

# Sur les groupes doublement transitifs continus.

Autor(en): **Tits, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **26 (1952)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21276>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Sur les groupes doublement transitifs continus

Par J. Tits<sup>1)</sup>, Bruxelles

## 1. Introduction

1.1. Généralisant un résultat que j'avais obtenu antérieurement [16], M. H. Freudenthal a récemment démontré le théorème suivant (cf. [3]<sup>2)</sup>) :

**Théorème 1.** *Soit  $G$  un groupe triplement transitif continu opérant sur un espace topologique  $E$ <sup>3)</sup> localement compact, non totalement discontinu et satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité. Il existe un homéomorphisme  $\varphi$  de  $E$  sur la droite projective réelle ou complexe, tel que le transformé  $\varphi G \varphi^{-1}$  de  $G$  par  $\varphi$  coïncide avec le groupe de toutes les transformations homographiques  $y = (a \cdot x + b)/(c \cdot x + d)$ ,  $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ .*

Il est naturel de se demander quels sont, sous les mêmes conditions, tous les groupes doublement transitifs continus existants<sup>4)</sup>? La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.** *Soit  $G$  un groupe doublement transitif continu opérant sur un espace topologique  $E$  localement compact, non totalement discontinu et satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité. Il existe un homéomorphisme  $\varphi$  de  $E$  sur l'ensemble des nombres réels, des nombres complexes ou*

---

<sup>1)</sup> Chargé de Recherches du F. N. R. S., Bruxelles.

<sup>2)</sup> En vue de la suite, nous énonçons ce théorème sous une forme légèrement différente de celle qui lui est donnée par M. Freudenthal; l'équivalence des deux énoncés résulte immédiatement d'une proposition démontrée au § 3.3.

<sup>3)</sup> La définition des groupes triplement transitifs continus opérant sur un espace topologique est tout-à-fait analogue à celle des groupes doublement transitifs continus, donnée au § 3.2. Pour une définition explicite on peut se reporter à [16].

<sup>4)</sup> Rappelons (cf. [17], chapitre IV, et aussi [16], introduction) que pour  $n > 3$ , il n'existe aucun groupe  $n$ -uplement transitif (et a fortiori aucun groupe  $n$ -uplement transitif continu) opérant sur un espace d'une infinité de points. Notons aussi que la recherche des groupes simplement transitifs continus existants est équivalente à la recherche des groupes topologiques.

des quaternions, tel que le transformé  $\varphi G \varphi^{-1}$  de  $G$  par  $\varphi$  coïncide avec le groupe de toutes les transformations linéaires  $y = a \cdot x + b$ ,  $a \neq 0$ .

Dans le cas particulier où l'on fait l'hypothèse que  $E$  est une variété à une dimension, ce théorème est contenu dans les travaux de M. L. E. J. Brouwer [1]; pour les variétés à deux dimensions il a été démontré par Kerékjártó [7], qui a aussi obtenu, dans [8], un résultat plus précis que celui du théorème II pour le cas unidimensionnel, à savoir :

*$G$  étant un groupe doublement transitif de transformations biunivoques et bicontinues de la droite euclidienne, il existe un homéomorphisme  $\varphi$  de la droite sur elle-même tel que le transformé  $\varphi G \varphi^{-1}$  de  $G$  par  $\varphi$  coïncide avec le groupe de toutes les similitudes (c'est-à-dire avec le groupe de toutes les transformations linéaires  $y = a \cdot x + b$ ,  $a \neq 0$ ).*

L'objet principal du présent article est la démonstration du théorème II dans le cas général. Dans cette démonstration, j'utilise essentiellement les propriétés des groupes à deux bouts, dont la structure a été complètement déterminée par M. K. Iwasawa [4] et indépendamment par M. Freudenthal [3] (qui se sert de ses résultats dans sa démonstration du théorème 1), ainsi que d'un théorème de M. F. Kalscheuer [5] caractérisant les corps des nombres réels, des nombres complexes et des quaternions comme étant les seuls «presque-corps»<sup>5)</sup> continus ayant le corps des nombres réels comme corps de base.

1.2. D'après Pontrjagin [12], tout corps topologique localement compact et connexe est isomorphe au corps des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions. Au § 5, je montre, à titre d'exemple d'application du théorème 2, que si l'on ajoute aux hypothèses de ce théorème de Pontrjagin le premier axiome de dénombrabilité, on peut, sans changer le résultat, y remplacer les corps par des systèmes algébriques plus généraux que je nomme pseudo-corps (cf. théorème 5). Si l'on se restreint à la considération des presque-corps, qui sont cas particuliers des pseudo-corps, le résultat précédent est susceptible d'une démonstration

---

<sup>5)</sup> Par *presque-corps*, nous entendons ici un «presque-corps complet» (vollständiger Fastkörper) au sens de M. H. Zassenhaus [18], c'est-à-dire un ensemble  $E$  tel que

a) les éléments de  $E$  forment groupe par rapport à une opération d'addition (+), dont nous appellerons 0 l'élément neutre;

b) les éléments non nuls de  $E$  forment groupe par rapport à une opération de multiplication ( $\cdot$ ) et on pose, en outre,  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ ;

c) la multiplication est distributive à gauche par rapport à l'addition:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Si le groupe additif de  $E$  est un groupe vectoriel sur un corps commutatif  $K$ , nous disons, avec M. Kalscheuer, que le pseudo-corps  $E$  a  $K$  comme corps de base.

directe, indépendante de l'hypothèse de dénombrabilité (cf. § 5.6) ; on a donc le

**Théorème 3.** *Tout presque-corps topologique localement compact et non totalement discontinu est isomorphe au corps des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions qui renferme comme cas particuliers le théorème de Pontrjagin et, essentiellement <sup>6)</sup>, le théorème de Kalscheuer (qui est d'ailleurs utilisé dans la démonstration).*

1.3. Lorsque l'espace  $E$  est de dimension finie, le théorème 1 est susceptible d'une démonstration particulièrement simple qui fait l'objet du § 6 ; si je reviens ici sur un cas particulier d'un théorème déjà connu, ce n'est pas seulement pour la raison indiquée, mais aussi parce que la démonstration en question repose sur un théorème auxiliaire, énoncé ci-après, qui peut présenter par lui-même un certain intérêt :

**Théorème 4.** *Soit  $G$  un groupe localement compact, connexe, de dimension finie et satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Si  $G$  possède un automorphisme involutif  $\sigma$  ( $\sigma^2 = \text{identité}$ ) dont l'élément unité de  $G$  est un point fixe isolé,  $G$  est un groupe abélien et  $\sigma$  est l'automorphisme qui fait correspondre à tout élément  $x$  de  $G$  son inverse  $x^{-1}$  <sup>7)</sup>.*

Il peut être utile de noter que, dans tous les cas, le théorème 1 est une conséquence presque immédiate du théorème 2.

## 2. Les groupes doublement transitifs: Définitions et propriétés générales <sup>8)</sup>

2.1. *Définitions.* Un groupe de transformations <sup>9)</sup> d'un ensemble donné quelconque  $E$  est *doublement transitif* s'il existe une et une seule transformation du groupe transformant deux éléments donnés distincts  $p$  et  $q$  de  $E$  en deux éléments donnés distincts  $p'$  et  $q'$  de  $E$ , et cela quels que soient les couples  $p, q$  et  $p', q'$ .

Dans la suite,  $E$  et  $G$  désigneront respectivement un ensemble quelconque et un groupe doublement transitif opérant sur cet ensemble. Les éléments de  $E$  seront nommés points.

---

<sup>6)</sup> Pour plus de précision sur ce point, voir § 5.7.

<sup>7)</sup> Je dois l'énoncé de ce théorème à une suggestion de M. A. Borel qui m'a fait remarquer que si un groupe de Lie jouit des propriétés indiquées, il est nécessairement abélien, comme on s'en aperçoit immédiatement si l'on traduit ces propriétés en termes d'algèbre de Lie.

<sup>8)</sup> La plupart des notions et des propositions de cette seconde partie sont indiquées dans [17] (cf. chapitre II, § A 2, et § B, remarque 2).

<sup>9)</sup> Nous réserverons ici le terme « transformation » pour désigner une application bi-univoque d'un ensemble sur lui-même.

