Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1952)

Artikel: Etude stochastique de l'erreur dans un calcul numérique approché.
Autor: Blanc, Charles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21277

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Etude stochastique de l'erreur dans un calcul numérique approché

par CHARLES BLANC, Lausanne

On sait qu'il est nécessaire d'user de méthodes approchées dans la grande majorité des problèmes numériques posés par les applications; cela explique l'intérêt qu'il y a à posséder des renseignements sur l'erreur qu'entraîne l'emploi de ces méthodes. Dans un problème particulier, ces renseignements permettent de mesurer la valeur du résultat approché; d'autre part, la comparaison de diverses méthodes pour une classe de problèmes doit également tenir compte (outre les questions de commodité et de plus ou moins grande généralité) des erreurs plus ou moins grandes sur les résultats.

Pour un problème donné et pour une méthode approchée de résolution, on a en général abordé le problème de l'évaluation de l'erreur en cherchant une borne de cette erreur pour une certaine classe de données: ainsi, lorsque le problème comporte la donnée d'une fonction f, on a cherché une borne de l'erreur pour tous les cas où la fonction f appartient à un certain ensemble; par exemple, on connaît une borne de l'erreur commise en évaluant par la formule de Simpson l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ appartient à l'ensemble des fonctions dont la dérivée quatrième a une borne M dans (a, b).

Cette façon d'aborder le problème de l'étude de l'erreur ne peut donner entière satisfaction. Tout d'abord, dans de nombreux cas, on n'aboutit à aucun résultat pratiquement utilisable. En outre, les ensembles de fonctions que l'on est amené à considérer ne sont pas très intéressants en général et peu en relation avec le problème considéré: ainsi l'ensemble des fonctions dont la dérivée quatrième a une certaine borne dans un intervalle n'est pas naturellement lié au problème du calcul d'une intégrale définie; cet ensemble est beaucoup trop restreint et il est du reste souvent inutilement compliqué de s'assurer si une fonction donnée lui appartient. Pour cette raison, de nombreuses évaluations d'erreur sont inutilisables, par les hypothèses trop restrictives qu'elles impliquent.

Enfin, il est en général impossible d'utiliser ces évaluations pour une étude comparative des diverses méthodes : en effet, elles font intervenir des ensembles différents de données, comme on peut le voir très facilement déjà pour les formules de quadrature.

Or le problème de l'évaluation de l'erreur peut être abordé d'une manière toute différente, plus féconde semble-t-il. Il suffit pour cela de doter d'une distribution en probabilité l'ensemble des fonctions qui figurent dans les données, plus précisément, de considérer ces fonctions comme des fonctions aléatoires ; l'erreur devient alors une variable aléatoire, dont on étudie la distribution en probabilité. En d'autres termes, le problème se présente ainsi : choisir, d'une manière plausible, l'ensemble des données, avec sa distribution en probabilité, puis en déduire la distribution de l'erreur, pour la méthode approchée considérée ; en fait, on se bornera à étudier certains éléments de la distribution de l'erreur, les moments d'ordre *un* et *deux*, éléments qui suffiront en général à nous renseigner.

On trouvera dans ce travail un exposé général et la justification de la méthode proposée, qu'on peut appeler l'étude stochastique de l'erreur dans les méthodes numériques approchées ; la méthode s'applique en principe à tous les problèmes linéaires, c'est-à-dire pour lesquels l'erreur est une fonctionnelle linéaire des données ; on a traité ici les cas de l'interpolation, de la quadrature numérique, de l'approximation linéaire par une base incomplète et de l'intégration approchée d'une équation différentielle par une équation aux différences. Les calculs effectifs sont en général assez longs (ce qui tient en fait non pas à la méthode proposée mais au problème lui-même) ; une publication ultérieure donnera les résultats de ces calculs et les conclusions qu'on en peut tirer.

§ 1. Moyenne et variance de l'erreur

Nous ne considérerons que des problèmes et des méthodes *linéaires* (ce qui est essentiel) et, pour ne pas charger inutilement l'exposé, nous supposerons que ces problèmes comportent la donnée d'*une seule fonction*, fonction numérique réelle sur un ensemble $\mathcal{E}$. L'évaluation de l'erreur que nous ferons consiste à considérer cette fonction comme une fonction aléatoire réelle $\xi(t)$, t étant un «point» de $\mathcal{E}$. Nous supposerons l'existence des moments d'ordres *un* et *deux* de $\xi(t)$, et de plus

$$E\,\xi(t) = 0 \;;$$

nous poserons

$$E\,\xi(t)\cdot\xi(t') = r(t,t')^{1)}\ ;$$

cette fonction $r(t,t')$ est la *covariance* de $\xi(t)$. La dérivation, l'intégration (au sens de Riemann) et d'une façon générale la notion de limite seront toujours prises en moyenne quadratique[2]). Dans le cas où $\mathcal{E}$ est un segment (a,b), les opérations de dérivation et d'intégration sur $\xi(t)$ induisent des opérations sur la covariance, dont nous retiendrons les suivantes[3]) :

I. Pour que la dérivée $\xi'(t)$ de $\xi(t)$ existe dans $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que $r(t,t')$ ait une dérivée seconde généralisée pour $t=t'$; alors $r(t,t')$ possède dans $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ des dérivées $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial t'}$, $\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t'}$, et les opérateurs E et $\frac{\partial}{\partial t}$ sont permutables.

