Bemerkung zum Typenproblem.

Bemerkung zum Typenproblem

Von Hans Wittich in Karlsruhe

Eine beliebige offene Riemannsche Fläche F werde durch eine Folge von Teilgebieten $F_n \subset F_{n+1}$ mit folgenden Eigenschaften ausgeschöpft: 1) Der Rand C_n von F_n setzt sich aus endlich vielen geschlossenen, stückweise analytischen Kurven zusammen, und $C_0, C_1, \ldots$ sind punktfremd. 2) $F - F_n$ besteht aus einer Anzahl von nichtkompakten Gebieten. 3) Für jedes kompakte Teilgebiet $\overline{F} \subset F$ gilt von einem bestimmten n an $\overline{F} \subset F_n$. L. Sario[1]) bewies den Satz: Wenn eine Ausschöpfung von F existiert, für welche das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$ der Minimalmoduln μ_n divergiert, dann ist der Rand von F hebbar. Aus diesem allgemeinen Hebbarkeitskriterium ergibt sich das Typenkriterium: Eine einfach zusammenhängende offene Riemannsche Fläche F ist dann und nur dann vom Grenzpunkttypus, wenn eine Ausschöpfung F_n von F existiert, für welche $\prod_1^{\infty} \mu_n$ divergiert. Die im Anschluß an diesen Satz naheliegende Frage, ob zu jeder zulässigen Ausschöpfung F_n einer Fläche F vom parabolischen Typus ein divergentes Modulprodukt gehört, ist zu verneinen, wie durch eine Konstruktion von L. Sario[2]) gezeigt wurde. Hier soll eine Fläche vom parabolischen Typus, bei der ein früher abgeleitetes Kriterium[3]) versagt, im Zusammenhang mit den Bemerkungen von L. Sario betrachtet werden.

Die zu betrachtenden einfach zusammenhängenden offenen Flächen F seien nur über den Grundpunkten $w = a_j = \exp j \cdot 2\pi i/q$, $j = 1, \ldots, q$, verzweigt und frei von algebraischen Windungspunkten. Für die Darstellung von F durch einen Streckenkomplex $\mathfrak{S}$ werden als Gliedkurven

---

[1]) *L. Sario*, Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 50.

[2]) *L. Sario*, Sur le problème du type des surfaces de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949) S. 1109.

[3]) *H. Wittich*, Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen, Math. Z. 45 (1939). Im folgenden zitiert mit (T).

die Halbstrahlen $\arg w = (2j-1)\,\pi/q$, als Innen- bzw. Außenknoten $w = 0$ bzw. $w = \infty$, als Zerschneidungskurve $\mathfrak{c}$ der Kreis $|w| = 1$ gewählt. Ist die Anzahl der Knotenpunkte mit Generationszahlen $\leq n$ gleich $\sigma(n)$, wobei jeder Knoten einfach gezählt wird, so ist für den Grenzpunkttypus der Fläche F die Divergenz der Reihe $\Sigma_1^\infty 1/\sigma(n)$ hinreichend. Nach der in (T) angegebenen Vorschrift werden für $n = 1, 2, \ldots$ geschlossene, stückweise analytische Kurven Γ_n im schlichten konformen Bild der Fläche konstruiert, wobei Γ_n alle Knoten der n-ten Generation trägt und nur diese. Die w-Bilder C_n dieser Kurven Γ_n beranden Flächenstücke F_n, die eine zulässige Ausschöpfung der Fläche F leisten. Zufolge der an F gestellten Bedingungen ist das Gebiet $E_n = F_{n+1} - F_n$ stets zweifach zusammenhängend und läßt sich schlicht konform in $1 < |Z| < \mu_n$ abbilden, wobei C_n in $|Z| = 1$ übergehen soll. Läßt man für F unendlich viele algebraische Windungspunkte zu, so können die Gebiete E_n komplizierteres Verhalten aufweisen.

Durch die Bilder der Gliedkurven wird der Kreisring $1 < |Z| < \mu_n$ in Teilgebiete zerlegt, nämlich in $v(n)$ Vierecke $\mathfrak{V}_j$, in Dreiecke $\mathfrak{D}_j$ und in Zweiecke $\mathfrak{Z}_j$ mit den Ecken (das sind Bilder von Knotenpunkten) auf $|Z| = 1$ und $|Z| = \mu_n$ (Fig. 1 und 2). Diese Gebiete lassen sich

