Über den Zerlegungssatz von Petersen.

Autor(en): **Baebler, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **28 (1954)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22616

Über den Zerlegungssatz von Petersen

von F. Baebler, Zürich

Meinem lieben Freunde W. Scherrer zu seinem 60. Geburtstag

1. Die vorliegende Note schließt sich eng an eine frühere Publikation[1]) an und enthält einen relativ kurzen und, wie mir scheint, durchsichtigen Beweis des bekannten Satzes von *Petersen*[2]) über die Zerlegung kubischer Graphen.

Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken durch einen Kantenweg verbunden werden können, regulär vom n. Grad, wenn mit jeder Ecke n Kanten inzident sind, endlich, falls er endlich viele Ecken und Kanten besitzt. Einen regulären Graphen dritten Grades nennt man auch kubisch. Kann man G durch Löschen einer Kante k in zwei getrennte Teilgraphen zerlegen, so heißt k *Brücke*. Jeder der beiden Teilgraphen, welcher selbst keine Brücken enthält, heißt *Blatt*. Ein Teilgraph von G heißt *Faktor*, wenn er regulär ist und sämtliche Ecken enthält. Der grundlegende Satz von Petersen lautet: Satz 1: *Jeder reguläre endliche und kubische Graph mit höchstens zwei Blättern kann in einen Faktor ersten und einen solchen zweiten Grades zerspalten werden.*

Hat man erst gezeigt, daß der Zerlegungssatz für brückenlose Graphen gilt, so kann man in wenigen Zeilen das allgemeine Resultat gewinnen.

Im folgenden wird die Zerlegbarkeit des brückenlosen Graphen G bewiesen, indem man ihm in bestimmter Weise einen zerlegten Graphen G' zuordnet, von dem man schrittweise über zerlegte Zwischengraphen $G_1, G_2 \ldots G_5$ zum zerlegten Graphen G zurückkehrt.

---

[1]) *F. Baebler:* Über die Zerlegung regulärer Streckenkomplexe ungerader Ordnung, Comment. Math. Helv. **10** (1938), 275–287. Inzwischen hat *T. Gallai* mit der dort verwendeten Betrachtungsweise, die übrigens viele Berührungspunkte mit derjenigen von Petersen hat, die hauptsächlichsten Resultate über die Faktorisierung überhaupt einheitlich begründet und z. T. erweitert. Vergl. T. Gallai: On factorisation of Graphs, Acta. Math. Hung. **1** (1950), 133. In einigen, mir besonders zweckmäßig erscheinenden Bezeichnungen schließe ich mich dieser Arbeit an. Einen anders gearteten Beweis findet man bei *D. Koenig:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936, S. 179–192.

[2]) J. Petersen, Die Theorie der regulären Graphs, Acta Math. 15 (1891) p. 193–220.

Bemerkung: Die Zerlegung deute ich nach Petersen an, indem ich die Kanten des Faktors zweiten Grades schwarz, die andern rot färbe. Anstatt zerlegt, nenne ich daher einen Graphen auch gefärbt.

2. Der zugeordnete Graph G' entsteht aus G dadurch, daß ich jede Ecke durch ein kleines *schwarzes* Dreieck $\triangle$ ersetze. Sind zwei Ecken E_1 und E_2 in G mit derselben Kante inzident, so verbindet man je eine Ecke der entsprechenden Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ *rot* miteinander, jedoch so, daß schließlich G' kubisch ist.

Ein Kanten weg in G' heißt *alternierend* oder *Wechselweg*, wenn er abwechselnd rote und schwarze Kanten enthält, jede einmal. Die Bezeichnung *alternierender Zykel* ist demnach klar. Jeder Wechselweg kann von einer Ecke aus in einer Richtung so lange fortgesetzt werden, bis man eine früher schon durchlaufene Ecke von neuem erreicht. Er heißt dann *abgeschlossen*.

Da in G jede Kante in einem Zykel liegt, kann man in G' alternierende Zykel finden. C_1 sei ein solcher. Nun färbe man die Kanten von C_1 um und lasse alle Dreiecke $\triangle$ die an diesem Zykel beteiligt sind, in Punkte schrumpfen. Man erhält so einen zerlegten kubischen Graphen G_1. Findet man in G_1 einen alternierenden Zykel C_2, an welchem Dreiecke $\triangle$ beteiligt sind, so verfährt man genau wie eben, und erhält einen zerlegten Graphen G_2 usw. Läßt sich dieser Prozeß fortsetzen bis alle schwarzen Dreiecke $\triangle$ einbezogen sind, so ist man schließlich auf G zurückgekommen und dieser Graph ist zerlegt. Die Fortsetzbarkeit ist aber äquivalent mit der Gültigkeit des Satzes 2: *In jedem endlichen, brückenlosen und gefärbten kubischen Graphen G liegt jede rote Kante in einem alternierenden Zykel.*