II. Pour que l'intégrale $\int_a^b \xi(t)\,dt$ existe, il faut et il suffit que

$$\int_a^b dt \int_a^b r(t,t')\,dt'$$

existe.

III. (Intégrale de Stieltjes.) Soit une fonction aléatoire $\eta(t)$ avec

$$E\,\eta(t)\,\eta(t') = s(t,t')\ ;$$

pour que

$$\int_a^b \xi(t)\,d\eta(t)$$

existe, il faut et il suffit que

$$\int_a^b\int_a^b r(t,t')\,d^2s(t,t')$$

existe.

IV. Soit

$$\xi(T) = \int^T \xi(t)\,d\eta(t)\ ;$$

sa covariance est

$$\int^T\int^T r(t,t')\,d^2s(t,t')$$

et les opérateurs E et $\int^T$ sont permutables.

---

[1]) Nous ne rappellerons pas ici la définition de la fonction aléatoire; nous renvoyons à la Note que M. *M. Loève* a rédigée et qui se trouve à la fin de l'ouvrage de M. *P. Lévy, Processus stochatiques et mouvement brownien* (Gauthier-Villars 1948). Les renvois à cette Note sont désignés ci-dessous par «Loève».

[2]) Voir «Loève», p. 314.

[3]) Voir «Loève», p. 315 et suiv.

Dans le cas où $\mathcal{E}$ est un segment d'un espace euclidien à n dimensions, il est aisé d'étendre les propriétés précédentes.

Le problème considéré et la méthode approchée étudiée étant linéaires, l'erreur elle-même est une fonctionnelle linéaire des données. Nous sommes donc amenés à étudier la distribution en probabilité de fonctionnelles linéaires de $\xi(t)$. Soient donc

$$\eta_1 = L_1\{\xi(t)\}\ , \qquad \eta_2 = L_2\{\xi(t')\}$$

deux fonctionnelles linéaires ; nous supposons que les opérations L_1 et L_2 sont permutables avec E ; cela aura certainement lieu si ces opérations consistent en combinaisons linéaires de valeurs, en dérivations et en intégrations ; on a

$$\begin{aligned} E\,\eta_1 &= E\,L_1\{\xi(t)\} = L_1\{E\,\xi(t)\}\ , \\ E\,\eta_2 &= E\,L_2\{\xi(t')\} = L_2\{E\,\xi(t')\}\ , \end{aligned}$$

et ces moyennes sont nulles en vertu de l'hypothèse faite sur $E\,\xi(t)$; ensuite

$$\begin{aligned} E\,\eta_1\,\eta_2 &= E\,L_1\{\xi(t)\}\cdot L_2\{\xi(t')\} \\ &= L_1\,L_2\{E\,\xi(t)\,\xi(t')\} \end{aligned}$$

donc

$$E\,\eta_1\,\eta_2 = L_1\,L_2\{r(t,t')\}\ , \tag{I}$$

où L_1 porte sur t et L_2 sur t'. Cette relation résout complètement le problème de l'évaluation de la variance de l'erreur. La suite de ce travail est consacrée à son application à des opérateurs particuliers.

Remarquons encore qu'il sera souvent commode d'introduire une hypothèse supplémentaire sur la fonction $\xi(t)$: nous la supposerons *stationnaire d'ordre deux*, c'est-à-dire telle que la covariance $r(t,t')$ ne dépende que de la différence $t - t'$; on écrira alors

$$r(t,t') = R(t - t')\ .$$

Il n'y a cependent pas d'intérêt à faire cette restriction dans une étude générale (car elle implique non seulement une restriction sur la fonction, mais aussi sur son domaine de définition).

Le choix de la fonction de covariance $r(t,t')$ est en principe assez arbitraire : il revient à fixer en partie la distribution en probabilité de l'ensemble des données pour un problème considéré. Lorsqu'on suppose

que la fonction est stationnaire d'ordre deux, et si $\mathcal{E}$ est un segment à une dimension, il semble assez raisonnable de choisir la fonction

$$r(t, t') = A \frac{\sin a(t - t')}{a(t - t')} ;$$

c'est en effet la covariance d'une fonction stationnaire dont le spectre est limité à la bande $(-a, +a)$, et constant dans cette bande. Les méthodes approchées ont toutes pour effet de supprimer la partie du spectre située en dehors d'une certaine bande : il est donc assez justifié de négliger cette partie du spectre. Pour le reste, comme il n'y a a priori aucune raison de choisir une autre distribution, nous prenons un spectre constant. Ainsi choisie, la covariance contient encore deux paramètres A et a dont la détermination dans un cas particulier est un problème d'estimation statistique sur lequel on reviendra plus loin.

