

# Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn R. Cantoni.

Autor(en): **Bäbler, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **26 (1952)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21269>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn R. Cantoni

Von F. BÄBLER, Zürich

Eine kürzlich erschienene Arbeit von Herrn R. Cantoni (*Una rete speciale Periodico di Matematica, Serie IV, Vol. 29, pag. 37—41*) bezieht sich auf einen regulären kubischen Graphen  $G$  mit den folgenden Eigenschaften:

(1). Er läßt sich nicht ohne Selbstüberschneidungen auf eine Kugel zeichnen.

(2). Seine Zerfällung in drei Faktoren 1. Grades ist nicht möglich. Diese Zerfällbarkeit ist für einen regulären kubischen Graphen, der einer Einteilung der Kugel in Länder entspricht, bekanntlich mit der Gültigkeit des 4-Farbensatzes äquivalent. Die Eigenschaft (2) drückt also aus, daß kubische Regularität allein jedenfalls für die erwähnte Zerfällbarkeit nicht ausreicht.

Herr Cantoni unterdrückt seinen Beweis für (2) mit der Bemerkung, der Beweisgang sei zwar offenkundig, aber infolge der vielen a priori bestehenden Möglichkeiten mühsam. Dieser Umstand scheint die folgenden Überlegungen zu rechtfertigen.

Man kann nach Herrn Cantoni einen Graphen erhalten, welcher dem abstrakten Inzidenzschema von  $G$  entspricht, indem man von zwei regulären 5-Ecken  $I$  und  $II$  ausgeht, deren Umkreismittelpunkte zusammenfallen, und die so liegen, daß jeder Radius durch eine Ecke des größern, etwa  $II$ , auch durch eine Ecke des kleinern geht. In beiden werden die Ecken der Reihe nach so mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 versehen, daß auf jedem Radius zwei gleiche Ziffern liegen. Nach dem Schema: (0, 0); (1, 2); (2, 4); (3, 1); (4, 3) werden die Ecken von  $I$  und  $II$  durch fünf weitere Kanten  $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4$  verbunden. Dabei ist die erste Ziffer jedes Paares eine Ecke auf  $I$ . Die neuen Kanten werden insgesamt mit  $\{k\}$  bezeichnet. Ecken von  $G$  sind nur die Ecken von  $I$  und  $II$ .

Um (2) zu beweisen, kann man etwa von den Faktoren 1. Grades von  $G$  ausgehen, das heißt jenen Systemen von paarweise fremden Kanten,

die jede Ecke aus  $G$  genau einmal enthalten. Jeder Faktor 2. Grades,  $F_2$ , entsteht ja durch Herausheben der Kanten eines Faktors  $F_1$ , exklusive Ecken aus  $G$ . Indem man bemerkt, daß ein  $F_1$  höchstens zwei Kanten von  $I$  oder  $II$  haben kann, reduziert man die Disjunktion auf drei Fälle.

a) Es sei  $F_1 = \{k\}$ .  $F_2$  ist dann  $I + II$ .

b)  $F_1$  enthalte nur *eine* Seite,  $s$ , von  $I$ . Dann müssen die Kanten  $k'$ ,  $k''$ ,  $k''' = \{k\}'$  aus  $\{k\}$ , die nicht in den Randpunkten von  $s$  entspringen auch zu  $F_1$  gehören. Nach der Struktur von  $G$  enthält aber jede Seite von  $II$  mindestens einen Endpunkt einer Kante aus  $\{k\}'$ , das heißt ein solcher Faktor 1. Grades existiert nicht. Da ein  $F_1$ , welcher eine einzige Seite von  $II$  enthielte, auch eine einzige Seite von  $I$  enthalten müßte, gibt es keine Faktoren 1. Grades, welche nur eine Seite von  $I$  bzw.  $II$  enthalten.

c)  $F_1$  enthält zwei (nicht benachbarte) Seiten  $a$  und  $b$  von  $I$ . Die Kante  $k_i$  aus  $\{k\}$ , welche von derjenigen Ecke  $i$  von  $I$  ausgeht, die nicht mit  $a$  oder  $b$  inzident ist, muß dann auch zu  $F_1$  gehören. Die beiden nicht benachbarten Kanten  $a^*$  und  $b^*$  auf  $II$ , welche den Randpunkt  $i^*$  von  $k_i$  nicht enthalten, bilden mit  $a$ ,  $b$  und  $k_i$  zusammen  $F_1$ . Es gibt fünf solche Faktoren.

Entfernt man einen von ihnen aus  $G$ , so bleiben zwei Fünfecke übrig. Beweis:  $F_2$  enthält die beiden von der Ecke  $i$  ausgehenden Seiten  $c$ ,  $d$  auf  $I$ , sowie die von ihren Endpunkten  $i$  ausgehenden Kanten  $k_j$  und  $k_n$  aus  $\{k\}$ . Nach der Struktur von  $G$  begrenzen deren Endpunkte  $j^*$  und  $h^*$  auf  $II$  eine Seite  $l^*$ , die weder mit  $a^*$  noch mit  $b^*$  identisch sein kann, da sonst entweder  $b^*$  oder  $a^*$  mit dem Endpunkt  $i^*$  von  $k_i$  inzident sein müßte.  $l^*$  gehört also zu  $F_2$ , w. z. b. w.

(1) kann man etwa so einsehen.  $I$  und  $II$  zusammen mit den beiden von derselben Seite von  $I$  ausgehenden Kanten  $k_m$  und  $k_n$  zerlegen die Kugelfläche in vier getrennte Gebiete. Entfernt man aus  $I + II + k_n + k_m$  die beiden auf  $II$  liegenden, von der Ecke  $A$  ausgehenden Kanten, welche als 2. Randpunkte die Ecken  $m^*$  bzw.  $n^*$  von  $k_m$  bzw.  $k_n$  besitzen, so liegt  $A$  isoliert im Innern eines einfachen Polygons  $III$  und muß mit einer Ecke  $E$  auf  $I$  außerhalb  $III$  durch eine Kante verbunden werden.

(Eingegangen den 21. September 1951.)