Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator.

Autor(en): **Moppert, K.-F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **27 (1953)**

PDF erstellt am: **08.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21891

Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator

Von K.-F. Moppert, Basel

EINLEITUNG

Das Problem der Ableitung zu beliebigem Index ist fast so alt wie dasjenige der Ableitung überhaupt, hat sich doch schon Leibniz [1]) damit beschäftigt. Die Tatsache, daß die besten Mathematiker sich jeweilen dazu äußerten und noch äußern [2]), läßt für einen neuen Versuch eine besonders strenge Beurteilung erwarten. Wir hoffen, daß der hier vorgelegte Ansatz in den Ergebnissen seine Rechtfertigung findet.

Wir legen eine Definition zugrunde (S. 141), die wohl zum erstenmal von Grünwald 1867 angegeben wurde [3]). Das Hauptziel unserer Arbeit ist der Beweis von Satz 1. In diesem wird unter anderm gezeigt, daß unser Operator für spezielle Wahl des „Ableitungsexponenten" einmal die ihm unterworfene Funktion selbst enthält, dann ihre ganzzahligen Ableitungen, das bestimmte Integral und das *Riemann-Liouville*sche verallgemeinerte Integral.

Unser Ableitungsoperator verhält sich durchaus verschieden, je nachdem ob der Ableitungsexponent gleich $0, 1, 2, \ldots$ oder von diesen Werten verschieden ist. Im ersten Fall gibt er das Verhalten der ihm unterworfenen Funktion in einem Punkt, im zweiten dasjenige in einem Intervall an. Da er sich im allgemeinen also wie ein bestimmtes Integral verhält, haben wir das Symbol für ihn demjenigen des bestimmten Integrals möglichst angenähert.

---

[1]) Enzyklopädie der math. Wiss. II A 2, Nr. 48/49; II A 11, Nr. 7. Vgl. auch die ausführliche Bibliographie bei H. Davis, The Theory of Linear Operators, Principia Press, Bloomington 1936.

[2]) B. Riemann, Ges. Werke, 2. Bd., p. 331. — J. Liouville, J. Ecole Polytech. **13**, 1832. — H. Weyl, Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich **62**, 1917, p. 246. — Hardy-Littlewood, Math. Z. **27**, 1928, p. 565; 34, 1932, p. 403. — M. Riesz, Acta Math. **81**, 1949, p. 1.

[3]) A. K. Grünwald, Z. Math. Phys. **12**, 1867, p. 441. — K. Bochow, Dissert. Halle 1885. — vgl. auch N. Stuloff, Math. Ann. **122**, 1951, p. 400.

Der Beweis von Satz 1 wird dadurch gehörig erschwert, daß er, wenn der Ableitungsexponent < 1 ist, auch auf Funktionen anwendbar ist, die im unteren Endpunkt des Ableitungsintervalls einen Pol haben; dies ist wohl auch das wesentlich Neue an unserer Arbeit. Daß wir uns so eingehend mit einer scheinbar so abseits liegenden Verallgemeinerung beschäftigt haben, bedarf aber einer Begründung.

Der Grund dafür, daß überhaupt das Bedürfnis besteht, Differential- und Integralrechnung unter demselben Gesichtspunkt zu betrachten, oder also, sie als Spezialfälle eines und desselben Operators zu betrachten, liegt doch im Bestehen des Hauptsatzes der Integralrechnung, also darin, daß das Produkt dieser beiden Operatoren die Identität ergibt. Von einer Verallgemeinerung des Ableitungsoperators wird man also wesentlich verlangen, daß sie iterierbar ist, und daß die Regel für das Produkt zweier solcher Operatoren den obigen Satz als Spezialfall enthält. Außerdem wird man zum Beispiel erwarten dürfen, daß auf eine im abgeschlossenen Ableitungsintervall stetig differenzierbare Funktion der Ableitungsoperator zum Exponenten $\frac{1}{2}$ zweimal hintereinander anwendbar ist und die gewöhnliche Ableitung der Funktion herauskommt.