§ 2. Erreur d'interpolation

Considérons une formule d'interpolation, qui consiste à donner la valeur $f(t)$ d'une fonction par une combinaison linéaire

$$\sum_i a_i(t) f(t_i)$$

de valeurs de cette fonction. Pour une fonction aléatoire $\xi(t)$, l'*erreur d'interpolation* est la fonction

$$\eta(t) = \xi(t) - \sum_i a_i(t)\, \xi(t_i) ;$$

pour abréger, posons

$$\eta(t) = D_t \xi(t) ;$$

par la relation I du § 1, on a immédiatement

$$E\, \eta(t)\eta(t') = D_t D_{t'} r(t, t')$$

donc, en explicitant,

$$E\, \eta(t)\eta(t') = r(t, t') - \sum_k a_k(t) r(t_k, t') - \sum_i a_i(t') r(t, t_i) + \sum_k \sum_i a_k(t) a_i(t') r(t_k, t_i) ; \tag{2.1}$$

si, en particulier, $t = t'$, et en tenant compte de l'identité évidente $r(t, t') = r(t', t)$,

$$E\, \eta^2(t) = r(t, t) - 2 \sum_k a_k(t) r(t_k, t) + \sum_k \sum_i a_k(t) a_i(t) r(t_k, t_i) .$$

Ces relations sont valables quel que soit le nombre de dimensions du domaine de définition de la fonction $\xi(t)$, Considérons maintenant en particulier l'interpolation *linéaire* sur un intervalle $(0, a)$. On a

$$D_t\, \xi(t) = \xi(t) - \left[\frac{a-t}{a}\ \xi(0) + \frac{t}{a}\ \xi(a)\right]$$

et

$$E\,\eta^2(t) = r(t,t) - \frac{2}{a}\,[(a-t)\,r(0,t) + t\,r(a,t)]$$
$$+ \frac{1}{a^2}\,[(a-t)^2\,r(0,0) + 2t(a-t)\,r(0,a) + t^2\,r(a,a)]\ . \qquad (2.2)$$

Si la fonction ξ (t) est stationnaire d'ordre deux, on a simplement

$$E\,\eta^2(t) = \left[1 + \left(\frac{a-t}{a}\right)^2 + \left(\frac{t}{a}\right)^2\right] R(0) + \frac{2t(a-t)}{a^2}\,R(a)$$
$$- \frac{2}{a}\,[(a-t)\,R(t) + t\,R(a-t)]\ . \qquad (2.3)$$

Prenons également une interpolation *parabolique* dans l'intervalle $(-a, +a)$, On a ici

$$t_1 = -a\,,\quad t_2 = 0\,,\quad t_3 = +a\,,$$
$$a_1(t) = \frac{1}{2a^2}\,t(t-a)\ ,$$
$$a_2(t) = \frac{1}{a^2}\,(a^2 - t^2)\ ,$$
$$a_3(t) = \frac{1}{2a^2}\,t(t+a)\ ,$$

d'où

$$E\eta^2(t) = r(t,t) - \frac{2}{a^2}\left[\frac{t(t-a)}{2}\,r(-a,t) + (a^2-t^2)\,r(0,t) + \frac{t(t+a)}{2}\,r(a,t)\right]$$
$$+ \frac{1}{a^4}\left[\frac{t^2(t-a)^2}{4}\,r(-a,-a) + (a^2-t^2)^2\,r(0,0) + \frac{t^2(t+a)^2}{4}\,r(a,a)\right.$$
$$\left. + t(t-a)\,(a^2-t^2)\,r(-a,0) + t\,(t+a)\,(a^2-t^2)\,r(0,a) + \tfrac{1}{2}\,t^2(t^2-a^2)\,r(-a,a)\right];$$

pour une fonction stationnaire d'ordre deux, on a plus simplement

$$E\,\eta^2(t) = \left[1 + \frac{t^2(t-a)^2}{4a^4} + \frac{(a^2-t^2)^2}{a^4} + \frac{t^2(t+a)^2}{4a^4}\right] R(0)$$
$$+ \frac{2t^2(a^2-t^2)}{a^4}\,R(a) + \frac{t^2(t^2-a^2)}{2a^4}\,R(2a)$$
$$- \frac{1}{a^2}\,[t(t-a)\,R(t+a) + 2(a^2-t^2)\,R(t) + t(t+a)\,R(t-a)]\ ,$$

ou, en posant $t = u \cdot a$,

$$\begin{aligned} E\,\eta^2(ua) = {} & (2 - \tfrac{3}{2}u^2 + \tfrac{3}{2}u^4)\,R(0) + 2u^2(1-u^2)\,R(a) \\ & - \tfrac{1}{2}u^2(1-u^2)\,R(2a) + u(1-u)\,R(a+au) \\ & - 2(1-u^2)\,R(ua) - u(1+u)\,R(a-ua)\ . \end{aligned}$$

La relation (2.1) exprime en somme que $E\,\eta(t)\eta(t')$ est l'erreur pour la double interpolation sur $r(t,t')$, en (t,t'). Pour évaluer cette covariance, il convient donc tout d'abord d'interpoler $r(t,t')$, relativement à t', par la formule considérée, pour $t = t,\ t_1, \ldots, t_n$, puis d'interpoler les valeurs trouvées, toujours avec la même formule, et cette fois relativement à t.