Dieser Satz soll jetzt bewiesen werden. Ein wesentliches Mittel unserer Beweisführung ist die Klassifikation der Ecken und Kanten von G nach der Art, wie sie auf denjenigen Wechselwegen erreicht bzw. durchlaufen werden, welche in einer beliebigen aber festen Ecke E^* mit der roten Kante k^* beginnen. Diese Einteilung resultiert hier daraus, daß man die Wege von E^* aus nach einem festen Schema durchläuft und auf diese Art schrittweise erzeugt. Dabei wird jede Kante im Sinne der Durchlaufung orientiert, so daß die Bezeichnungen *Anfangs-* und *Endpunkt* einen bestimmten Sinn erhalten. Es zeigt sich, daß im allgemeinen ein Teil der Kanten in beiderlei Sinn durchlaufen und dementsprechend doppelt orientiert wird. Die Bezeichnung „Anfangs- bzw. Endpunkt“ bezieht sich dann jedesmal auf die gerade in Betracht gezogene Orientierung.

Die Schritte des erzeugenden Schemas sollen vorläufig definiert werden wie folgt:

Den ersten roten Schritt bildet die von der Ecke E^* weg gerichtete rote Kante k^*. Der erste schwarze Schritt besteht aus den schwarzen Kanten, die mit dem Endpunkt von k^* inzident sind. Allgemein definienieren wir der i. *rote Schritt* besteht aus allen roten Kanten, die von denjenigen Ecken ausgehen, welche durch den $(i - 1)$. schwarzen neu erreicht werden, und der i. *schwarze Schritt* ist völlig analog durch die mit dem i roten Schritt neu erreichten Ecken bestimmt. Die beiden i. Schritte bilden die i. *Stufe*. $i = 1, 2 \ldots r$.

Diese vorläufige Definition muß im allgemeinen modifiziert werden, doch genügt sie in einem für unsere Zwecke sehr wichtigen Sonderfall. Die Komplikationen, welche diese Modifikationen erfordern, entspringen dem Umstand, daß man schon vom zweiten roten Schritt an mit Kanten der drei folgenden Klassen zu rechnen hat[3]).

1. *Fortschreitende*, das sind solche, die zu bisher nicht erreichten Ecken führen.
2. *Schließende*, das heißt solche, die Endpunkte von Kanten des unmittelbar vorangehenden Schrittes verbinden.
3. *Rückläufige*, solche, welche nach Ecken zurückführen, die bereits im vorletzten oder in einem früheren Schritt erreicht wurden.

Jede rückläufige Kante ist schwarz.

3. Wir wollen aus unserer Erzeugungsweise der Wechselwege zunächst einige Folgerungen ziehen, welche insbesondere die Betrachtungsweise des Abschnittes 5 motivieren und das dortige Resultat plausibel machen[4]).

Eine rückläufige Kante k schließt entweder einen Weg ab, oder man gewinnt mit ihr den Anschluß an bereits durchlaufene Wegstücke, oder es ist beides der Fall. Da auf diesen dann alle Kanten der bereits vorhandenen Orientierung gemäß durchlaufen und keine neuen einbezogen werden, betrachtet man diese Fortsetzungen als zu dem betreffenden Schritt gehörig.

Eine schließende Kante kann in beiden Richtungen durchlaufen werden und erhält dementsprechend eine zweifache Orientierung. Darüber hinaus gibt sie immer Anlaß zu einer zweiten Orientierung weiterer Kanten. Um einen vorläufigen Überblick über diese zu gewinnen, nehmen wir an, k sei die einzige schließende Kante; sie gehöre der n. Stufe an. Die mit ihr inzidenten Ecken bezeichne ich mit E' und E''. Sobald man k einbezieht, können sämtliche bis dahin erzeugten Wechselwege

[3]) Der triviale Fall, daß eine Kante des 1. schwarzen Schrittes mit E^* inzident ist, wird nicht berücksichtigt.

[4]) Will man sich der Kürze halber auf das Unerläßliche beschränken, so kann man diesen Abschnitt bis auf einige Definitionen weglassen.

nach E' bzw. E'' als Fortsetzungen soweit in entgegengesetztem Sinn durchlaufen werden, bis sich die Wege schließen. Alle Kanten dieser Wegstücke werden ein zweites Mal orientiert. Jede ihrer Ecken wird sowohl längs einer schwarzen als auch längs einer roten Kante erreicht. Ich nenne sie *doppelt erreichbar*, während alle andern, welche ebenfalls auf bereits erzeugten Wechselwegen liegen, in unmittelbar verständlicher Weise als *einfach rot* bzw. *schwarz erreichbar* bezeichnet werden.

Nun sei M die Menge der Wechselwege nach E' und E'', welche vor dem Erfassen von k bereits erzeugt sind. Alle Elemente in M haben eine gewisse Anzahl roter Kanten – allermindestens k^* – gemein. Je zwei von diesen gehören verschiedenen Stufen an. Daher existiert unter ihnen eine einzige, k_0, von maximalem Stufenrang m. Kein Weg kann nach dem Einbeziehen der schließenden Kante über diese hinweg rückwärts nach einer Stufe unterhalb m fortgesetzt werden. Dagegen gibt es mindestens zwei Wege, welche sich durch eine solche Fortsetzung im Endpunkt E_0 von k_0 abschließen.

