als Relationen $\mathfrak{P}$ finden wir:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)} & \alpha_{(10,1)} + 2\alpha_{(7,3)} + 2\alpha_{(5,4)} \equiv 0 \\
\text{b)} & 3\alpha_{(8,1)} + 4\alpha_{(5,3)} + 4\alpha_{(10,1)} + 3\alpha_{(9,2)} + 2\alpha_{(7,3)} + 4\alpha_{(5,4)} \equiv 0 \\
\text{c)} & \alpha_{(6,3)} + 3\alpha_{(4,3)} + 3\alpha_{(7,1)} + 4\alpha_{(10,1)} + \alpha_{(9,2)} + 3\alpha_{(5,4)} \equiv 0 \\
\text{d)} & \alpha_{(8,3)} + 3\alpha_{(10,2)} \equiv 0 \\
\text{e)} & 4\alpha_{(6,3)} + \alpha_{(9,1)} \equiv 0 \\
\text{f)} & 3\alpha_{(10,2)} + 4\alpha_{(8,2)} \equiv 0 \\
\text{g)} & 4\alpha_{(9,1)} + \alpha_{(6,1)} \equiv 0
\end{array}\right\} \quad (74)$$

Die Kongruenzen $\mathfrak{P}$ entspringen der folgenden Entwicklung von $\mathfrak{F}^n(x)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^n(x) = \binom{n}{5} \{ &(74)\,\mathrm{a} \cdot x_2^3 x_1^3 + (74)\,\mathrm{b} \cdot x_2^3 x_1^2 + (74)\,\mathrm{c} \cdot x_2^2 x_1^3 + {}^{18)} \\
&+ (74)\,\mathrm{d} \cdot x_2^4 x_1^2 + (74)\,\mathrm{e} \cdot x_2^2 x_1^4 + \\
&+ (64)\,\mathrm{f} \cdot x_2^4 x_1 + (74)\,\mathrm{g} \cdot x_2 x_1^4 \} + \cdots \qquad (75)
\end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, sind die Kongruenzen (73) und (74) lösbar. Vier Konstanten, die vier unabhängigen Basiselementen entsprechen, bleiben frei wählbar. $\mathfrak{B}_{2,5,6}$ existiert somit und besitzt die angegebene Ordnung 5^{14}, womit alles bewiesen ist.

---

[18]) Man hat sich hier die linken Seiten der Kongruenzen 74 a, b, c, d bzw. eingesetzt zu denken.

LITERATUR.

[1] *R. Baer.* The higher commutator subgroups of a group. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 50, 3 (1944), p. 143—160. Vgl. ebd. das Literaturverzeichnis zum Problem von Burnside.

[2] *W. Burnside.* On a unsettled question in the theory of discontinuous groups. Quart. Journ. 33 (1902), p. 230—238.

[3] *T. E. Easterfield.* The orders of products and commutators in prime power groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 (1938), p. 14—26.

[4] *O. Grün.* Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung. Journ. Crelles, vol. 182 (1940), p. 158—177.

[5] *P. Hall.* A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. Lond. Math. Soc. vol. 36 (1933), p. 29—95.

[6] *C. Hopkins.* Concerning uniqueness-bases of finite groups with applications to p-groups of class 2. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 287—313.

[7] *F. Levi* und *B. L. van der Waerden.* Über eine besondere Klasse von Gruppen. Abh., Hamburg 9 (1932), p. 154—158.

[8] *W. Magnus.* Neuere Ergebnisse über auflösbare Gruppen. Jahresber. Deutsch. Math. Verein. Vol. 47 (1937), p. 69—78.

[9] *B. H. Neumann.* Identical relations in groups. Math. Annalen vol. 114 (1937), p. 506—525.

[10] *H. Zassenhaus.* Lehrbuch der Gruppentheorie. Bd. 1. Leipzig und Berlin 1937.

[11] *H. Zassenhaus.* Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik. Abh. Hamburg 13 (1939), p. 1—100.

(Eingegangen den 8. Februar 1949.)