Considérons l'exemple suivant : on demande la variance $E\,\eta^2(t)$ pour une interpolation parabolique dans l'intervalle $(-1, +1)$, la covariance de $\xi(t)$ étant

$$R(t'-t) = \frac{\sin(t'-t)}{t'-t}\ ;$$

calculer en particulier cette variance pour $t = 0{,}5$; on commence par calculer l'interpolation de $R(t'-t)$ relativement à t' dans $(-1, +1)$, pour $t = -1, 0, +1$. Soit ainsi

$$s(t,t') = D_{t'}\,r(t,t')$$

l'erreur commise dans une interpolation, selon la formule choisie et relativement à t'. Comme on a

$$\begin{aligned} R(0) &= 1{,}000\,0000 & R(1{,}5) &= 0{,}664\,9967 \\ R(0{,}5) &= 0{,}958\,8511 & R(2) &= 0{,}454\,6487\ , \\ R(1) &= 0{,}841\,4710 \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} s(-1, \tfrac{1}{2}) &= -\,0{,}011\,5998\ , \\ s(0, \tfrac{1}{2}) &= -\,0{,}001\,5166\ , \\ s(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= 0{,}004\,4171\ , \\ s(1, \tfrac{1}{2}) &= 0{,}009\,5789\ , \end{aligned}$$

d'où, en interpolant paraboliquement par rapport à la première variable, une erreur pour $t' = \frac{1}{2}$, avec une variance

$$E\,\eta^2(\tfrac{1}{2}) = 0{,}000\,5125\ .$$

Ce résultat nous donne une mesure de la dispersion de l'erreur (autour d'une moyenne égale à zéro) pour une interpolation faite dans les conditions indiquées.

Un calcul analogue permettrait par exemple d'étudier l'erreur dans une interpolation linéaire sur l'intervalle (0, 1) ; en reprenant la même covariance, on aurait alors

$$E\,\eta^2(\tfrac{1}{2}) = 0{,}003\,03\ .$$

On remarque que les calculs précédents ne font pas intervenir les dérivées des fonctions envisagées, mais seulement la covariance, et cela quelle que soit la formule d'interpolation envisagée. La comparaison de diverses formules d'interpolation devient ainsi directement possible : pour une covariance donnée, il est possible de dire alors quelle est *en moyenne* la meilleure formule.

Il reste naturellement, dans un cas particulier donné, à choisir convenablement la fonction de covariance ; si l'on adopte la forme

$$r(t, t') = A\,\frac{\sin a(t - t')}{a(t - t')}$$

il reste encore à estimer (au sens de la statistique) les paramètres A et a. Pour une fonction particulière, on peut le faire assez bien au moyen des erreurs d'interpolation linéaire ou, ce qui revient au même, par la moyenne quadratique des différences secondes. En effet, pour des entrées tabulaires de pas h, on a pour les différences premières Δ_1 la variance

$$E\,\Delta_1^2 = 2\,R(0) - 2\,R(h)\ ;$$

donc, avec la fonction R choisie, un dévelopement limité en h :

$$E\,\Delta_1^2 = A\,a^2\,h^2(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{60}\,a^2\,h^2 + \cdots)\ ;$$

ensuite, pour les différences secondes Δ_2,

$$E\,\Delta_2^2 = 6\,R(0) - 4\,R(h) + 2\,R(2h)\ ,$$

donc, avec la fonction R choisie,

$$E\,\Delta_2^2 = A\,a^4\,h^4(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{42}\,a^2\,h^2 + \cdots)\ .$$

En faisant le calcul de ces moyennes, on obtient, avec une plus ou moins grande précision, une estimation des paramètres.

§ 3. Intégration approchée

Considérons une formule d'intégration numérique approchée sur un domaine D par une combinaison linéaire de valeurs de la fonction

$$\int_D f(t)\,dt \cong \sum_i a_i f(t_i) \ ;$$

pour une fonction aléatoire $\xi(t)$, l'erreur est une variable aléatoire

$$\eta = \int_D \xi(t)\,dt - \sum_i a_i \xi(t_i) \ ;$$

calculons la covariance de cette variable aléatoire et d'une autre variable η', égale à l'erreur commise par l'emploi d'une seconde formule d'intégration numérique, relative à un domaine D'

$$\eta' = \int_{D'} \xi(t)\,dt - \sum_i a'_i\, \xi(t'_i) \ ;$$

posons, pour abréger,

$$\eta = L_t\{\xi(t)\} \ , \qquad \eta' = L'_{t'}\{\xi(t')\} \ ;$$

les opérateurs L et L' sont linéaires et permutables avec E, d'où

$$E\,\eta\,\eta' = L_t\, L'_{t'} r(t, t') \ .$$

En explicitant, on a

$$E\,\eta\,\eta' = \int_D\int_{D'} r(t, t')\,dt\,dt' + \sum_{i,k} a_i a'_k r(t_i, t'_k)$$
$$- \sum_i a_i \int_{D'} r(t_i, t')\,dt' - \sum_k a'_k \int_D r(t, t'_k)\,dt \ . \qquad (3.1)$$