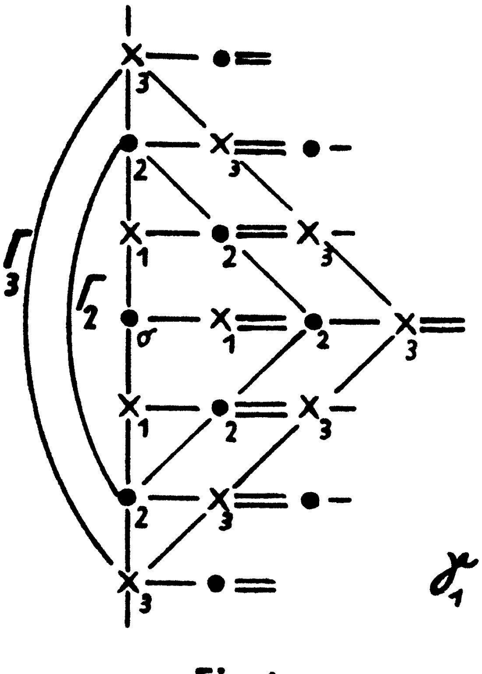

Fig.1

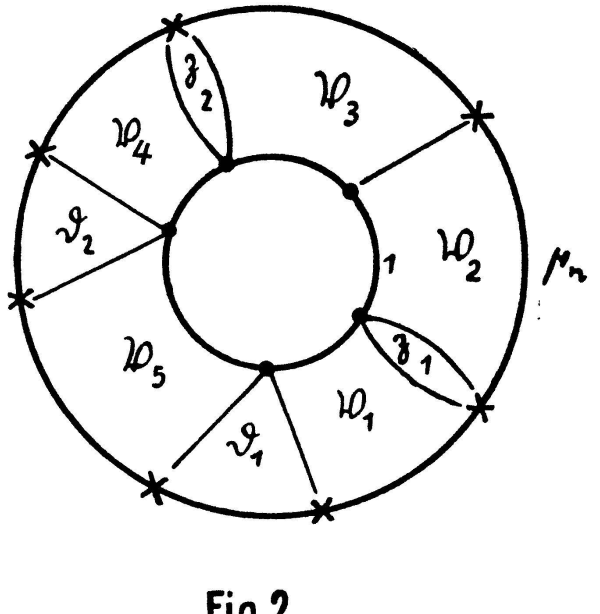

Fig.2

elementar quasikonform mit beschränktem Dilatationsquotienten Q in einfachere Gebiete abbilden. Durch $\zeta_j = g_j(Z)$ werden die logarithmischen Elementargebiete, denen ein Viereck $\mathfrak{V}$ oder ein Dreieck $\mathfrak{D}$ angehört, in $\Re\, \zeta_j > 0$ abgebildet, wobei der bei der Ausschöpfung zuerst erfaßte Knoten auf dem Rande des Elementargebietes nach $\zeta_j = 0$ kommt. Haben die den auf $|Z| = 1$ gelegenen Ecken des Vierecks entsprechenden Knoten im Streckenkomplex von dem $\zeta_j = 0$ zugeordneten Knoten den Knotenabstand k_j, so geht $\mathfrak{V}_j$ durch $\zeta_j = g_j(Z)$ in das Gebiet $k_j < |\zeta_j| < k_j + 1$, $|\arg \zeta_j| < \pi/2$ über. Die ζ_j-Bilder der in $\mathfrak{V}_j$ gelegenen Teilbögen α_j von $|Z| = R$, $1 \leq R \leq \mu_n$, haben also eine Gesamtlänge $\geq \pi k_j$. Aus

$$\pi \sum_{j=1}^{v} k_j \leq \sum_{1}^{v} \int_{\alpha_j} \left| \frac{d\zeta_j}{d \log Z} \right| |d \log Z|$$

folgt wegen $\sum_{j=1}^{v(n)} \int_{\alpha_j} |d \log Z| \leq 2\pi$ nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{\pi}{2} (\sum_{j=1}^{v(n)} k_j)^2 \leq \sum_{1}^{v(n)} \int_{\alpha_j} \left| \frac{d\zeta_j}{d \log Z} \right|^2 |d \log Z|$$

und nach Integration nach $\log R$, $1 \leq R \leq \mu_n$, zusammen mit

$$\left| \frac{d\zeta_j}{d \log Z} \right|^2 \leq Q \frac{\boxed{d\zeta_j}}{\boxed{d \log Z}}\ ^{4)},$$

$$\frac{\pi}{2} (\sum_{1}^{v} k_j)^2 \log \mu_n \leq Q \sum_{1}^{v} \int\!\!\int \boxed{d\zeta_j} = \pi Q \sum_{1}^{v} (2 k_j + 1) \leq 3 Q \pi \sum_{1}^{v} k_j\,,$$

da $k_j \geq 1$. Danach gilt

$$\log \mu_n \leq 6 Q \frac{1}{\sum_{1}^{v} k_j} \leq \frac{6 Q}{\sigma(n)} = \frac{B}{\sigma(n)}\,,$$

