Zur elementaren Flächentheorie.

Autor(en): **Scherrer, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **26 (1952)**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21267

Zur elementaren Flächentheorie

Von W. SCHERRER, Bern

Die Krümmungslinien liefern bekanntlich ein Parameternetz, dessen man sich bei zahlreichen Fragen der elementaren Flächentheorie mit Vorteil bedient.

Darüber hinaus aber erweist es sich als vorteilhaft, zur expliziten Bearbeitung einer Raumfläche

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{1}$$

mit der Normalen

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|} \tag{2}$$

nicht das traditionelle Dreibein

$$\mathfrak{x}_u,\ \mathfrak{x}_v,\ \mathfrak{N}, \tag{3}$$

sondern das Dreibein

$$\mathfrak{N}_u,\ \mathfrak{N}_v,\ \mathfrak{N} \tag{4}$$

zu benutzen.

Dies läuft dann darauf hinaus, daß man primär das Normalenbild (2) als Vektorfunktion

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u, v) \tag{5}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\mathfrak{N}^2 = 1\ ; \quad (6\mathrm{b}) \qquad \mathfrak{N}_u \mathfrak{N}_v = 0 \tag{6a}$$

vorgibt und sekundär den Flächenvektor (1) vermittels der *Rodrigues*-schen Gleichungen bestimmt.

Da diese Methode in dem traditionellen Lehrgang nicht verwendet wird, seien hier ihre Hauptformeln kurz zusammengestellt.

Setzen wir

$$e^2 = \mathfrak{N}_u^2\ ; \qquad g^2 = \mathfrak{N}_v^2 \tag{7}$$

so erhalten wir folgendes System von Ableitungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{N}_{uu} &= \frac{e_u}{e}\,\mathfrak{N}_u - \frac{e\,e_v}{g^2}\,\mathfrak{N}_v - e^2\,\mathfrak{N}\\ \mathfrak{N}_{uv} &= \frac{e_v}{e}\,\mathfrak{N}_u + \frac{g_u}{g}\,\mathfrak{N}_v\\ \mathfrak{N}_{vv} &= -\frac{g\,g_u}{e^2}\,\mathfrak{N}_u + \frac{g_v}{g}\,\mathfrak{N}_v - g^2\,\mathfrak{N}\end{aligned}} \quad . \tag{8}$$

Als Integrabilitätsbedingung des Systems (8) erhält man die Relation

$$\boxed{\frac{1}{e\,g}\left[\left(\frac{g_u}{e}\right)_u + \left(\frac{e_v}{g}\right)_v\right] + 1 = 0} \quad , \tag{9}$$

welche natürlich nichts anderes als die *Gauß*sche Gleichung für das Normalenbild darstellt.

Nachdem so ein Normalenbild mit orthogonalem Parameternetz konstituiert ist, gewinnt man nun den Ortsvektor vermittels der *Rodrigues*schen Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{x}_u &= -\varrho\,\mathfrak{N}_u\\ \mathfrak{x}_v &= -\sigma\,\mathfrak{N}_v\end{aligned}} \quad , \tag{10}$$

wobei ϱ und σ die Hauptkrümmungsradien bedeuten.

Als Integrabilitätsbedingungen des Systems (10) ergeben sich

$$\boxed{\begin{aligned}\varrho_v &= -(\varrho - \sigma)\,\frac{e_v}{e}\\ \sigma_u &= -(\sigma - \varrho)\,\frac{g_u}{g}\end{aligned}} \quad . \tag{11}$$

Das System (11) zur Bestimmung von ϱ und σ kann separiert werden in die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\varrho_{uv} + (\mathrm{Lg}\,e)_v\,\varrho_u - \left[\mathrm{Lg}\left(\frac{e_v}{e\,g}\right)\right]_u \varrho_v &= 0\\ \sigma_{uv} + (\mathrm{Lg}\,g)_u\,\sigma_v - \left[\mathrm{Lg}\left(\frac{g_u}{e\,g}\right)\right]_v \sigma_u &= 0\end{aligned}} \quad . \tag{12}$$

Die konkrete Bestimmung einer Fläche gestaltet sich nun folgendermaßen:

Den Ausgangspunkt bildet eine Lösung von (9). Gestützt auf sie gewinnt man vermittels (8) das Normalenbild $\mathfrak{N}$ und vermittels (11) respektive (12) die Hauptkrümmungsradien ϱ und σ. Das System (10) schließlich liefert zuletzt den Ortsvektor $\mathfrak{x}$.

Durch diese Methode kann man zahlreiche Probleme der Theorie der Raumflächen, wie etwa Minimalflächen, Flächen mit ebenen Krümmungslinien, Flächen konstanter *Gauß*scher Krümmung usw. einheitlich in Angriff nehmen. Als weiteres Beispiel erwähne ich die Bestimmung aller derjenigen Flächen, für welche die Stützfunktion eine Funktion des Radius ist. Diese Bestimmung ist ausgeführt in der Dissertation des Herrn H. Schindler [Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius].

(Eingegangen den 21. November 1951.)