Les considérations précédentes sont valables pour des intégrales multiples quelconques ; si on a plus particulièrement des intégrales simples, si la fonction $\xi(t)$ est stationnaire d'ordre deux, et si l'on pose (avec $D \equiv (a, b)$, $D' \equiv (a', b')$)

$$r(t, t') = R(t - t') \ , \qquad s(t) = \int_0^t R(z)\,dz \ ,$$

il vient

$$E\,\eta\,\eta' = \int_a^b [s(t - a') - s(t - b')]\,dt + \sum_{i,k} a_i a'_k r(t_i, t'_k)$$
$$- \sum_i a_i [s(t_i - a') - s(t_i - b')] - \sum_k a_k \int_a^b r(t, t'_k)\,dt$$

ou encore

$$E\,\eta\,\eta' = [\int_a^b s(t-a')dt - \sum_i a_i s(t_i - a')]$$
$$- [\int_a^b s(t-b')dt - \sum_i a_i s(t_i - b')]$$
$$- \sum_k a'_k [\int_a^b R(t-t'_k)dt - \sum_i a_i R(t_i - t'_k)] \ .$$

Si la fonction $R(h)$ possède des dérivées d'ordre assez élevé, il est possible de borner par le procédé classique les trois parenthèses [ ] de cette expression ; on a donc ainsi facilement une borne pour $E\,\eta\,\eta'$.

Cherchons maintenant la variance de l'erreur pour une formule donnée : il suffit de faire ci-dessus $D = D'$, $a_i = a'_i$, $t_i = t'_i$. En particulier, pour une intégrale simple sur (a, b), et pour une fonction stationnaire d'ordre deux,

$$E\,\eta^2 = \int_a^b s(t-a)dt - \sum_i a_i s(t_i - a)$$
$$- [\int_a^b s(t-b)dt - \sum_i a_i s(t_i - b)] \tag{3.2}$$
$$- \sum_k a_k [\int_a^b R(t-t_k)dt - \sum_i a_i R(t_i - t_k)] \ .$$

Ceci permet facilement de comparer entre elles, au point de vue adopté ici, diverses formules de quadrature numérique.

§ 4. Approximation linéaire d'une fonction

Nous allons maintenant étudier, toujours au même point de vue, l'erreur que l'on commet en remplaçant une fonction par une certaine approximation linéaire au moyen d'une base incomplète. Reprenons donc une fonction aléatoire $\xi(t)$ définie sur un domaine $\mathcal{E}$; nous supposons encore que sa moyenne est nulle et nous désignons sa covariance par $r(t, t')$. Soit, sur $\mathcal{E}$, un système de n fonctions (non aléatoires)

$$u_1(t), \ldots, u_n(t)$$

linéairement indépendantes. Nous supposons qu'on a défini sur ce système et sur ξ une opération de produit scalaire, qui fait correspondre à deux fonctions f et g un nombre désigné par (f, g), dépendant bili-

néairement de f et de g. On supposera que les u_i sont orthonormées par rapport à ce produit et on pose

$$\psi_i = (\xi, u_i) \ ;$$

les ψ_i sont des variables aléatoires ; soit alors la fonction aléatoire

$$\eta(t) = L\,\xi(t) \equiv \xi(t) - \sum_i \psi_i u_i(t) \ ;$$

c'est l'*erreur* dans l'approximation en moyenne quadratique de $\xi(t)$ par les u_i. On a $E\,\eta(t) = 0$, et, par la relation (I) du § 1,

$$E\,\eta(t_1)\,\eta(t_2) = L_{t_1} L_{t_2}\, r(t_1, t_2) \ , \tag{4.1}$$

pour autant que le produit soit permutable avec E, ce que nous supposerons. On peut donc évaluer de cette manière l'erreur quadratique moyenne pour une approximation linéaire. Pour effectuer le calcul, on formera tout d'abord

$$s(t_1, t_2) = L_{t_2}\, r(t_1, t_2) \ ,$$

c'est-à-dire

$$s(t_1, t_2) = r(t_1, t_2) - \sum_i u_i(t_2)\,(r(t_1, t'), u_i(t'))$$

puis

$$E\,\eta(t_1)\,\eta(t_2) = s(t_1, t_2) - \sum_i u_i(t_1)\,(s(t', t_2), u_i(t')) \ , \tag{4.2}$$

ce qui résout le problème.

L'hypothèse que les fonctions u_i sont orthonormées n'est pas essentielle. Dans le cas d'un système quelconque de fonctions u_i, on a simplement

$$\eta(t) = \xi(t) - \sum_{i,k} a_{ik}\, u_k(t)\,(\xi(t'), u_i(t'))$$

et la suite des calculs se fait de la même manière.

Remarquons encore que l'opération L est la projection sur la variété linéaire des fonctions orthogonales à l'ensemble des fonctions $u_i(t)$. Si l'on possède une base complète dans cette variété, le calcul de L se fait directement.