Nun zeigt sich aber, daß bereits die Ableitung einer Konstanten zu positivem Ableitungsexponenten eine Funktion ergibt, die am linken Endpunkt des Ableitungsintervalls einen Pol aufweist (Satz 2). Soll also die Ableitung iteriert werden können, so muß der Ableitungsoperator auf eine solche Funktion anwendbar sein.

Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit behandeln wir die Ableitung einer Konstanten (Satz 2) und einer Potenz (Satz 3) und beschreiben das Verhalten der Ableitung einer im abgeschlossenen Intervall stetig differenzierbaren Funktion als Funktion der oberen Grenze (Satz 4). Im letzten Paragraphen geben wir noch einige Eigenschaften der Ableitung als Operator an (Satz 5 und 6).

Die Arbeit beschäftigt sich im wesentlichen mit den Fragestellungen des Heaviside-Kalküls; wir gehen hier auf diesen Standpunkt aber nicht ein.

Definition. Die reelle Funktion $f(\xi)$ sei im reellen Intervall $x_0 < \xi \leq x_1$ definiert, α sei eine reelle Zahl. Wir setzen

$$D_n^\alpha f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \left(\frac{n}{x_1 - x_0}\right)^\alpha \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f\left(x_1 - \nu \frac{x_1 - x_0}{n}\right), \tag{1}$$

$$D^\alpha f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \lim_{n \to \infty} D_n^\alpha f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi), \tag{2}$$

wobei in der Potenz in (1) der Hauptwert genommen werden soll. Den Ausdruck (2) bezeichnen wir, sofern dieser Grenzwert existiert, als die „*D-Ableitung der Funktion f zum Exponenten α von x_0 bis x_1*“ [4]).

Satz 1. A. Es ist

$$D^0 f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = f(x_1) \; . \tag{3}$$

B. Ist $\alpha = 1, 2, \ldots$ und ist $f^{(\alpha)}(\xi)$ in der Umgebung von x_1 stetig, so ist

$$D^\alpha f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = f^{(\alpha)}(x_1) \; . \tag{4}$$

C. Ist $\alpha < 0$, ist $f(\xi)$ für $x_0 < \xi \leq x_1$ differenzierbar und ist $f(\xi) = O\big((\xi - x_0)^{-\beta}\big)$ für $\xi \downarrow x_0$ mit $\beta < 1$, so konvergiert der Ausdruck (2) und es ist

$$D^\alpha f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(\xi)}{(x_1 - \xi)^{\alpha+1}}\, d\xi \; . \tag{5}$$

Insbesondere ist dann

$$D^{-1} f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \int_{x_0}^{x_1} f(\xi)\, d\xi \; . \tag{6}$$

D. Ist $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \ldots$, ist $f(\xi)$ für $x_0 < \xi \leq x_1$ $([\alpha] + 1)$-mal stetig differenzierbar und ist $f^{([\alpha]+1)}(\xi) = O\big((\xi - x_0)^{-\beta-1}\big)$ für $\xi \downarrow x_0$ mit $\beta < 1$, so konvergiert der Ausdruck (2) und es ist

$$D^\alpha f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \left(\frac{d}{dx_1}\right)^{1+[\alpha]} \frac{1}{\Gamma(1 + [\alpha] - \alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(\xi)}{(x_1 - \xi)^{\alpha-[\alpha]}}\, d\xi \; . \tag{7}$$

---

[4]) Es ist von Interesse, mit unserm Ansatz und Ergebnis jene von Stuloff[3]) zu vergleichen. Stuloff definiert die α-malige Ableitung durch den Grenzwert

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + \nu h)$$

und beweist: ist f monoton abnehmend, für alle $x > 0$ erklärt, positiv, und existiert dieser Grenzwert für ein $-1 \leq \alpha < 0$, so ist

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1} f(x + t)\, dt \; .$$

Ist f positiv, monoton abnehmend, existiert jenes Integral für ein $-1 \leq \alpha < 0$, so existiert die γ-malige Ableitung für jedes $\alpha \leq \gamma < 0$. Endlich: eine „total monotone“ Funktion ist zu jedem $\alpha > 0$ ableitbar.