2.2. Une transformation appartenant à  $G$  sera dite *involutive* si elle est cyclique d'ordre 2 ; il en est ainsi de toute transformation  $T$  de  $G$  qui échange deux points distincts quelconques (parce que  $T^2$  conserve alors ces deux points et est donc la transformation identique, en vertu de la double transitivité de  $G$ ). Les transformations involutives seront encore appelées *involutions*.

2.3. Deux involutions quelconques  $I$  et  $I'$  sont conjuguées (c'est-à-dire qu'il existe au moins une transformation  $T$  appartenant à  $G$  telle que  $TIT^{-1} = I'^{10}$ ). En effet, soient  $p$  et  $q$  (respectivement  $p'$  et  $q'$ ) deux points distincts se correspondant dans l'involution  $I$  (respectivement  $I'$ ) et  $T$  la transformation de  $G$  qui transforme  $p$  en  $p'$  et  $q$  en  $q'$  ; la transformation  $TIT^{-1}$  échange  $p'$  et  $q'$ , et n'est autre que  $I'$ .

En particulier, les involutions de  $G$  ont toutes un ou toutes zéro point uni. Suivent le cas, nous dirons que le groupe  $G$  est de *première* ou de *seconde espèce*.

2.4. Si  $G$  est de première espèce, il existe une et une seule involution ayant pour point uni un point donné  $u$ . Supposons en effet qu'il en existe deux,  $I$  et  $I'$ , et soient  $p$  un point quelconque, distinct de  $u$ , et  $T$  la transformation qui conserve  $p$  et qui transforme  $Ip$  en  $I'p$  ;  $T$  transforme  $I$  en  $I'$ , donc elle conserve  $u$  ; conservant  $p$  et  $u$  elle ne peut être que la transformation identique, et  $I = I'$ .

Il résulte de la propriété précédente que si  $G$  est de première espèce, les involutions sont simplement transitives sur  $E$  (c'est-à-dire que deux points donnés quelconques, distincts ou confondus, sont échangés par une et une seule involution). Cette conclusion reste valable lorsque  $G$  est de deuxième espèce si l'on convient, dans ce cas, de considérer la transformation identique comme une involution, ce que nous ferons toujours par la suite.

2.5. *Opérations d'addition et de multiplication associées*. Choisissons dans  $E$  deux points distincts, fixés une fois pour toute, que nous nommerons respectivement 0 et 1. Dans la suite,  $I_0$  désignera l'unique involution conservant 0.

Nous appellerons *translations* les transformations de la forme  $II_0$ , où  $I$  désigne une involution quelconque ; elles sont simplement transitives sur  $E$  puisque les involutions le sont (cf. § 2.4).

---

<sup>10</sup>) Notons, pour éviter une confusion éventuelle, que dans [14], [15] et [17], nous employons le mot «conjugué» dans un sens différent de celui qui lui est donné ici.

Nous appellerons encore *homothéties*<sup>11)</sup> les transformations de  $G$  qui conservent  $0$  ; elles sont simplement transitives sur  $E - 0$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux points quelconques. Il existe une et une seule translation transformant  $0$  en  $a$  ; elle transforme  $b$  en un point que nous nommerons *somme* de  $b$  et de  $a$  et que nous désignerons par  $b + a$ . Si  $a$  est différent de  $0$ , il existe une et une seule homothétie transformant  $1$  en  $a$  ; elle transforme  $b$  en un point que nous nommerons *produit* de  $a$  et de  $b$  et que nous désignerons par  $a \cdot b$ . Lorsque  $a = 0$ , nous poserons par définition  $a \cdot b = 0$ , quel que soit  $b$ .

Les opérations de somme et de produit seront nommées respectivement addition et multiplication.

2.6. On a  $0 + a = a + 0 = a = a \cdot 1 = 1 \cdot a$  et  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .

2.7.  $y = a \cdot x$  ( $a \neq 0$ ) est l'équation de l'homothétie qui transforme  $1$  en  $a$  ;  $y = x + b$  est l'équation de la translation qui transforme  $0$  en  $b$ .

Toute transformation  $T$  appartenant à  $G$  est d'une et une seule façon produit d'une homothétie par une translation ; en effet, si  $U$  est la translation qui transforme  $0$  en  $T0$ , la transformation  $V = T^{-1}U$  est une homothétie et on a  $T = UV$ . Par conséquent,  $y = a \cdot x + b$  ( $a \neq 0$ ) est l'équation de la transformation la plus générale appartenant à  $G$ .

2.8. Les homothéties forment groupe. Il en résulte que les points différents de  $0$  forment groupe par rapport à la multiplication (le produit est associatif et tout point  $a \neq 0$  possède un inverse  $a^{-1}$  tel que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ ).

2.9. La transformée  $V = TUT^{-1}$  d'une translation quelconque  $U = II_0$  (voir § 2.5) par une homothétie  $T$  est une translation ; en effet,  $I_0$  est conservée par  $T$  (étant l'unique involution qui conserve  $0$ ), et la transformée de  $I$  par  $T$  est une involution. Soient  $U \equiv y = x + b$  et  $T \equiv y = a \cdot x$  ( $a \neq 0$ ) ; alors  $V = TUT^{-1}$  transforme  $0$  en  $a \cdot b$ , donc  $V \equiv y = x + a \cdot b$ , et la relation  $TV = UT$  peut s'écrire  $a \cdot x + a \cdot b = a \cdot (x + b)$ , c'est-à-dire que la multiplication est distributive à gauche par rapport à l'addition.

2.10.  $a$  étant un point quelconque, nous désignerons par  $-a$  son transformé par  $I_0$  et nous écrirons, quel que soit  $b$ ,  $b + (-a) = b - a$ . Lorsque le groupe  $G$  est de deuxième espèce (cf. § 2.3), on a  $-a = a$ .

---

<sup>11)</sup> Les homothéties correspondent à ce que nous avons appelé dans [14] et [17] *proportionnalités*.

On a, quel que soit  $a$ ,  $-(-a) = a$ , et  $(-1) \cdot a = a \cdot (1-1) = -a$ ; en particulier  $(-1)^2 = 1$ .

L'inverse d'une translation  $U = II_0$  est une translation; en effet, on a  $U^{-1} = I_0I = (I_0II_0)I_0$ , et  $I_0II_0$  est une involution. De façon plus précise, si  $U \equiv y = x + b$ ,  $U^{-1} \equiv y = x - b$ , c'est-à-dire qu'on a, quels que soient  $x$  et  $b$ ,  $(x + b) - b = x$ .

2.11. *Deux translations sont permutables si et seulement si leur produit est une translation. En particulier, si les translations forment groupe, ce groupe est abélien et réciproquement, si les translations sont deux à deux permutables, elles forment groupe.*

En effet, soient  $U = II_0$  et  $U' = I'I_0$  les deux translations considérées. Pour qu'on ait  $UU' = U'U$ , c'est-à-dire  $II_0I'I_0 = I'I_0II_0$ , il faut et il suffit que  $II_0I' = I'I_0I$ , ou encore que  $II_0I' = (II_0I')^{-1}$ , c'est-à-dire que  $II_0I'$  soit une involution, donc que  $UU' = II_0I'I_0$  soit une translation.

2.12. Notons qu'en vertu de 2.9 (loi de distributivité à gauche), si on a  $(x + a) + b = (x + b) + a$ , quels que soient  $x$  et  $b$ , pour une valeur donnée non nulle de  $a$ , cette relation reste satisfaite quel que soit  $a$ . Donc, en vertu de 2.11,

*S'il existe une translation (différente de la translation identique) qui est permutable avec toutes les autres, les translations forment groupe et ce groupe est abélien; l'addition est alors commutative et associative.*

2.13. Bien qu'il n'en soit pas fait usage par la suite, nous signalerons encore la propriété suivante :

*Si la multiplication associée à  $G$  est commutative, les translations forment groupe et ce groupe est abélien.*

Soient  $T \equiv y = x + a$  et  $U \equiv y = x + b$  deux translations quelconques et supposons que  $TU$  ne soit pas une translation, c'est-à-dire qu'on ait  $TU \equiv y = (x + b) + a = c \cdot x + d$ , avec  $c \neq 1$ .

Soit  $y = x + e$  ( $e \neq 0$ ) la translation qui transforme  $c$  en 1. En multipliant par  $d \cdot e^{-1}$  les deux membres de la relation  $c + e = 1$ , il vient  $c \cdot (d \cdot e^{-1}) + d = d \cdot e^{-1}$ .