Prenons maintenant le cas particulier où le domaine de définition des fonctions est l'intervalle (a, b), le produit scalaire étant simplement l'intégrale du produit sur cet intervalle. Si les fonctions u_i sont orthonormées, on a

$$\eta(t) = L\,\xi(t) \equiv \xi(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \int_a^b \xi(z)\, u_i(z)\,dz$$

donc

$$s(t, t') = r(t, t') - \sum_{i=1}^{n} u_i(t') \int_a^b r(t, z)\, u_i(z)\,dz$$

puis

$$E\,\eta(t)\,\eta(t') = s(t, t') - \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \int_a^b s(z, t')\, u_k(z)\,dz \ .$$

Si on prolonge la suite des u_i de façon à obtenir un ensemble complet sur (a, b), on a

$$s(t, t') = \sum_{n+1}^{\infty} u_i(t') \int_a^b r(t, z)\, u_i(z)\,dz$$

puis

$$E\,\eta(t)\,\eta(t') = \sum_{k=n+1}^{a} u_k(t) \int_a^b s(z, t')\, u_k(z)\,dz \ ;$$

ces expressions pourront être plus commodes pour un calcul approché de $E\,\eta(t)\,\eta(t')$.

Prenons un exemple : soit l'intervalle $(0, 1)$ et une seule fonction $u_1(t) = 1$; choisissons

$$r(t, t') = \frac{\sin a(t - t')}{a(t - t')}$$

et posons, pour simplifier l'écriture,

$$g_0(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad g_{-1}(t) = \int_0^t g_0(z)\,dz \ ,$$

$$g_{-2}(t) = \int_0^t g_{-1}(z)\,dz \ ;$$

la fonction g_{-1} est la transcendante connue (et tabulée) Si t ; par un calcul simple, on a $g_{-2}(t) = t \operatorname{Si} t + \cos t - 1$; alors

$$s(t, t') = g_0(at - at') - \frac{1}{a}\,[g_{-1}(at) + g_{-1}(a - at)]$$

et

$$E\,\eta(t)\,\eta(t') = g_0(at - at') - \frac{1}{a}\,[g_{-1}(at) + g_{-1}(a - at)]$$
$$- \frac{1}{a}\,[g_{-1}(at') + g_{-1}(a - at')] + \frac{2}{a^2}\,g_{-2}(a) \ ;$$

en particulier, pour la variance de $\eta(t)$,

$$E\,\eta^2(t) = 1 - \frac{2}{a}\,[g_{-1}(at) + g_{-1}(a - at)] + \frac{2}{a^2}\,g_{-2}(a) \ .$$

Il est intéressant de chercher quel est l'ordre de grandeur en fonction de a. On a

$$E\,\eta^2(t) = \frac{a^2}{12}(1-2t)^2 + \frac{2a^4}{6!}[6t(t-1)(t^2-t+1)-1] + \cdots ;$$

donc, si $t \neq \frac{1}{2}$, on a

$$E\,\eta^2(t) = O(a^2)$$

tandis que si $t = \frac{1}{2}$, on a

$$E\,\eta^2(t) = O(a^4) ;$$

ainsi l'ordre de grandeur de l'erreur moyenne quadratique est *un*, sauf si $t = \frac{1}{2}$, où il est *deux*. Cela ne signifie toutefois pas que cette erreur, pour une valeur donnée de a, est sensiblement plus petite pour $t = \frac{1}{2}$ que pour les valeurs voisines (la fonction $E\,\eta^2(t)$ est continue) ; cela confirme en particulier la remarque qu'une évaluation d'erreur qui se borne à l'ordre de grandeur donne souvent une idée fausse, surtout lorsqu'on désire comparer divers résultats.

L'approximation linéaire d'une fonction est une méthode fréquemment utilisée, par exemple dans l'intégration d'équations différentielles. Les considérations précédentes permettent toujours d'étudier, au point de vue stochastique, l'erreur commise.

§ 5. Equations aux différences

La substitution d'une équation aux différences à une équation différentielle est un procédé très commode pour l'intégration approchée : il semble être même le seul utilisable dans de nombreuses circonstances. Nous allons étudier l'erreur correspondante, en nous plaçant encore au point de vue stochastique.

Considérons une équations différentielle linéaire

$$D\,\xi(t) = \varphi(t) \tag{5.1}$$

avec des conditions «aux limites» linéaires

$$M_p\,\xi(t) = \gamma_p(t) \qquad p = 1, \ldots, n \tag{5.2}$$

fixant exactement la solution ; t désigne symboliquement une variable définie dans un domaine $\mathcal{E}$, à un nombre quelconque de dimensions, les

conditions portant sur une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ seulement ; on suppose que le problème posé est possible et possède une solution et une seule. Soient D^0 l'opérateur aux différences qu'on va substituer à D, M_p^0 celui qu'on substitue à M_p. La solution approchée est alors solution des équations linéaires

$$\left.\begin{aligned} D^0\ \xi^*(t_k) &= \varphi(t_k) \qquad t_p \in \mathcal{E}^0 \\ M_p^0\ \xi^*(t_k) &= \gamma_p(t_k) \qquad t_k \in \mathcal{F}^0 \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

où $\mathcal{E}^0$ est un réseau choisi sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}^0$ une partie de $\mathcal{E}^0$.