I. TEIL: BEWEIS VON SATZ 1.

Die Aussagen A und B folgen direkt aus der Definition, da in diesen Fällen die Binomialreihe abbricht.

Im Falle *C* folgt die Aussage für $\alpha = -1$ unmittelbar daraus, daß jetzt für alle ν gilt:

$$(-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} \equiv 1 \; .$$

Für den allgemeinen Fall C und Fall D ist zum Beweis zunächst zu bemerken, daß unter den gemachten Voraussetzungen die rechte Seite von (5) bzw. (7) tatsächlich konvergiert (vgl. S. 148).

Um die Schreibweise zu vereinfachen, führen wir den Beweis von Satz 1 für den Fall $x_0 = 0$, $x_1 = x$. Damit ist natürlich der Satz auch in seinem eigentlichen Wortlaut bewiesen.

Wir benötigen im Beweis häufig die folgenden Beziehungen, die wir hier anführen:

a) Für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ und alle α gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} = (-1)^n \binom{\alpha-1}{n} \; . \tag{8}$$

b) Für $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$ gilt für $\nu \to \infty$

$$(-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\, \nu^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{\nu^{\alpha+2}}\right) . \tag{9}$$

c) Ist die Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von $x = a$ stetig differenzierbar (außer eventuell in diesem Punkt selbst) und ist $f'(x) = O\big((x-a)^\gamma\big)$ für $x \to a$, wo γ eine reelle Zahl bedeutet, so ist für $x \to a$ $f(x) = O\big((x-a)^{\gamma+1}\big)$.

§ 1. Zerlegung

Wir setzen

$$S_1(n_0, n) = \left(\frac{n}{x}\right)^\alpha \sum_{\nu=0}^{n_0-1} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f\left(x - \frac{\nu x}{n}\right) , \tag{10}$$

$$S_2(n_0, n) = \left(\frac{n}{x}\right)^\alpha \sum_{\nu=n_0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f\left(x - \frac{\nu x}{n}\right) . \tag{11}$$

Dann geht (1) über in

$$D_n^\alpha f(\xi) \Big|_0^{x_1} (\xi) = S_1(n_0, n) + S_2(n_0, n) \; . \tag{12}$$

Hier sollen für $n \to \infty$ gleichzeitig die folgenden Beziehungen gelten:

$$n_0 \to \infty\,, \qquad \frac{n_0}{n} \to 0\,, \qquad \frac{n^\alpha}{n_0^{\alpha+1}} \to 0\,. \tag{13}$$

Setzen wir

$$n_0 \sim n^\mu\,, \tag{14}$$

so muß der Exponent μ gleichzeitig den Ungleichungen

$$0 < \mu < 1\,, \qquad \alpha < \mu(\alpha+1) \tag{15}$$

genügen. Man sieht leicht ein, daß diese Ungleichungen bei jedem gegebenen α miteinander vereinbar sind.

§ 2. Abschätzung von $S_1(n_0, n)$ für $\alpha < 0$.

In diesem Fall ist $(-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} > 0$ für alle ν. Ist jetzt $f\left(x - \frac{\nu_0 x}{n}\right)$ derjenige der Werte von $f\left(x - \frac{\nu x}{n}\right)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n_0 - 1)$ mit dem größten Betrag, so ist

$$\begin{aligned} |S_1(n_0, n)| &\leq \left(\frac{n}{x}\right)^\alpha \left| f\left(x - \frac{\nu_0 x}{n}\right)\right| \left|\sum_{\nu=0}^{n_0-1} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu}\right| \\ &= \left(\frac{n}{x}\right)^\alpha \left| f\left(x - \frac{\nu_0 x}{n}\right)\right| \left|(-1)^{n_0-1} \binom{\alpha-1}{n_0-1}\right|\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion f in einer linksseitigen Umgebung von x folgt somit wegen (9) und (13) für $n \to \infty$

$$S_1(n_0, n) = o(1)\,. \tag{17}$$

§ 3. Abschätzung von $S_1(n_0, n)$ für $\alpha > 0$.