Il en résulte que le point  $d \cdot e^{-1}$  est uni pour  $TU$ , c'est-à-dire que  $U$  et  $T^{-1}$  transforment  $d \cdot e^{-1}$  en un même point; les translations étant simplement transitives, on doit avoir  $U = T^{-1}$ , et  $TU$  est la transformation identique, ce qui contredit notre hypothèse.

### 3. Groupes doublement transitifs continus

3.1. Tous les espaces topologiques considérés ici seront supposés de Hausdorff.

3.2. *Définition.* Soient  $E$  un espace topologique et  $G$  un groupe doublement transitif opérant sur  $E$ .

Soit  $\mathfrak{C}$  l'espace des couples de points distincts de  $E$ , que nous supposons muni de la topologie naturelle (induite par la topologie du produit  $E \times E$ , dont  $\mathfrak{C}$  est un sous-espace). Choisissons dans  $\mathfrak{C}$  un élément fixe  $(a, b)$  (couple de points de  $E$ ) de référence, et considérons la correspondance biunivoque entre  $G$  et  $\mathfrak{C}$  qui fait correspondre à toute transformation  $T$  de  $G$  le couple  $(Ta, Tb)$  (élément de  $\mathfrak{C}$ ) transformé de  $(a, b)$  par  $T$ .

Nous pouvons introduire sur  $G$  une topologie caractérisée par la condition que cette correspondance soit un homéomorphisme. Si, muni de cette topologie,  $G$  est un groupe topologique (c'est-à-dire, si les opérations du groupe sont continues), nous dirons que c'est un *groupe doublement transitif continu opérant sur  $E$* . Lorsqu'il en est ainsi, la topologie en question ne dépend pas du couple  $(a, b)$  choisi, et de plus,  $G$  est un groupe topologique de transformations de  $E$  au sens de Montgomery et Zippin [11] (c'est-à-dire que le transformé  $Tx$  d'un point  $x$  par une transformation  $T$  de  $G$  dépend continument de la paire  $(T, x)$ ).

3.3. *Remarques concernant la définition précédente.* Soient  $E$  un espace topologique et  $G$  un groupe topologique de transformations de  $E$  (au sens de Montgomery et Zippin), et supposons que  $G$  soit doublement transitif. Pour que  $G$  soit un groupe doublement transitif continu opérant sur  $E$ , au sens du § 3.2, il faut et il suffit (par définition) que la transformation  $T$  de  $G$  qui transforme deux points distincts donnés  $a$  et  $b$  respectivement en deux points distincts variables  $x$  et  $y$ , soit fonction continue du couple  $(x, y)$ . Nous allons montrer que cette condition peut être remplacée par une condition plus faible ; de façon précise,

*Pour que  $G$  soit un groupe doublement transitif continu opérant sur  $E$ , au sens du § 3.2, il faut et il suffit qu'il existe au moins un couple de points distincts  $(a, b)$  tel que la transformation de  $G$  qui conserve  $b$  et qui transforme  $a$  en un point variable  $x \neq b$  soit fonction continue de  $x$ .*

Nous devons seulement montrer que la condition est suffisante ; supposons donc qu'elle soit remplie et notons immédiatement qu'elle reste alors satisfaite lorsqu'on remplace le couple  $(a, b)$  par n'importe quel couple de points distincts (en vertu de la double transitivité de  $G$ ). Cela étant, soient  $(a, b)$  et  $(x, y)$  deux couples de points distincts, l'une fixe,



l'autre variable ; si  $x \neq b$ , la transformation  $T_x$  de  $G$  qui conserve  $b$  et qui transforme  $x$  en  $a$  dépend continument de  $x$  ; elle transforme  $y$  en un point  $z$  qui dépend continument du couple  $(x, y)$ . De même, la transformation  $U_z$  de  $G$  qui conserve  $a$  et qui transforme  $b$  en  $z$  dépend continument de  $z$ , donc du couple  $(x, y)$ . Par conséquent, si  $x \neq b$ , la transformation  $T_x^{-1}U_z$  de  $G$  qui transforme  $a$  et  $b$  respectivement en  $x$  et  $y$  dépend continument de  $(x, y)$  ; pour montrer que ceci reste vrai lorsque  $x = b$ , il suffit de remplacer le point  $b$  par un point différent  $b'$  dans tout ce qui précède, et de noter que la transformation de  $G$  qui transforme  $a$  et  $b$  respectivement en  $x$  et  $y$  est le produit de la transformation (constante) qui conserve  $a$  et qui transforme  $b$  en  $b'$  par la transformation qui transforme  $a$  et  $b'$  respectivement en  $x$  et  $y$ .

Notons un corollaire important de la proposition précédente :

*Soit  $G$  un groupe doublement transitif topologique de transformations d'une espace topologique  $E$ . Si  $G$  et  $E$  sont localement compacts et satisfont au deuxième axiome de dénombrabilité,  $G$  est un groupe doublement transitif continu opérant sur  $E$ , au sens du § 3.2.*

Soient  $a$  et  $b$  deux points distincts appartenant à  $E$ . Le groupe  $G_a$  des transformations de  $G$  qui conservent  $a$  est un sous-groupe fermé de  $G$  ; il est donc localement compact et vérifie d'autre part le deuxième axiome de dénombrabilité. Cela étant, considérons l'application biunivoque de  $G_a$  sur  $E - a$  qui applique toute transformation  $T$  de  $G_a$  sur le point  $Tb$ , transformé de  $b$  par  $T$  ; on peut montrer que cette application est un homéomorphisme en reproduisant exactement la démonstration donnée par exemple dans Pontrjagin [13] (cf. théorème 13, p. 65) du théorème de Freudenthal d'après lequel tout homomorphisme continu d'un groupe localement compact satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité sur un autre groupe remplissant les mêmes conditions est ouvert. La démonstration s'achève par application de la proposition précédente.

3.4. Soient  $E$  un espace topologique et  $G$  un groupe doublement transitif continu opérant sur  $E$ .

$x, y, x', y', z$  étant cinq points quelconques de  $E$  tels que  $x \neq y$  et  $x' \neq y'$ , la transformation  $T$  de  $G$  qui transforme  $x$  et  $y$  respectivement en  $x'$  et  $y'$  dépend continument du quadruple  $(x, y, x', y')$ , et le transformé  $Tz$  de  $z$  par cette transformation dépend continument du quintuple  $(x, y, x', y', z)$  ; la démonstration de ces propriétés est aisée (cf. par exemple [16], théorème 3).

3.5.  $x$  étant un point quelconque de  $E$ , nous désignerons par  $I(x)$  l'involution d'élément uni  $x$  (cf. 2.4) ; cette involution dépend continu-

ment de  $x$ . En effet, soient  $a$  et  $b$  deux points fixes distincts quelconques, et supposons qu'on ait  $x \neq a$  (restriction non essentielle vu le caractère arbitraire du choix de  $a$ );  $I(x)$  est la transformée de  $I(b)$  par la transformation de  $G$  qui conserve  $a$  et qui transforme  $b$  en  $x$ , et celle-ci dépend continument de  $x$ .

3.6. *Continuité des opérations associées à  $G$ .* Ayant choisi dans  $E$  deux points distincts 0 et 1, on peut, suivant le paragraphe 2.5, définir dans  $E$  une addition et une multiplication. Soient  $x$  et  $y$  deux points quelconques; l'homothétie  $T_x$  qui transforme 1 en  $x$  et l'involution  $I_x$  qui échange 0 et  $x$  dépendent continument de  $x$  pour tout  $x \neq 0$  (en  $x = 0$ ,  $T_x$  n'est pas définie et  $I_x$  peut, a priori, être discontinue); il en résulte que, sauf peut-être au point  $x = 0$ , le produit  $x \cdot y = T_x y$  et la somme  $y + x = I_x I_0 y$  sont des fonctions continues du couple  $(x, y)$ , tandis que l'inverse  $x^{-1} = T_x^{-1} 1$ , définie seulement pour  $x \neq 0$ , est fonction continue de  $x$ .

En particulier, le groupe multiplicatif des points de  $E$  différents de 0 est un groupe topologique (dans la topologie induite par  $E$ ).