Les équations aux différences ont une solution

$$\xi^*(t_k) = \sum_i a_{ki}\, \varphi(t_i) + \sum_p \sum_i b_{ki}^{(p)}\, \gamma_p(t_i)$$

donc

$$\xi^*(t_k) = \sum_i a_{ki}\, D\, \xi(t_i) + \sum_p \sum_i b_{ki}^{(p)}\, M_p\, \xi(t_i)\ ;$$

les coefficients a_{ki} et $b_{ki}^{(p)}$ sont tels que, pour toute fonction $f(t)$,

$$\left.\begin{aligned} &D^0 \sum_i a_{ki}\, f(t_i) = f(t_k)\ , \\ &M_p^0 \sum_i a_{ki}\, f(t_i) = 0 \\ &D^0 \sum_p \sum_i b_{ki}^{(p)}\, f_p(t_i) = 0 \\ &M_q^0 \sum_p \sum_i b_{ki}^{(b)}\, f_p(t_i) = f_q(t_k)\ ; \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

l'erreur est donc

$$\eta(t_k) = \xi(t_k) - \sum_i a_{ki}\, D\xi(t_i) - \sum_p \sum_i b_{ki}^{(p)}\, M_p\, \xi(t_i)\ ;$$

or par les relations (5.4)

$$\begin{aligned} D^0\ \eta(t_k) &= (D^0 - D)\ \xi(t_k)\ , \\ M_p^0\ \eta(t_k) &= (M_p^0 - M_p)\ \xi(t_k)\ . \end{aligned}$$

Soit alors

$$E\ \eta(t_k)\ \eta(t_i) = u(t_k, t_i)\ ;$$

l'opération E est permutable avec D, D^0, M_p et M_p^0 ; on a donc (l'indice indiquant la variable sur laquelle opèrent les D et les M),

$$\begin{aligned} D_{t_k}^0 D_{t_i}^0\, u(t_k, t_i) &= E\ D_{t_k}^0\, \eta(t_k)\ D_{t_i}^0\, \eta(t_i) \\ &= E\ (D_{t_k}^0 - D_{t_k})\ \eta(t_k)\ (D_{t_i}^0 - D_{t_i})\ \eta(t_i) \\ &= (D_{t_k}^0 - D_{t_k})\ (D_{t_i}^0 - D_{t_i})\ r(t_k, t_i) \end{aligned}$$

et une relation analogue pour les M_p ; donc

$$\left.\begin{aligned} D^0_{t_k} D^0_{t_i} u(t_k, t_i) &= (D^0_{t_k} - D_{t_k})(D^0_{t_i} - D_{t_i})\, r(t_k, t_i) \\ M^0_{p,t_k} M^0_{p,t_i} u(t_k, t_i) &= (M^0_{p,t_k} - M_{p,t_k})(M^0_{p,t_i} - M_{p,t_i})\, r(t_k, t_i)\,. \end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

Posons alors

$$\left.\begin{aligned} D^0_{t_i} u(t_k, t_i) &= v(t_k, t_i) \\ M^0_{p,t_i} u(t_k, t_i) &= w_p(t_k, t_i)\ ; \end{aligned}\right\}$$

on a alors, par (7) ,

$$\left.\begin{aligned} D^0_{t_k} v(t_k, t_i) &= (D^0_{t_k} - D_{t_k})(D^0_{t_i} - D_{t_i})\, r(t_k, t_i)\ , \\ M^0_{p,t_k} v(t_k, t_i) &= (M^0_{p,t_k} - M_{p,t_k})(D^0_{t_i} - D_{t_i})\, r(t_k, t_i)\ , \end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

et

$$\left.\begin{aligned} D^0_{t_k} w_p(t_k, t_i) &= (D^0{}_{t_k} - D_{t_k})(M^0_{p,t_i} - M_{p,t_i})\, r(t_k, t_i)\ , \\ M^0_{p,t_k} w_p(t_k, t_i) &= (M^0_{p,t_k} - M_{p,t_k})(M^0_{p,t_i} - M_{p,t_i})\, r(t_k, t_i)\,. \end{aligned}\right\} \quad (5.7)$$

Ainsi pour calculer une valeur de $u(t_k, t_i)$, il faut

1. déterminer la fonction $v(t_k, t_j)$, pour tout $t_j \in \mathcal{E}^0$, ce qui résulte des équations (5.6), dont la résolution est identique à celle du système (5.3) ;

2. déterminer les fonctions $w_p(t_k, t_j)$ pour tout $t_j \in \mathcal{F}^0$, à partir des équations (5.7), qui sont aussi de la forme (5.3) ;

3. enfin calculer $u(t_k, t_i)$, ce qui comporte une fois de plus la résolution d'un système linéaire algébrique qui ne diffère des précédents que par les seconds membres.

La détermination de la fonction $u(t_k, t_i)$ se fait donc en principe par la résolution des mêmes équations aux différences que la fonction ξ^* elle-même ; il semble, à première vue, que cela implique une somme considérable de calculs. Il faut toutefois remarquer que la précision requise étant moindre que pour ξ^*, il est possible en général de prendre un réseau plus grossier, ce qui entraine des allègements.