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \underset{n}{\Delta^0} f(cx) &= f(cx) \\ \underset{n}{\Delta^{\nu+1}} f(cx) &= \underset{n}{\Delta^\nu} f(cx) - \underset{n}{\Delta^\nu} f\left(cx - \frac{x}{n}\right)\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Dann folgt aus (10) durch $[\alpha] + 1$-malige partielle Summation bezüglich der Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} S_1(n_0, n) = {} & \left(\frac{n}{x}\right)^\alpha \sum_{\nu=0}^{n_0-[\alpha]-2} (-1)^\nu \binom{\alpha-[\alpha]-1}{\nu} \underset{n}{\Delta^{[\alpha]+1}} f\left(x - \frac{\nu x}{n}\right) \\ & + \left(\frac{n}{x}\right)^\alpha \sum_{\kappa=1}^{[\alpha]+1} (-1)^{n_0-\kappa} \binom{\alpha-\kappa}{n_0-\kappa} \underset{n}{\Delta^{\kappa-1}} f\left(x - \frac{n_0-\kappa}{n}x\right)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Hier ist jetzt $(-1)^\nu \binom{\alpha-[\alpha]-1}{\nu} > 0$ für alle ν. Die erste Summe in (19) kann auf dieselbe Weise wie oben abgeschätzt werden, und zwar sieht man leicht, daß sie unter den Bedingungen (13) gegen 0 geht, wenn man die Stetigkeit der $[\alpha]+1$-ten Ableitung von f in der linksseitigen Umgebung von x berücksichtigt. Die zweite Summe in (19), die ja aus einer beschränkten Zahl von Summanden besteht, kann aber mit Hilfe von (9) approximiert werden.
Es folgt also für $n \to \infty$ mit (13)

$$S_1(n_0, n) = \sum_{\kappa=1}^{[\alpha]+1} \frac{1}{\Gamma(\kappa-\alpha)} \left(\frac{n}{n_0 x}\right)^{\alpha-\kappa+1} f^{(\kappa-1)}\left(x\left(1-\frac{n_0}{n}\right)\right) + o(1) \,. \tag{20}$$

§ 4. Integraldarstellung von $S_2(n_0, n)$.

Aus (9) und (11) folgt, daß wir setzen können

$$S_2(n_0, n) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha} \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \frac{1}{\nu^{\alpha+1}} f\left(x - \frac{\nu x}{n}\right) + R(n_0, n) \,, \tag{21}$$

wo

$$| R(n_0, n) | < K \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha} \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \frac{1}{\nu^{\alpha+2}} \left| f\left(x - \frac{\nu x}{n}\right) \right| \tag{22}$$

ist. Nun ist aber nach Voraussetzung (vgl. c, S. 143)

$$\left| f\left(x - \frac{\nu x}{n}\right) \right| < C \left(\frac{n}{n-\nu}\right)^{\beta}, \quad \beta < 1 \,. \tag{23}$$

Hieraus folgert man leicht, daß unter den Bedingungen (13) für $n \to \infty$ gilt: $R(n_0, n) = o(1)$. Dann ist also

$$S_2(n_0, n) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha} \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \frac{1}{\nu^{\alpha+1}} f\left(x - \frac{\nu x}{n}\right) + o(1) \,. \tag{24}$$

Auf diese Summe wenden wir die Eulersche Summenformel an in der Form

$$\sum_{\nu=n_0}^{n-1} F_n(\nu) = F_n(n_0) + \int_{n_0}^{n-1} (\xi - [\xi])\, F_n'(\xi)\, d\xi + \int_{n_0}^{n-1} F_n(\xi)\, d\xi \,, \tag{25}$$

indem wir setzen

$$F_n(\xi) = \frac{1}{\xi^{\alpha+1}} f\left(x - \frac{\xi x}{n}\right) \,. \tag{26}$$

Hier ist nun

$$n^\alpha F_n(n_0) = \frac{n^\alpha}{n_0^{\alpha+1}} f\left(x - \frac{n_0 x}{n}\right) \,. \tag{27}$$

Dieser Ausdruck geht also wegen (13) und der Stetigkeit von f in der linksseitigen Umgebung von x gegen 0 für $n \to \infty$.