3.7. *Si le produit  $x \cdot y$  est fonction partout continue de  $x$  (pour  $y = \text{const}$ ) et si  $G$  est de première espèce (cf. 2.3), la somme  $y + x$  est fonction partout continue du couple  $(x, y)$ .*

$I_x$  désignera comme précédemment l'involution échangeant 0 et  $x$ . Si nous appelons  $u$  le point uni de l'involution  $I_1$ , le point uni de  $I_x$  est  $x \cdot u$ . En vertu de 3.5,  $I_x$  dépend continument de  $x \cdot u$ , donc aussi de  $x$ , quel que soit  $x$  (en vertu de l'hypothèse de continuité du produit). Notre proposition résulte alors de l'identité  $y + x = I_x I_0 y$ .

## 4. Démonstration du théorème 2

4.1. Soient  $E$  un espace localement compact, non totalement discontinu et satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité,  $G$  un groupe doublement transitif continu opérant sur  $E$ , et 0 et 1 deux points fixes distincts appartenant à  $E$ .

4.2.  *$E$  n'est pas compact.* Supposons en effet que  $E$  soit compact et soit  $\{a_\nu\}$  ( $a_\nu \neq 0$ ) une suite de points convergeant vers 0; la suite  $\{a_\nu^{-1}\}$  des inverses converge aussi vers 0, car si une sous-suite de  $\{a_\nu^{-1}\}$ , soit  $\{a_{\nu'}^{-1}\}$ , convergeait vers un point  $p \neq 0$ , on aurait  $\lim_{\nu' \rightarrow \infty} a_{\nu'} = \lim_{\nu' \rightarrow \infty} (a_{\nu'}^{-1})^{-1} = p^{-1}$ .

Soient  $I_\nu$  l'involution échangeant 1 et  $a_\nu$ , et  $b_\nu$  le transformé de 0 par cette involution. L'homothétie (cf. § 2.5) qui transforme 1 en  $a_\nu^{-1}$  transforme 0,  $a_\nu$  et  $b_\nu$  respectivement en 0, 1 et  $c_\nu = a_\nu^{-1} \cdot b_\nu$ ; elle transforme

donc  $I_\nu$  en une involution  $J_\nu$  qui échange  $a_\nu^{-1}$  et 1, et  $c_\nu$  et 0. Lorsque  $\nu$  tend vers  $\infty$ ,  $a_\nu$  et  $a_\nu^{-1}$  tendent vers 0, donc  $I_\nu$  et  $J_\nu$  tendent vers l'involution  $I$  qui échange 0 et 1, par conséquent  $b_\nu = I_\nu 0$  et  $c_\nu = J_\nu 0$  tendent vers  $I 0 = 1$ , et  $a_\nu = b_\nu \cdot c_\nu^{-1}$  tend vers 1, ce qui est absurde.

4.3. *E est connexe.* Cela résulte immédiatement du fait que  $E$  n'est pas totalement discontinu et possède un groupe doublement transitif d'homéomorphismes.

4.4. *Soit p un point quelconque de E. Les composantes connexes de E - p sont en nombre fini, toutes ouvertes dans E, et si C désigne l'une quelconque d'entre elles, C ∪ p n'est pas compact.*

Nous supposons  $E - p$  non connexe.

Soient  $q$  un point distinct de  $p$ , et  $O_1$  un ensemble non vide, ouvert et fermé dans  $E - q$ , et ne contenant pas  $p$ . Tout ensemble  $O$  ouvert et fermé dans  $E - p$  et contenant  $q$  contient  $O_1$ ; en effet, les ensembles  $E - p - O$  et  $O_1$  ont pour frontières respectives dans  $E$  les points  $p$  et  $q$ ; aucun d'eux ne contenant la frontière de l'autre, leur intersection est sans point frontière dans  $E$  et est donc l'ensemble vide ( $E$  étant connexe). Il résulte de ce qui précède que la pseudo-composante de  $q$  (c'est-à-dire, l'intersection de tous les ensembles contenant  $q$ , ouverts et fermés) dans  $E - p$  contient  $O_1$ , et a donc des points intérieurs; par raison de transitivité, tous les points de  $E - p$  sont intérieurs à leur pseudo-composante, c'est-à-dire que les pseudo-composantes de  $E - p$  sont ouvertes et sont donc identiques aux composantes connexes ordinaires de  $E - p$ .

Considérons un voisinage compact  $U$  de  $p$ , et soit  $F$  sa frontière. Les composantes de  $E - p$  qui ont une intersection non vide avec  $F$  sont en nombre fini, car  $E$ , étant compact, ne peut se décomposer en une infinité d'ouverts disjoints. Ces composantes, que nous nommerons  $C_1, \dots, C_r$  sont les seules composantes de  $E - p$  car s'il en existait d'autres, celles-ci seraient contenues dans  $U$  (devant être connexes et avoir  $p$  comme point frontière), leurs fermetures seraient donc compactes; il en serait de même, par raison de transitivité, des fermetures des composantes  $C_1, \dots, C_r$ , et l'espace  $E = U \cup \bar{C}_1 \cup \dots \cup \bar{C}_r$  serait compact.

4.5. *Le groupe multiplicatif des éléments de E différents de 0 est isomorphe au produit du groupe additif R des nombres réels par un groupe compact K.*

Nous désignerons par  $C$  la composante connexe de 1 dans  $E - 0$ , et nous nommerons brièvement «groupe  $E - 0$ » (respectivement «groupe  $C$ ») le groupe multiplicatif des points de  $E - 0$  (respectivement  $C$ ).

$C$  étant l'espace d'un groupe localement compact, connexe et vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, il possède au maximum deux bouts (cf. Freudenthal [2]); il en possède donc exactement deux car le point 0 en est un (puisque  $E$  est connexe) et ne peut être le seul car  $C \setminus 0$  n'est pas compact (cf. § 4.4). Il en résulte (cf. [4], théorème 5) que le groupe  $C$  est isomorphe au produit  $R \times K'$  de  $R$  par un groupe compact connexe  $K'$ .

Si  $E - 0$  est connexe, notre proposition est démontrée.

Si  $E - 0$  n'est pas connexe,  $E$  est déconnecté par chacun de ses points; il en est donc de même de  $C$ . Par conséquent, le groupe  $K'$  se réduit à son élément unité,  $C$  est isomorphe à  $R$ , et l'espace  $E - 0$  se compose d'un nombre fini (cf. § 4.4) de composantes homéomorphes à  $R$ . L'espace  $E$  étant homogène, ce nombre est égal à 2 et le groupe  $E - 0$  est isomorphe au produit du groupe  $R$  par un groupe cyclique d'ordre 2.

4.6. Si  $\{a_\nu\}$  et  $\{b_\nu\}$  sont respectivement une suite convergeant vers 0 et une suite convergente quelconque de points de  $E$ , la suite  $\{a_\nu \cdot b_\nu\}$  converge vers 0; autrement dit, en vertu de 3.6, le produit  $x \cdot y$  est fonction partout continue du couple  $(x, y)$ .

Une suite  $\{a_\nu\}$  de points de  $E$  diverge (c'est-à-dire, est sans point limite) si et seulement si la suite  $\{a_\nu^{-1}\}$  des inverses converge vers 0.

Si l'espace  $E - 0$  est connexe, le groupe  $E - 0$  à deux bouts qui sont respectivement le point 0, et le bout limite de toutes les suites divergentes de  $E$ ; les deux propositions précédentes résultent alors de propriétés classiques des groupes à deux bouts (cf. [2], théorèmes 8 et 10).

Si  $E - 0$  n'est pas connexe, le groupe  $E - 0$  est isomorphe au produit du groupe  $R$  par un groupe cyclique d'ordre 2 (cf. § 4.5); il est en particulier abélien, et nos deux propositions se démontrent aisément en tenant compte des résultats du § 3.6.

4.7. La somme  $x + y$  est fonction partout continue du couple  $(x, y)$ . En vertu des §§ 3.7 et 4.6, il nous suffit de considérer le cas où  $G$  est de seconde espèce (cf. § 2.3), c'est-à-dire, le cas où  $x = -x$  est une identité.