weil $\sum_{1}^{v(n)} k_j \geq \sigma(n)$ erfüllt ist, also

$$\log \prod_{n=1}^{N} \mu_n \leq B \sum_{n=1}^{N} 1/\sigma(n)\,.$$

Entsprechend zeigt man unter Verwendung der in (T) angegebenen Konstruktionen, daß die Beziehung

$$A \sum_{1}^{N} 1/\sigma(n) \leq \log \prod_{1}^{N} \mu_n$$

besteht, A eine positive Konstante. $\sum_1^\infty 1/\sigma(n)$ und $\prod_1^\infty \mu_n$ zeigen also gleiches Konvergenzverhalten. Dieselbe Beziehung

---

[4] $\boxed{dz}$ = Flächenelement in der z-Ebene.

$$A \sum_{1}^{N} 1/\sigma(n) \leq \log \prod_{1}^{N} \mu_n \leq B \sum_{1}^{N} 1/\sigma(n)$$

gilt auch noch für Flächen F mit endlich vielen algebraischen Windungspunkten, wie man durch passende Wahl von F_0 erkennt. Danach gibt es zu jeder Fläche F der betrachteten Klasse, die zum parabolischen Typus gehört und die Eigenschaft $\sum_1^\infty 1/\sigma(n) < \infty$ hat, eine zulässige Ausschöpfung mit konvergentem Modulprodukt. Für die von $w = \exp(e^z)$ (bzw. einer linearen Transformierten) erzeugte Fläche mit dem Streckenkomplex $\mathfrak{S}_1$ (Fig. 1) ist wegen $\sigma(n) = (n+1)^2$ $\prod_1^\infty \mu_n$ konvergent. Weitere Flächen mit derselben Eigenschaft sind die durch $w = \exp(e^{P(z)})$, $P(z)$ Polynome, erzeugten Flächen. Man kann auch endlich viele Komplexe $\mathfrak{S}_1$ mittels endlich vieler algebraischer Elementargebiete zu einem neuen Streckenkomplex $\mathfrak{S}$ zusammenfügen, der eine Fläche vom Grenzpunkttypus mit $\sum_1^\infty 1/\sigma(n) < \infty$ definiert (Fig. 3).

Für Flächen F mit endlich vielen logarithmischen und algebraischen Windungspunkten lassen sich die Moduln μ_n, bezogen auf generationsweise Ausschöpfung, so genau nach beiden Seiten abschätzen, daß man in Verbindung mit dem Modulsatz Ordnung und Defekte der diese Flächen erzeugenden Funktionen berechnen kann. Für Flächen mit endlich vielen periodischen Enden ist $\sum_1^\infty 1/\sigma(n)$ divergent, gibt also die genaue Typenaussage. Wegen der unendlich vielen algebraischen Windungspunkte weicht aber die in (T) benützte Ausschöpfung von der in der Wertverteilungslehre üblichen durch $|z| = r \to \infty$ so stark ab, daß man zur Bestimmung von Ordnung, Defekten und Indizes der Erzeugenden eine erhebliche Abänderung der Ausschöpfung vornehmen muß.

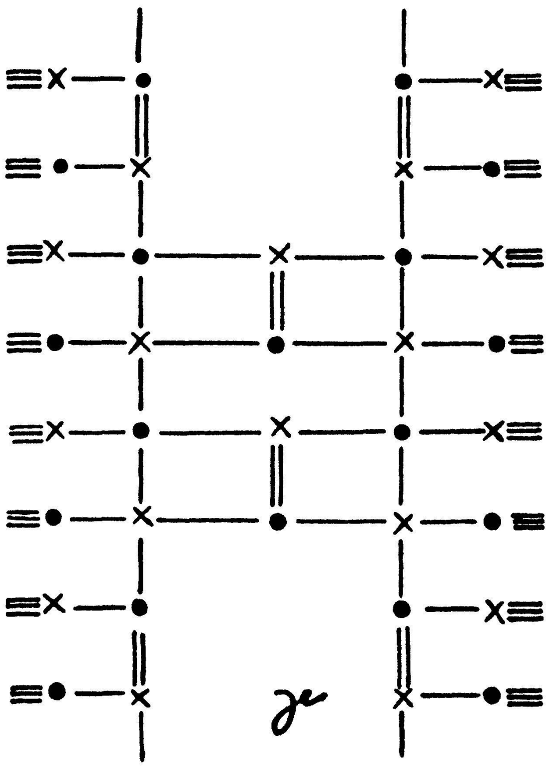

Fig. 3

(Eingegangen den 3. März 1952.)