Voyons en particulier ce qui se passe lorsque les conditions aux limites portent sur les valeurs de la fonction inconnue elle-même (et non sur des dérivées) ; les équations (5.2) se réduisent à

$$\xi(t) = \gamma(t) \qquad \text{sur } \mathcal{F}$$

donc $n = 1$, $M_1 = 1$ et $M_1^0 = 1$; alors les équations (5.5) sont

$$\left.\begin{aligned} D^0_{t_k} D^0_{t_i} u(t_k, t_i) &= (D^0_{t_k} - D_{t_k})(D^0_{t_i} - D_{t_i})\, r(t_k, t_i) && \text{dans } \mathcal{E}^0 \\ u(t_k, t_i) &= 0 && \text{sur } \mathcal{F}^0 \end{aligned}\right\}$$

on pose alors

$$D^0_{t_i} u(t_k, t_i) = v(t_k, t_i) \ ,$$

et on a

$$\begin{aligned} D^0_{t_k} v(t_k, t_i) &= (D^0_{t_k} - D_{t_k})(D^0_{t_i} - D_{t_i})\, r(t_k, t_i) && \text{dans } \mathcal{E}^0 \\ v(t_k, t_i) &= 0 && \text{pour } t_k \in \mathcal{F}^0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on déterminera successivement $v(t_k, t_i)$, puis $u(t_k, t_i)$, toujours par la résolution des mêmes équations aux différences (aux seconds membres près).

Pour fixer les idées, considérons la résolution du problème de Dirichlet dans un domaine plan $\mathcal{E}$, de frontière $\mathcal{F}$. L'opérateur D est alors le laplacien, D^0 est un opérateur aux différences, défini sur un réseau $\mathcal{E}^0$ étendu sur $\mathcal{E}$; pour simplifier, nous supposerons que la frontière $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est constituée par des arêtes du réseau $\mathcal{E}^0$, et que l'on a ainsi $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$; le choix de D^0 comporte un certain arbitraire, et nous ne préciserons pas quel est ce choix. Le problème est donc

$$\begin{aligned} D\, \xi(t) &= 0 && \text{dans } \mathcal{E}, \\ \xi(t) &= \gamma(t) && \text{sur } \mathcal{F}, \end{aligned}$$

et le problème approché

$$\begin{aligned} D^0\, \xi^*(t_k) &= 0 && t_k \in \mathcal{E}^0, \\ \xi^*(t_k) &= \gamma(t_k) && t_k \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

d'où, en résolvant un système linéaire,

$$\xi^*(t_k) = \sum_i b_{ki}\, \gamma(t_i) \qquad t_k \in \mathcal{E}^0, \quad t_i \in \mathcal{F},$$

donc

$$\xi^*(t_k) = \sum_i b_{ki}\, \xi(t_i) \ .$$

Soit alors $\eta(t_k)$ l'erreur en t_k, c'est-à-dire

$$\eta(t_k) = \xi(t_k) - \sum_i b_{ki}\, \xi(t_i) \ ,$$

puis

$$u(t_k, t_i) = E\, \eta(t_k)\, \eta(t_i)$$

et

$$v(t_k, t_i) = D^0_{t_i} u(t_k, t_i) \ ;$$

on détermine d'abord cette fonction v par les équations

$$D^0_{t_k} v(t_k, t_i) = (D^0_{t_k} - D_{t_k})(D^0_{t_i} - D_{t_i}) r(t_k, t_i) \ , \qquad t_k \in \mathcal{E}^0 \ ,$$
$$v(t_k, t_i) = 0 \ , \qquad t_k \in \mathcal{F} \ ,$$

cela pour tout couple (t_k, t_i) ; on remarque que les seconds membres sont liés à l'erreur que l'on commet en remplaçant l'opérateur D par l'opérateur D^0 sur la fonction de covariance. On a ensuite $u(t_k, t_i)$ par le système linéaire (qui ne se distingue du précédent que par les seconds membres)

$$D^0_{t_i} u(t_k, t_i) = v(t_k, t_i) \qquad t_i \in \mathcal{E}^0 \ ,$$
$$u(t_k, t_i) = 0 \qquad t_i \in \mathcal{F} \ .$$

Ces considérations permettent de comparer entre eux les divers opérateurs D^0 que l'on a proposés. Elles permettent également fort bien de comparer, en ce qui concerne la précision, les méthodes d'équations aux différences avec d'autres méthodes de résolution approchée du problème de Dirichlet (par exemple les méthodes de résolution par une approximation linéaire).

Le choix de la fonction de covariance, dans le cas d'un domaine à deux dimensions, pourrait se faire de la manière suivante : en supposant la fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux, on choisit une covariance dont le spectre du Fourier (à deux dimensions), se réduit à une constante dans un cercle et est nul à l'extérieur de ce cercle. On a alors

$$R(h_1, h_2) = A \frac{2 J_1\left(a\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)}{a\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \ .$$

Il est clair en outre que tout ce qui a été dit ci-dessus s'étend sans autre à un nombre quelconque de dimensions.

(Reçu le 21 mai 1952.)