Soient  $\{a_\nu\}$  une suite convergeant vers 0,  $b_\nu = 1 + a_\nu$ , et  $T_\nu$ ,  $U_\nu$  et  $V_\nu$  les transformations de  $G$  d'équations respectives

$$y = b_\nu \cdot x, \quad y = b_\nu^{-1} \cdot (x + a_\nu) \quad \text{et} \quad y = x + a_\nu.$$

$U_\nu$  transforme les points  $a_\nu$ , 1 et  $b_\nu$  respectivement en les points 0, 1 et  $b_\nu^{-1}$ . Lorsque  $\nu$  tend vers  $\infty$ ,  $a_\nu$  tend vers 0, donc  $U_\nu$  tend vers la transformation identique. En vertu de la deuxième proposition du § 4.6,

l'une au moins des deux suites  $\{b_\nu\}$  et  $\{b_\nu^{-1}\}$  n'est pas divergente. Supposons, pour fixer les idées, que  $\{b_\nu\}$  possède une sous-suite convergente  $\{b_{\nu'}\}$ , dont le point limite sera dénoté par  $b$ . Il suit de la relation  $U_\nu b_\nu = b_\nu^{-1}$  que la suite  $\{b_{\nu'}^{-1}\}$  converge aussi vers  $b$ , donc que  $b = b^{-1}$ , c'est-à-dire (puisque  $G$  est de seconde espèce) que  $b = 1$ . Par conséquent, lorsque  $\nu$  tend vers  $\infty$ ,  $b_\nu$  tend vers 1,  $T_\nu$  tend vers la transformation identique et il en est de même de  $V_\nu = T_\nu U_\nu$ , ce qui démontre notre proposition (en vertu des résultats du § 3.6).

4.8. Soit  $R_{0,1}$  le lieu des points de  $E$  qui, dans un isomorphisme déterminé du groupe  $R \times K$  sur le groupe multiplicatif  $K - 0$  (cf. § 4.5), correspond aux éléments de  $R \times K$  de la forme  $(r, e)$ , où  $r$  est un nombre réel quelconque et où  $e$  est l'élément neutre de  $K$ .  $R_{0,1}$  est contenu dans le centre du groupe multiplicatif  $E - 0$ .

$a$  et  $b$  étant deux points distincts quelconques de  $E$ , l'ensemble  $R_{a,b}$ , transformé de  $R_{0,1}$  par la transformation de  $G$  qui transforme respectivement 0 et 1 en  $a$  et  $b$ , jouit des propriétés suivantes (qui sont immédiates lorsque  $a = 0$  et  $b = 1$ , et qui s'étendent au cas général par raison de transitivité) :

$R_{a,b}$  est connexe, contient  $b$ , n'est contenu dans aucun sous-ensemble connexe de  $E$ , et a par conséquent une intersection non vide avec la frontière de tout voisinage compact de  $b$  ;

les transformations de  $G$  qui conservent  $a$  et qui transforment  $b$  en un point de  $R_{a,b}$  commutent avec toutes les transformations de  $G$  qui conservent  $a$ .

4.9. *L'addition est associative et commutative.*  $a \neq 0$  et  $b$  étant deux points distincts quelconques de  $E$ , désignons par  $T_{a,b}$  la transformation de  $G$  qui conserve  $a$  et qui transforme 0 en  $b$ . Si  $a$  appartient au centre du groupe multiplicatif  $E - 0$ , l'équation de cette transformation est

$$y = (1 - b \cdot a^{-1}) \cdot x + b, \quad (1)$$

en effet, on a alors (en vertu de 2.8 et 2.9)

$$(1 - b \cdot a^{-1}) \cdot 0 + b = b$$

et

$$(1 - b \cdot a^{-1}) \cdot a + b = a \cdot (1 - a^{-1} \cdot b) + b = a - b + b = a.$$

Désignons par  $F$  la frontière d'un voisinage compact de 0, et par  $\{a_\nu\}$  une suite divergente de points appartenant tous au centre du groupe multiplicatif  $E - 0$  (par exemple, une suite divergente de points

de l'ensemble  $R_{0,1}$  défini au § 4.8). Choisissons pour tout  $\nu$ , un point  $b_\nu$  appartenant à l'intersection des ensembles  $R_{a_\nu,0}$  et  $F$  (intersection qui n'est pas vide en vertu des résultats du § 4.8).  $F$  est compact ; la suite  $\{b_\nu\}$  possède donc au moins un point d'accumulation  $b$ , dans  $F$ , et nous pouvons même supposer qu'elle converge vers  $b$ , en remplaçant éventuellement la suite  $\{a_\nu\}$  par une sous-suite convenable.

Soit  $c$  un point fixe quelconque. Les transformations  $T_{a_\nu, b_\nu}$  et  $T_{a_\nu, c}$  sont permutables (en vertu de 4.8, car  $b$  appartient à l'ensemble  $R_{a_\nu,0}$ ) ; mais lorsque  $\nu$  tend vers  $\infty$ , ces transformations tendent respectivement vers les translations  $y = x + b$  et  $y = x + c$ , comme il résulte immédiatement de l'équation (1) et de la continuité des opérations d'addition et de multiplication ; il en résulte que la translation  $y = x + b$  (qui est différente de la transformation identique puisque  $b$ , appartenant à  $F$ , est différent de 0) commute avec la translation  $y = x + c$ , donc avec toutes les translations, étant donné le caractère arbitraire de  $c$ . Notre proposition résulte à présent de celle du § 2.12.

4.10. *Le groupe additif  $E$  est un groupe vectoriel.* En effet, d'après la théorie de Pontrjagin (cf. [13], théorème 41), le groupe additif  $E$  est le produit de son sous-groupe compact maximal  $Z$  par un groupe vectoriel. Mais  $Z$  est invariant pour toutes les homothéties  $y = a \cdot x$  (car celles-ci sont des automorphismes du groupe additif  $E$ ), qui opère transitivement sur  $E - 0$  ; donc  $Z$  se réduit au seul point 0, sinon il s'identifierait avec  $E$ , qui serait compact.

4.11. Nous savons à présent que les points de  $E$  forment groupe par rapport à l'addition, que les points de  $E - 0$  forment groupe par rapport à la multiplication, et que cette dernière est distributive à gauche par rapport à l'addition ; en d'autres termes,  $E$  est un presque-corps<sup>12)</sup>. De plus, le groupe additif de  $E$  est un groupe vectoriel et la multiplication est partout continue, donc, en vertu d'un résultat de F. Kalscheuer [5], le presque-corps  $E$  est isomorphe au corps des nombres réels, des nombres complexes, ou des quaternions. La démonstration s'achève par application de la conclusion du § 2.7.

## 5. Pseudo-corps et presque-corps topologiques

5.1. *Définition.* Nous nommerons *pseudo-corps* tout ensemble  $E$  muni de deux opérations, une addition et une multiplication, jouissant des propriétés suivantes :

---

<sup>12)</sup> Cf. note 5, p. 204.

5.1.1. Le produit  $a \cdot b$  et la somme  $a + b$  sont définis quel que soit le couple  $(a, b)$ .

5.1.2. Il existe dans  $E$  un élément  $0$  tel qu'on ait, quel que soit  $a$   $0 + a = a + 0 = a$  et  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .

5.1.3. Pour tout élément  $a$  appartenant à  $E$ , il existe au moins un élément  $-a$  tel que  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

5.1.4. Les éléments de  $E$  différents de  $0$  forment groupe par rapport à la multiplication (l'élément neutre de ce groupe sera toujours désigné par  $1$ ).

5.1.5. On a, quels que soient  $a, b$  et  $c$ ,  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

5.1.6. On a, quels que soient  $a, b$  et  $c$ ,

$$(a + b) + c = \rho(b, c) \cdot a + (b + c)$$

où  $\rho(b, c)$  est un élément de  $E$  dépendant uniquement de  $b$  et de  $c$ .

Si on remplace ce dernier postulat par le postulat d'associativité de l'addition, on a la définition des presque-corps<sup>13</sup>), qui sont donc des cas particuliers de pseudo-corps.

Les axiomes précédents n'ont pas été posés arbitrairement ; ils sont satisfait par les opérations d'addition et de multiplications associées à un groupe doublement transitif (cf. § 2.5, et aussi [17], p. 40), et ils assurent, d'autre part, la validité de la proposition du § 5.3.

5.2. *Propriétés.* Soient  $E$  un pseudo-corps,  $a$  un élément de  $E$ , et  $-a$  un autre élément tel que  $a + (-a) = (-a) + a = 0$  ; on a alors

$$(5.2.1) \quad (x + a) + (-a) = x ;$$

en effet, si  $a = 0$  c'est évident, et si  $a \neq 0$  on a (cf. 5.1.6)

$$(x + a) + (-a) = \rho(a, -a) \cdot x ,$$

et en posant  $x = -a$  on voit que  $\rho(a, -a) = 1$ .