Weiter ist

$$\left| \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha} \int_{n_0}^{n-1} (\xi - [\xi]) F'_n(\xi)\, d\xi \right| \leq \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha} \int_{n_0}^{n-1} | F'_n(\xi) |\, d\xi$$

$$\leq \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha-1} \int_{n_0}^{n-1} \frac{1}{\xi^{\alpha+1}} \left| f'\left(x - \frac{\xi x}{n}\right) \right| d\xi + (\alpha+1) \left(\frac{n}{x}\right)^{\alpha} \int_{n_0}^{n-1} \frac{1}{\xi^{\alpha+2}} \left| f\left(x - \frac{\xi x}{n}\right) \right| d\xi$$

$$= \frac{x^{1-\alpha}}{n} \int_{\frac{n_0}{n}}^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{t^{\alpha+1}} | f'(x - xt) |\, dt + \frac{\alpha+1}{n x^{\alpha}} \int_{\frac{n_0}{n}}^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{t^{\alpha+2}} | f(x - xt) |\, dt\,. \tag{28}$$

Man sieht leicht ein, daß dieser Ausdruck für $n \to \infty$ gegen 0 geht (Bedingung 13, Voraussetzung c).

Es folgt also endlich: für $n \to \infty$ gilt, wenn die Beziehungen (13) erfüllt sind

$$S_2(n_0, n) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\frac{x}{n}}^{x\left(1-\frac{n_0}{n}\right)} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}\, dt + o(1)\,. \tag{29}$$

§ 5. Umformung des Integralausdrucks für $S_2(n_0, n)$.

Ist $\alpha < 0$, so belassen wir den Ausdruck für $S_2(n_0, n)$ in der Form (29).

Ist $0 < \alpha < 1$, so ist, da nach Voraussetzung die Funktion $\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}$ für

$$\frac{x}{n} - \varepsilon < t < x\left(1 - \frac{n_0}{n}\right) + \varepsilon$$

stetig ist:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\frac{x}{n}}^{x\left(1-\frac{n_0}{n}\right)} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\frac{x}{n}}^{x\left(1-\frac{n_0}{n}\right)} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}}\, dt$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{n}{n_0 x}\right)^{\alpha} f\left(x\left(1 - \frac{n_0}{n}\right)\right) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{n_0}{n}\right)^{1-\alpha} f\left(x\left(1 - \frac{n_0}{n}\right)\right) \cdot \frac{1}{x^{\alpha}}$$

$$- \frac{1}{x^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{n} \frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha}}\,. \tag{30}$$

Man sieht leicht, daß die beiden letzten Summanden für $n \to \infty$ gegen 0 gehen.

Ebenso folgt allgemein für $0 \leq [\alpha] < \alpha < [\alpha] + 1$, $n \to \infty$

$$S_2(n_0, n) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} \frac{1}{\Gamma([\alpha] + 1 - \alpha)} \int\limits_{\frac{x}{n}}^{x\left(1-\frac{n_0}{n}\right)} \frac{f(t)}{(x - t)^{\alpha-[\alpha]}}\, dt$$
$$- \sum_{\kappa=1}^{[\alpha]+1} \frac{1}{\Gamma(\kappa - \alpha)} \left(\frac{n}{n_0 x}\right)^{\alpha - \kappa+1} f^{(\kappa-1)}\left(x\left(1 - \frac{n_0}{n}\right)\right) + o(1)\,. \tag{31}$$

§ 6. Abschluß des Beweises.

Aus den Formeln (12), (17), (29) folgt für $\alpha < 0$, $n \to \infty$

$$D_n^\alpha f(\xi)\Big|_0^x (\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{\frac{x}{n}}^{x\left(1-\frac{n_0}{n}\right)} \frac{f(t)}{(x - t)^{\alpha+1}}\, dt + o(1)\,, \tag{32}$$

und aus (12), (21), (32) für $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, \ldots; n \to \infty$

$$D_n^\alpha f(\xi)\Big|_0^x (\xi) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{1+[\alpha]} \frac{1}{\Gamma(1 + [\alpha] - \alpha)} \int\limits_{\frac{x}{n}}^{x\left(1-\frac{n_0}{n}\right)} \frac{f(t)\,dt}{(x - t)^{\alpha-[\alpha]}} + o(1)\,. \tag{33}$$

