Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn R. Cantoni.

Autor(en): **Bäbler, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **26 (1952)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21269

Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn R. Cantoni

Von F. Bäbler, Zürich

Eine kürzlich erschienene Arbeit von Herrn R. Cantoni (Una rete speciale Periodico di Matematica, Serie IV, Vol. 29, pag. 37—41) bezieht sich auf einen regulären kubischen Graphen G mit den folgenden Eigenschaften:

(1). Er läßt sich nicht ohne Selbstüberschneidungen auf eine Kugel zeichnen.

(2). Seine Zerfällung in drei Faktoren 1. Grades ist nicht möglich. Diese Zerfällbarkeit ist für einen regulären kubischen Graphen, der einer Einteilung der Kugel in Länder entspricht, bekanntlich mit der Gültigkeit des 4-Farbensatzes äquivalent. Die Eigenschaft (2) drückt also aus, daß kubische Regularität allein jedenfalls für die erwähnte Zerfällbarkeit nicht ausreicht.

Herr Cantoni unterdrückt seinen Beweis für (2) mit der Bemerkung, der Beweisgang sei zwar offenkundig, aber infolge der vielen a priori bestehenden Möglichkeiten mühsam. Dieser Umstand scheint die folgenden Überlegungen zu rechtfertigen.

Man kann nach Herrn Cantoni einen Graphen erhalten, welcher dem abstrakten Inzidenzschema von G entspricht, indem man von zwei regulären 5-Ecken I und II ausgeht, deren Umkreismittelpunkte zusammenfallen, und die so liegen, daß jeder Radius durch eine Ecke des größern, etwa II, auch durch eine Ecke des kleinern geht. In beiden werden die Ecken der Reihe nach so mit den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4$ versehen, daß auf jedem Radius zwei gleiche Ziffern liegen. Nach dem Schema: $(0, 0)$; $(1, 2)$; $(2, 4)$; $(3, 1)$; $(4, 3)$ werden die Ecken von I und II durch fünf weitere Kanten k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 verbunden. Dabei ist die erste Ziffer jedes Paares eine Ecke auf I. Die neuen Kanten werden insgesamt mit $\{k\}$ bezeichnet. Ecken von G sind nur die Ecken von I und II.

Um (2) zu beweisen, kann man etwa von den Faktoren 1. Grades von G ausgehen, das heißt jenen Systemen von paarweise fremden Kanten, die jede Ecke aus G genau einmal enthalten. Jeder Faktor 2. Grades, F_2, entsteht ja durch Herausheben der Kanten eines Faktors F_1, exklusive Ecken aus G. Indem man bemerkt, daß ein F_1 höchstens zwei Kanten von I oder II haben kann. reduziert man die Disjunktion auf drei Fälle.

a) Es sei $F_1 = \{k\}$. F_2 ist dann $I + II$.

b) F_1 enthalte nur *eine* Seite, s, von I. Dann müssen die Kanten k', k'', $k''' = \{k\}'$ aus $\{k\}$, die nicht in den Randpunkten von s entspringen auch zu F_1 gehören. Nach der Struktur von G enthält aber jede Seite von II mindestens einen Endpunkt einer Kante aus $\{k\}'$, das heißt ein solcher Faktor 1. Grades existiert nicht. Da ein F_1, welcher eine einzige Seite von II enthielte, auch eine einzige Seite von I enthalten müßte, gibt es keine Faktoren 1. Grades, welche nur eine Seite von I bzw. II enthalten.

c) F_1 enthält zwei (nicht benachbarte) Seiten a und b von I. Die Kante k_i aus $\{k\}$, welche von derjenigen Ecke i von I ausgeht, die nicht mit a oder b inzident ist, muß dann auch zu F_1 gehören. Die beiden nicht benachbarten Kanten a^* und b^* auf II, welche den Randpunkt i^* von k_i nicht enthalten, bilden mit a, b und k_i zusammen F_1. Es gibt fünf solche Faktoren.

Entfernt man einen von ihnen aus G, so bleiben zwei Fünfecke übrig. Beweis: F_2 enthält die beiden von der Ecke i ausgehenden Seiten c, d auf I, sowie die von ihren Endpunkten i ausgehenden Kanten k_j und k_h aus $\{k\}$. Nach der Struktur von G begrenzen deren Endpunkte j^* und h^* auf II eine Seite l^*, die weder mit a^* noch mit b^* identisch sein kann, da sonst entweder b^* oder a^* mit dem Endpunkt i^* von k_i inzident sein müßte. l^* gehört also zu F_2, w. z. b. w.

(1) kann man etwa so einsehen. I und II zusammen mit den beiden von derselben Seite von I ausgehenden Kanten k_m und k_n zerlegen die Kugelfläche in vier getrennte Gebiete. Entfernt man aus $I + II + k_n + k_m$ die beiden auf II liegenden, von der Ecke A ausgehenden Kanten, welche als 2. Randpunkte die Ecken m^* bzw. n^* von k_m bzw. k_n besitzen, so liegt A isoliert im Innern eines einfachen Polygons III und muß mit einer Ecke E auf I außerhalb III durch eine Kante verbunden werden.

(Eingegangen den 21. September 1951.)