De la relation précédente, il résulte immédiatement que la seule solution de l'équation  $x + a = 0$  est  $x = -a$ .

On a  $(-1) + 1 = 0$  ; en multipliant à gauche par  $(-1)$ , il vient  $(-1)^2 + (-1) = 0$  ; d'où, en comparant avec  $1 + (-1) = 0$ ,

$$(5.2.2) \quad -(-1) = (-1)^2 = 1.$$

---

<sup>13</sup>) Cf. note 5, p. 204.

Plus généralement, on démontre sans peine que  $a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$ , et que  $-(-a) = a$ , quel que soit  $a$ .

On posera, par définition  $a + (-b) = a - b$ .

5.3. Soit  $E$  un pseudo-corps. L'application de  $E$  sur lui-même définie par l'équation (1)  $y = a \cdot x + b$  ( $a \neq 0$ ) est biunivoque. L'ensemble des applications de ce type est un groupe doublement transitif.

Cette proposition résulte des observations suivantes :

Un simple calcul montre que l'application (1) possède une inverse d'équation

$$(5.3.1) \quad y = a^{-1} \cdot x + a^{-1} \cdot (-b) ,$$

et que le produit de l'application (1) par l'application  $y = a' \cdot x + b'$  est l'application

$$(5.3.2) \quad y = \varrho(a' \cdot b, b') \cdot a' \cdot a \cdot x + (a' \cdot b + b') ;$$

les conditions pour que l'application (1) transforme 0 et 1 respectivement en deux éléments donnés distincts  $p$  et  $q$ , sont

$$(5.3.3) \quad b = p \text{ et } a + b = q ;$$

considérées comme équations en  $a$  et  $b$ , ces conditions ont pour unique solution

$$(5.3.4) \quad a = q - p \quad b = p.$$

5.4. *Définitions.* Nous appellerons *pseudo-corps* (respectivement *presque-corps*) *topologique* un pseudo-corps (respectivement un presque-corps) muni d'une topologie telle que les opérations d'addition, de multiplication et d'inversion soient continues.

Dans un pseudo-corps topologique, les fonctions  $-x = (-1) \cdot x$  et  $\varrho(x, y) = (1 + x) + y - (x + y)$  (cf. 5.1.6) sont continues.

Soient  $E$  un pseudo-corps topologique et  $G$  le groupe de toutes les transformations de  $E$  d'équation  $y = a \cdot x + b$  ( $a \neq 0$ ). En vertu des formules (5.3.3) et (5.3.4), le couple  $(p, q)$  transformé du couple  $(0, 1)$  par la transformation  $y = a \cdot x + b$  est fonction continue du couple  $(a, b)$ , et réciproquement ; il en résulte que si l'on choisit comme couple de référence le couple  $(0, 1)$ , la topologie définie sur  $G$  suivant le procédé décrit au § 3.2, n'est autre que la topologie obtenue en identifiant de façon naturelle  $G$  au produit direct  $(E - 0) \times E$ , la transformation  $y = a \cdot x + b$  étant identifiée au couple  $(a, b)$ . En vertu des formules (5.3.1) et (5.3.2), le groupe  $G$ , muni de cette topologie, est un groupe topologique et est donc un groupe doublement transitif continu opérant sur  $E$ , au sens du § 3.2.



**5.5. Théorème 5.** *Tout pseudo-corps topologique localement compact, non totalement discontinu et satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité est isomorphe au corps des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions.*

*Démonstration.* Soit  $E$  le pseudo-corps considéré. En vertu du théorème 2 et des résultats du paragraphe précédent, il existe un homéomorphisme  $T$  de  $E$  sur un corps  $K$ , qui est l'un des trois corps indiqués, tel que le transformé par  $T$  du groupe  $G$  de toutes les transformations de  $E$  d'équations  $y = a \cdot x + b$  ( $a \neq 0$ ) soit le groupe  $G'$  des transformations de  $K$  définies de façon analogue. Pour la clarté de l'exposé, les symboles désignant des éléments de  $K$  seront affectés de primes; en particulier l'élément neutre pour l'addition (respectivement la multiplication) dans  $K$  sera dénoté par  $0'$  (respectivement  $1'$ ).

Le groupe  $G'$  étant doublement transitif, il est toujours possible, en combinant  $T$  avec une transformation convenablement choisie de  $G'$ , d'obtenir un homéomorphisme de  $E$  sur  $K$  qui jouit des mêmes propriétés que  $T$  et qui transforme  $0$  et  $1$  respectivement en  $0'$  et  $1'$ ; nous supposons que  $T$  lui-même réalise cette condition.

La transformation de  $E$  définie par l'équation  $y = a \cdot x$  ( $a \neq 0$ ), transforme  $0$  et  $1$  respectivement en  $0$  et  $a$ ; sa transformée par  $T$  transforme donc  $0'$  et  $1'$  respectivement en  $0'$  et  $Ta$ , et est par conséquent la transformation d'équation  $y' = Ta \cdot x'$ ; on a donc, quels que soient  $a \neq 0$  et  $x$ , appartenant à  $E$ ,

$$T(a \cdot x) = Ta \cdot Tx, \quad (1)$$

et cette relation reste évidemment valable lorsque  $a = 0$ .

Posons  $T(-1) = e'$ . En vertu des relations (1) et (5.2.2), on a  $e'^2 = 1'$ , d'où

$$e' = 1' \quad \text{ou} \quad -1'. \quad (2)$$

La transformation de  $E$  définie par l'équation  $y = x + 1$  transforme  $-1$  et  $0$  respectivement en  $0$  et  $1$ ; sa transformée par  $T$  transforme donc  $e'$  et  $0'$  respectivement en  $0'$  et  $1'$  et est par conséquent la transformation d'équation  $y' = -e'^{-1} \cdot x' + 1'$ ; on a donc, quel que soit  $x$  appartenant à  $E$ ,

$$T(x + 1) = -e'^{-1} \cdot x' + 1'. \quad (3)$$

Posons  $x = a^{-1} \cdot b$  ( $a \neq 0$ ) et multiplions les deux membres de (3) à gauche par  $Ta$ ; il vient, en tenant compte de (1), (2) et (5.1.5)

$$T(b + a) = -e'^{-1} \cdot Tb + Ta;$$

par continuité, cette relation doit rester vérifiée lorsque  $a = 0$ , c'est-à-dire qu'on a  $Tb = -e'^{-1} \cdot Tb$ , d'où  $e' = -1$ , et enfin,

$$T(b + a) = Tb + Ta . \quad (4)$$

Les relations (1) et (4) montrent que  $T$  est un isomorphisme, et notre théorème est démontré.

### 5.6. Remarques

5.6.1. Si dans un pseudo-corps  $E$  muni de ses opérations d'addition  $(+)$  et de multiplication  $(\cdot)$ , on introduit une nouvelle addition  $(\dot{+})$  définie par la relation

$$a \dot{+} b = e \cdot a + b$$

avec  $e = +$  ou  $-1$  suivant que  $b =$  ou  $\neq 0$ , cette nouvelle opération d'addition et l'ancienne multiplication satisfont tous les axiomes du § 5.1 et le groupe des transformations d'équations  $y = a \cdot x \dot{+} b$  est identique au groupe des transformations d'équations  $y = a \cdot x + b$ .

Etant donné un groupe doublement transitif  $G$  opérant sur un ensemble  $E$ , les seuls systèmes d'opérations d'addition et de multiplication qui satisfont les postulats du § 5.1, et telles que  $G$  soit le groupe des transformations d'équations  $y = a \cdot x + b$  ( $a \neq 0$ ), sont le système construit au § 2.5 (déterminé au choix des points 0 et 1 près), et celui qu'on obtient à partir de celui-là en appliquant le procédé précédent ; ces deux systèmes sont identiques si et seulement si le groupe  $G$  est de seconde espèce (cf. § 2.3).

5.6.2. Pour démontrer le théorème 5, nous avons utilisé le résultat du théorème 2, mais il est évident que nous aurions pu le démontrer directement en reproduisant la démonstration du théorème 2 sans parler de groupe doublement transitif. Notons cependant que dans le cas du théorème 2, il était nécessaire de démontrer que les fonctions  $y + x$  et  $x \cdot y$  sont continues en  $x = 0$ , alors que cela fait ici partie des hypothèses. L'hypothèse de continuité de  $y + x$  en  $x = 0$  est d'ailleurs effectivement utilisée dans la démonstration du théorème 5, car si nous l'abandonnons (c'est-à-dire, si nous supposons seulement que la somme  $y + x$  est partout continue sauf peut-être en  $x = 0$ ), le pseudo-corps  $E$  peut être non seulement l'un des trois corps indiqués, mais encore l'un des trois pseudo-corps obtenus à partir de ceux-là par application du procédé décrit au début du numéro 5.6.1.