Somit gilt für $\alpha < 0$

$$D^\alpha f(\xi)\Big|_0^x (\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^{\alpha+1}}\, d\xi\,. \tag{34}$$

Im Falle $\alpha > 0$ müssen wir noch beweisen, daß der in (33) rechts stehende Ausdruck in einer Umgebung von x gleichmäßig konvergiert. Wegen

$$\frac{x}{n} \to 0\,, \quad x\left(1 - \frac{n_0}{n}\right) \to x$$

genügt es, zu diesem Zweck die gleichmäßige Konvergenz von

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{1+[\alpha]} \int\limits_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\alpha-[\alpha]}}\, dt \tag{35}$$

zu beweisen.

Wir substituieren $t = x\,\xi$. Dann ist

$$\int\limits_0^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\alpha-[\alpha]}}\, dt = x^{1+[\alpha]-\alpha} \int\limits_0^1 \frac{f(x\xi)}{(1 - \xi)^{\alpha-[\alpha]}}\, d\xi\,. \tag{36}$$

Sei zunächst $0 < \alpha < 1$. Dann ist also

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt = (1-\alpha) x^{-\alpha} \int_0^1 \frac{f(x\xi)}{(1-\xi)^\alpha} d\xi + x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{\xi f'(x\xi)}{(1-\xi)^\alpha} d\xi \,, \tag{37}$$

sofern das zweite Integral gleichmäßig konvergiert[5]. Nach Voraussetzung ist aber

$$|f'(x\xi)| < \frac{C}{x^{\beta+1}\,\xi^{\beta+1}} \quad \text{mit} \quad \beta < 1 \,,$$

somit ist in der Umgebung von x: $\xi\,|f'(x\,\xi)| < \frac{C_1}{\xi^\beta}$, und damit ist die gleichmäßige Konvergenz des zweiten Integrals bewiesen. Analog beweist man die gleichmäßige Konvergenz des ersten Integrals. Ist $0 \leq [\alpha] < \alpha < [\alpha] + 1$, so verfährt man entsprechend. Es gilt also für jedes $\alpha > 0$

$$D^\alpha f(\xi)\Big|_0^x(\xi) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{1+[\alpha]} \frac{1}{\Gamma(1+[\alpha]-\alpha)} \int_0^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-[\alpha]}} d\xi \,, \tag{38}$$

und damit ist der Satz bewiesen.

2. TEIL: FOLGERUNGEN

§ 7. Beispiele

I. D-Ableitung einer Konstanten

Aus

$$D_n^\alpha(1)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \left(\frac{n}{x_1 - x_0}\right)^\alpha \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} \tag{39}$$

folgt nach (8) und (9) unmittelbar

Satz 2. Für jedes α gilt

$$D^\alpha(1)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \frac{1}{(x_1 - x_0)^\alpha\,\Gamma(1-\alpha)} \,. \tag{40}$$

II. D-Ableitung einer Potenz von x

Aus dem Beweis von Satz 1 und diesem Satz selbst folgt unmittelbar

Satz 3. Seien α und γ reelle Zahlen, $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$. Ist $\gamma > -1$, so gilt

---

[5]) Ch. de la Vallée-Poussin, Cours d'Analyse, 7. éd., t. 2, p. 30.

$$D^\alpha \xi^\gamma \Big|_0^{x_1}(\xi) = x_1^{\gamma-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \tag{41}$$

für jedes α mit $[\alpha] < \gamma + 1$.

Ist $\gamma \leq -1$, so divergiert der Ausdruck

$$D^\alpha \xi^\gamma \Big|_0^{x_1}(\xi) \quad \text{für jedes} \quad \alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$$ [6])

§ 8. Eigenschaften der D-Ableitung als Operator

Satz 4. Ist die Funktion $f(\xi)$ im abgeschlossenen Intervall $x_0 \leq \xi \leq x$ stetig differenzierbar, so konvergiert die D-Ableitung zum Exponenten α für $0 < \alpha < 1$, ist als Funktion von x aufgefaßt, stetig und hat für $x \downarrow x_0$ einen Pol der Ordnung α.