5.7. Nous allons montrer à présent que lorsque le pseudo-corps  $E$  considéré est un presque-corps, l'hypothèse de dénombrabilité du théo-

rème 5 peut être supprimée. En outre, nous remplacerons l'hypothèse d'après laquelle  $E$  est un pseudo-corps topologique par l'hypothèse suivant laquelle  $E$  est un presque-corps muni d'une topologie telle que le produit  $x \cdot y$  et la somme  $x + y$  soient des fonctions partout continues du couple  $(x, y)$  avec exceptions éventuelles aux points  $x = 0$  et  $y = 0$  pour le produit, ce que nous exprimerons en disant que  $E$  est un presque-corps *faiblement topologique*. Nous adoptons ce point de vue plus général pour les motifs suivants :

Il peut être utile, dans certains cas, de considérer des presque-corps munis d'une topologie telle que le groupe additif de tous les éléments et le groupe multiplicatif des éléments non nuls de ce presque-corps soient des groupes topologiques ; ce sont là des presque-corps faiblement topologiques mais non nécessairement (du moins a priori) topologiques.

Le théorème de F. Kalscheuer [5], mentionné plus haut, n'est pas à proprement parler un cas particulier du théorème 3 (cf. § 1.2) car parmi les hypothèses qui y sont faites ne figure pas la continuité de l'inversion (notons cependant que celle-ci résulte immédiatement des autres hypothèses du théorème) ; il est par contre un cas particulier du théorème suivant, généralisant le théorème 3, et que nous allons à présent démontrer.

**Théorème 3'.** *Tout presque-corps faiblement topologique, localement compact et non totalement discontinu, est isomorphe au corps des nombres réels, des nombres complexes, ou des quaternions.*

*Démonstration.* Notons tout d'abord qu'en vertu de l'identité  $x \cdot y = x \cdot (y + a) - x \cdot a$ , le produit  $x \cdot y$  est fonction partout continue du couple  $(x, y)$  sauf peut-être pour  $x = 0$ .

Si  $E$  n'est pas compact, on peut démontrer notre théorème en suivant les raisonnements des §§ 4.3, 4.10 et 4.11 (qui peuvent aisément être mis sous une forme analytique ne faisant pas explicitement intervenir le groupe  $G$ ), et en se souvenant que, d'après E. R. van Kampen [6], les résultats de Pontrjagin concernant les groupes abélien localement compacts sont valables indépendamment de toute hypothèse de dénombrabilité.

Supposons donc  $E$  compact, soient  $a \neq 0$  un élément donné arbitrairement dans  $E$ , et  $U$  un voisinage ouvert de  $a^{-1}$  ne contenant pas 0. En vertu des propriétés de continuité de la multiplication, nous pouvons associer à tout élément  $x \neq a^{-1}$  de  $E$  deux ouverts  $V_x$  et  $W_x$ , contenant respectivement  $a$  et  $x$ , et tels que le produit  $V_x \cdot W_x$  (au sens de la multiplication dans  $E$ ) ne contienne pas 1. L'ensemble  $\mathfrak{C}U$  (complémentaire de  $U$  dans  $E$ ) est compact ; il peut donc être recouvert par un nombre

fini d'ouverts choisis parmi les  $W_x$ ; soient  $W_i$  ces ouverts,  $V_i$  les ouverts  $V_x$  correspondants et  $V = \bigcap_i V_i$  l'intersection de tous les  $V_i$ . Aucun des ensembles  $V \cdot W_i$  ne contient 1, par conséquent 1 n'est pas contenu non plus dans l'ensemble  $V \cdot \mathfrak{C}U$ , c'est-à-dire qu'on a  $V^{-1} \subset U$ ;  $V$  étant un voisinage de  $a$ , nous voyons que la fonction  $x^{-1}$  est continue en  $a$ .

Soit  $f$  la fonction définie de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} ;$$

cette fonction est partout continue; en effet, nous avons vu plus haut qu'elle est continue en tout point  $x \neq 0$ , et elle est aussi continue au point 0 car si  $U$  désigne un voisinage ouvert de 0,  $\mathfrak{C}U$  est compact, donc  $f(\mathfrak{C}U)$  est compact, et  $f(U) = \mathfrak{C}f(\mathfrak{C}U)$  est un voisinage ouvert de 0. On a, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$x(1 + f(x)) = x + 1 ,$$

donc, pour tout  $x \neq 0$  et  $-1$ ,

$$x = (x + 1) (1 + f(x))^{-1} ;$$

les deux membres de cette relation conservent un sens et sont continues en  $x = 0$ ; les valeurs qu'ils prennent en ce point doivent donc être égales, ce qui donne  $0 = 1$ . Par conséquent  $E$  ne peut être compact.

## 6. Démonstration du théorème 4 et application à la démonstration du théorème 1

6.1. *Démonstration du théorème 4.* Soient  $G$  et  $\sigma$  le groupe et l'automorphisme satisfaisant aux conditions de l'énoncé, et soit  $n$  la dimension de  $G$ .

Supposons tout d'abord que  $G$  soit localement connexe, et soient  $e$  l'élément unité de  $G$ ,  $U$  un voisinage de  $e$  ne contenant aucun élément fixe de  $\sigma$  en dehors de  $e$ ,  $V$  un voisinage compact de  $e$  tel que  $V^{-1} \cdot V \subset U$ , et  $f$  l'application continue de  $G$  dans  $G$  définie par  $f(x) = x^\sigma \cdot x^{-1}$ . La restriction  $f_V : V \xrightarrow{f} f(V)$  de  $f$  à  $V$  est biunivoque, car si

$$x^\sigma \cdot x^{-1} = y^\sigma \cdot y^{-1} \quad \text{et} \quad x \in V, \quad y \in V ,$$

on a

$$(y^{-1} \cdot x)^\sigma = (y^\sigma)^{-1} \cdot x^\sigma = y^{-1} \cdot x \quad \text{et} \quad y^{-1} \cdot x \in U ,$$

donc  $y^{-1} \cdot x = e$  et  $y = x$ , en vertu de la condition imposée à  $U$ .

$V$  est compact, donc  $f_V$ , qui est continue et biunivoque, est un homéo-

morphisme. Il en résulte que l'ensemble  $f(V)$  a la dimension  $n$ , et possède donc un point intérieur (cf. D. Montgomery [9], théorème 3); et il en est de même, a fortiori, de  $f(G)$ .

Soit  $b = a^\sigma \cdot a^{-1}$  un point intérieur de  $f(G)$ . L'homéomorphisme de  $G$  sur  $G$  qui transforme  $x$  en  $(a^\sigma)^{-1} \cdot x \cdot a$ , conserve  $f(G)$ , car on a  $(a^\sigma)^{-1} \cdot x^\sigma \cdot x^{-1} \cdot a = (a^{-1} \cdot x)^\sigma \cdot (a^{-1} \cdot x)^{-1}$ , et transforme  $b$  en  $e$ ; par conséquent  $e$  est un point intérieur de  $f(G)$ . Désignons alors par  $W'$  un voisinage de  $e$  tel que  $W' \cdot W' \subset f(G)$ , et posons  $W = W' \cap (W')^\sigma$ ;  $W$  est un voisinage de  $e$ , et on a  $W \cdot W \subset f(G)$ , et  $W^\sigma = W$ . Sur  $f(G)$ , l'automorphisme  $\sigma$  s'identifie avec l'inversion car on a  $(x^\sigma \cdot x^{-1})^\sigma = x \cdot (x^\sigma)^{-1} = (x^\sigma \cdot x^{-1})^{-1}$ ; donc, si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $G$  appartenant à  $W$ , on a  $a \cdot b = (a^\sigma \cdot b^\sigma)^\sigma = (a^{-1} \cdot b^{-1})^{-1} = b \cdot a$ . Dans  $W$ , la multiplication est donc commutative et on a  $a^\sigma = a^{-1}$ ; notre théorème résulte alors du fait que  $G$ , étant connexe, est engendré par  $W$ .

Si  $G$  n'est pas localement connexe, il possède un sous-groupe  $G'$  partout dense dans  $G$ , et qui, muni d'une nouvelle topologie, plus fine que celle induite sur  $G'$  par  $G$ , est un groupe topologique connexe, localement compact et localement connexe, de dimension  $n$  (cf. D. Montgomery [10], théorème 10<sup>14</sup>); il résulte de la façon dont le groupe  $G'$  et sa topologie sont définis (dans [10]), que l'un et l'autre sont conservés par tout automorphisme bicontinuu de  $G$ , et en particulier, dans le cas qui nous intéresse, par  $\sigma$ . La restriction de  $\sigma$  à  $G'$  est un automorphisme involutif de  $G'$  jouissant de toutes les propriétés énoncées; en vertu de la partie de théorème 4 déjà démontrée,  $G'$  est abélien, et on a, pour tout  $x$  appartenant à  $G'$ ,  $x = x^{-1}$ ; le théorème 4 résulte alors du fait que  $G'$  est partout dense dans  $G$ .

6.2. Rappel de [15], théorème 4<sup>15</sup>): *Soit  $G$  un groupe triplement transitif opérant sur un ensemble quelconque  $E$ . Si les transformations de  $G$  qui conservent deux points donnés de  $E$  sont deux à deux permutable,  $G$  est un groupe projectif, c'est-à-dire qu'il est possible d'identifier les éléments de  $E$  avec les éléments d'un corps  $K$  complété au moyen d'un élément  $\infty$ , de telle façon que les transformations de  $G$  soient les transformations d'équation  $y = (a \cdot x + b)/(c \cdot x + d)$ ,  $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ . La réciproque est vraie<sup>16</sup>).*

<sup>14</sup>) L'emploi du sous-groupe localement connexe partout dense dans la démonstration du théorème IV m'a été suggérée par M. le Professeur D. Montgomery lui-même; je tiens à lui en exprimer ici mes sincères remerciements.

<sup>15</sup>) Cf. aussi [17], chapitre II B, théorème VI.

<sup>16</sup>) La proposition énoncée ici peut être démontrée aisément en faisant usage de la proposition du § 2.13 (qui la contient d'ailleurs partiellement).

Si  $E$  est un espace topologique et si  $G$  est un groupe triplement transitif continu opérant sur  $E$ <sup>17)</sup>,  $K$  est un corps topologique.

6.3. *Application du théorème 4 à la démonstration du théorème 1 dans le cas où l'espace  $E$  est de dimension finie.*

Soient  $E$  un espace de dimension finie satisfaisant aux hypothèses du théorème 1,  $G$  un groupe triplement transitif continu opérant sur  $E$ ,  $0$ ,  $1$  et  $\infty$  trois points de  $E$ , deux à deux distincts, et  $G_1$  le groupe des transformations de  $G$  qui conservent  $0$  et  $\infty$ .

En procédant comme au § 2.5, on peut, à partir des transformations de  $G_1$ , définir sur l'ensemble  $E - 0 - \infty$  une opération de multiplication telle que  $E - 0 - \infty$  soit un groupe (et, de façon plus précise, un groupe topologique dans la topologie induite par  $E$ ) d'élément neutre  $1$ , dont les translations à gauche ( $y = a \cdot x$ ) sont les transformations de  $G_1$ .

La transformation  $T$  de  $G$  qui échange  $0$  et  $\infty$  et qui conserve  $1$  transforme toute transformation de  $G_1$  en une transformation de  $G_1$ ; considérée comme opérant sur  $E - 0 - \infty$ , elle définit donc un automorphisme involutif du groupe multiplicatif  $E - 0 - \infty$ , automorphisme qui possède au maximum deux points unis (en vertu de la triple transitivité de  $G$ ).

Si  $E - 0 - \infty$  est connexe, le théorème 4 nous enseigne que le groupe multiplicatif  $E - 0 - \infty$ , et par conséquent aussi le groupe  $G_1$ , est abélien; il en résulte que le groupe  $G$  est projectif (cf. § 6.2), et le théorème 1 résulte du théorème de Pontrjagin concernant les corps topologiques.

Si  $E - 0 - \infty$  n'est pas connexe, on montre, par un raisonnement analogue au précédent que la composante connexe  $C$  de  $1$  dans le groupe multiplicatif  $E - 0 - \infty$ , est un groupe abélien et est, par conséquent isomorphe au produit d'un groupe compact connexe  $K$  par un groupe vectoriel. Etant déconnecté par chacun de ses points,  $C$  doit être isomorphe au groupe additif des nombres réels. On voit alors, par raison d'homogénéité, que les composantes connexes du groupe multiplicatif  $E - 0 - \infty$  sont au nombre de deux, d'où il résulte que ce groupe est isomorphe au produit du groupe additif des nombres réels par un groupe cyclique d'ordre 2, et est donc abélien. La démonstration s'achève comme plus haut<sup>18) 19)</sup>.

---

<sup>17)</sup> Cf. note 3, p. 203.

<sup>18)</sup> Pour les détails de démonstration qui sont omis ici, on se reportera aux §§ 4.4 et 4.5.

<sup>19)</sup> Ajouté aux épreuves: Depuis la présentation du présent article, MM. D. Montgomery et L. Zippin ont montré (cf. Proc. Nat. Acad. Sc. vol. 38, n° 5, Mai 1952), en

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Brouwer, L. E. J.*, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, *Math. Ann.* 67 (1909) pp. 246—267.
- [2] *Freudenthal, H.*, Neuaufbau der Endentheorie, *Ann. Math.* 43 (1942) pp. 261 bis 279.
- [3] —, La structure des groupes à deux bouts et des groupes triplement transitifs, *Indagationes Math.* 13 (1951) pp. 288—294.
- [4] *Iwasawa, K.*, Topological groups with invariant compact neighborhoods of the identity, *Ann. Math.* 54 (1951) pp. 345—348.
- [5] *Kalscheuer, F.*, Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper über dem Körper der reellen Zahlen als Grundkörper, *Hamb. Abhandlungen* 13 (1940) pp. 413—435.
- [6] *Kampen, E. R. van*, Locally bicomact abelian groups and their character groups, *Ann. Math.* 36 (1935) pp. 448—463.
- [7] *Kerékjártó, B. de*, Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère, *Acta Math.* 74 (1941) pp. 311—341.
- [8] —, Sur les groupes transitifs de la droite, *Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math.* 10 (1941—1943) pp. 21—35.
- [9] *Montgomery, D.*, Theorems on the topological structure of locally compact groups, *Ann. Math.* 50 (1949) pp. 570—580.
- [10] —, Finite dimensional groups, *Ann. Math.* 52 (1950) pp. 591—605.
- [11] *Montgomery, D. et Zippin, L.*, Topological transformation groups, *Ann. Math.* 41 (1940) pp. 778—791.
- [12] *Pontrjagin, L.*, Über stetige algebraische Körper, *Ann. Math.* 33 (1932) pp. 167 bis 174.
- [13] —, *Topological groups*, Princeton University Press 1939.
- [14] *Tits, J.*, Généralisations des groupes projectifs, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* (5) 35 (1949) pp. 197—208.
- [15] —, Généralisation des groupes projectifs II, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* (5) 35 (1949) pp. 224—233.
- [16] —, Sur les groupes triplement transitifs continus; généralisation d'un théorème de Kerékjártó, *Comp. Math.* 9 (1951) pp. 85—96.
- [17] —, Généralisations des groupes projectifs basées sur leurs propriétés de transitivité, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém.*, Bruxelles 1951.
- [18] *Zassenhaus, H.*, Über endliche Fastkörper, *Hamb. Abhandlungen* 11 (1936) pp. 187—220.

(Reçu le 27 mars 1952.)

---

utilisant un résultat récent de M. A. Gleason, que tout groupe localement compact de dimension finie est un groupe de Lie généralisé; lorsque le groupe est en outre localement connexe, c'est un groupe de Lie. Ces résultats rendent la démonstration du théorème 4 beaucoup plus aisée (cf. note 7; la partie de la démonstration concernant le cas où  $G$  n'est pas localement connexe reste inchangée); ils permettent, d'autre part, de ramener le théorème 2, dans le cas où  $E$  est de dimension finie, à une proposition concernant les groupes de Lie, qui peut être démontrée directement par application des résultats classiques de la théorie des groupes de Lie.