Beweis. Die Konvergenz folgt daraus, daß jetzt die Voraussetzungen für Satz 1 erst recht erfüllt sind. Das Verhalten in Abhängigkeit von x folgt aus der Formel (vgl. 37)

$$\begin{aligned} D^\alpha f(\xi) \Big|_{x_0}^{x}(\xi) &= \frac{1-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \frac{(\xi-x_0) f'(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^\alpha} . \end{aligned} \tag{42}$$

Aus der Definition folgt direkt:

Satz 5. Sind c_1 und c_2 Konstante, so gilt

$$D^\alpha(c_1 f(\xi) + c_2 g(\xi)) \Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = c_1 D^\alpha f(\xi) \Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) + c_2 D^\alpha g(\xi) \Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) . \tag{43}$$

---

[6]) Es ist interessant, dieses Ergebnis mit folgendem Sachverhalt zu vergleichen: Definiert man die α-malige Ableitung von ξ^γ als die Funktion $\varphi(\tau)$ in der Integralgleichung

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\xi \varphi(\tau)(\xi-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \xi^\gamma ,$$

so ist

$$\varphi(\tau) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \tau^{\gamma-\alpha} .$$

Diese Formel stimmt formal mit unserer Formel (41) überein, sie gilt aber nur für $\gamma > -1$, $0 < \alpha < \gamma + 1$, während bei uns der Gültigkeitsbereich von (41) weiter ist (Vgl. *G. Doetsch*, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Grundlehren, Bd. XLVII, Berlin, Springer, 1937, p. 302).

Im folgenden setzen wir abkürzend

$$D^\alpha f(\xi)\Big|_{x_0}^{x_1}(\xi) = D^\alpha \ , \tag{44}$$

$$D^\alpha \left(D^\beta f(\xi)\Big|_{x_0}^{\eta}(\xi)\right)\Big|_{x_0}^{x_1}(\eta) = D^\alpha D^\beta \ . \tag{45}$$

Dann gilt für $\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$ [7])

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha = D^{\alpha+\beta} \ . \tag{46}$$

Der Hauptsatz der Integralrechnung kann in der Form geschrieben werden

$$D^1 D^{-1} = D^0 \ . \tag{47}$$

Die Operatoren D^1 und D^{-1} sind aber i. A. nicht vertauschbar, denn es ist ja

$$D^{-1} D^1 = D^0 - f(x_0) \ . \tag{48}$$

Unser Satz 1 besagt, daß (46) gilt für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$; $-1 < \beta < 0$. Man sieht leicht ein, daß er auch gilt für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$; $\beta < 0$.

Wir beweisen zum Schluß

Satz 6. Ist $f(\xi)$ für $x_0 \leq \xi \leq x_1$ stetig differenzierbar und ist $f(x_0) = 0$, so gilt für $\alpha < 1$, $\beta < 1$

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha = D^{\alpha+\beta} \ . \tag{49}$$

Beweis. Es ist jetzt

$$D^{\alpha-1} D^1 = D^1 D^{\alpha-1} \ . \tag{50}$$

Denn wegen $f(x_0) = 0$ können wir setzen

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(\xi)\, d\xi = D^{-1} D^1 \ .$$

Dann ist aber

$$D^1 D^{\alpha-1} f = D^1 D^{\alpha-1} D^{-1} D^1 = D^1 D^{-1} D^{\alpha-1} D^1 = D^{\alpha-1} D^1 \ .$$

Nun ist

$$D^\alpha D^\beta = D^1 D^{\alpha-1} D^1 D^{\beta-1} = D^1 D^1 D^{\alpha-1} D^{\beta-1}$$

$$= D^2 D^{\alpha+\beta-2} = D^{\alpha+\beta} \ ,$$

w. z. b. w.

(Eingegangen den 22. September 1952.)

---

[7]) E. Goursat, Cours d'Analyse, 1917, t. 1, p. 309.