Dieser Umstand gibt uns Anlaß, einen ausgezeichneten Teilgraphen D von G hervorzuheben, der durch die schließende Kante erzeugt wird. Seine Eigentümlichkeit besteht darin, daß er sich als Ganzes in seiner Verknüpfung mit dem übrigen Graphen analog verhält wie eine einzelne Ecke.

D besteht aus der Gesamtheit der in beiderlei Sinn orientierten Kanten und den mit ihnen inzidenten Ecken. Jede der letztern ist doppelt erreichbar und umgekehrt gehört jede doppelt erreichbare Ecke zu D. Da jede Ecke in D von E' oder E'' aus auf Kantenwegen erreicht werden kann, die diesem Teilgraphen angehören – *innern Kantenwegen* – ist er zusammenhängend. Der gleiche Umstand zieht nach sich, daß jede dieser Ecken von E_0 aus auf innern Wechselwegen doppelt erreichbar ist. Daraus folgt wiederum, daß es außer k_0 keine rote Kante geben kann, die nur einfache orientiert und dennoch mit einer Ecke von D inzident ist. Das heißt, alle mit Ecken von D inzidenten roten Kanten exklusive k_0 gehören zu D. Da andererseits k_0 keine Brücke ist, müssen schwarze Kanten vorhanden sein, welche D mit dem übrigen Graphen verknüpfen, und weil jede schwarze Kante in einem schwarzen Zykel liegt, ist deren Anzahl mindestens 2.

Nach dem Einbeziehen von k können alle mit den Ecken von D inzidenten schwarzen Kanten, die bis dahin noch nicht Wechselwegen angehören, als Fortsetzungen von solchen gewählt werden. Wir zählen sie zum n. schwarzen Schritt. Die rückwärtigen Fortsetzungen der Wege werden ohne weitere Zählung vollzogen.

Treten in einem erzeugenden Prozeß mehrere schließende Kanten auf, so bezieht man sie in jeder Stufe sukzessive ein und erweitert jedesmal in analoger Weise die Kantenmenge des entsprechenden schwarzen Schrittes.

4. Der gefärbte Graph G, den wir jetzt in Betracht ziehen, soll eine rote Kante k^* derart besitzen, daß der erzeugende Prozeß für die Wechselwege mit k^* als Anfangskante kein schließendes Element enthält.

Nach jedem Schritt bezeichne ich diejenigen Ecken, welche nur mit 2 bereits in Wechselwege einbezogenen Kanten inzident sind, als *Rücklaufecken* der Valenz 1. Existieren in einem schwarzen Schritt nur rückläufige Kanten, so heißt der Prozeß abgeschlossen. Aus einer einfachen Abzählung resultiert nun sofort, daß dieses Stadium nicht eintreten kann, ehe die beiden mit dem Anfangspunkt E^* von k^* inzidenten schwarzen Kanten k_1 und k_2 erfaßt worden sind.

r_i sei die Anzahl der Rücklaufecken nach den i. roten n_i die Anzahl der Kanten im i. schwarzen Schritt, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Dann gilt für jedes i $n_{i+1} - r_{i+1} = n_i - r_i$, falls keine rückläufige Kante nach E^* führt. Wenn nämlich der i. schwarze Schritt ϱ rückläufige Kanten enthält, während auf ν Kanten je eine neue Ecke erreicht wird, wogegen nach μ neuen Ecken je zwei Kanten laufen, so gilt

$$r_{i+1} = r_i + \nu - \varrho\,; \qquad n_{i+1} = 2\nu + 2\mu \qquad \text{und} \qquad n_i = \varrho + \nu + 2\mu\,.$$

Daraus folgt $n_{i+1} - r_{i+1} = 2\nu + 2\mu - r_i - \nu + \varrho = n_i - r_i$.

Da $n_1 - r_1 = 2$ ist, können nur sämtliche Kanten eines schwarzen Schrittes rückläufig werden, wenn E^* längs k_1 und k_2 auf Wechselwegen erreichbar ist. Satz 2 gilt also für solche Graphen.

1. Bemerkung. Nach dem Abschluß des erzeugenden Prozesses enthält der Teilgraph G^*, welcher aus den, an Wechselwegen beteiligten Ecken und Kanten besteht, keine Rücklaufecken mehr. Da G zusammenhängend ist, muß G^* mit G identisch sein. Man kann daher sagen: *Die Kante k^* liegt mit jeder andern in einem Wechselweg.*

2. Bemerkung. Liegt ein gefärbter, nicht notwendig regulärer[5]) Graph mit einem roten Faktor 1. Grades vor, in welchem jede Ecke mindestens den Grad 3 hat, ferner so, daß er den Voraussetzungen dieses Abschnittes über den erzeugenden Prozeß genügt, und weiß man darüber hinaus, daß jede Rücklaufecke die Valenz 1 besitzt, so gilt

$$n_{i+1} - r_{i+1} \geqslant n_i - r_i\,.$$

[5]) Die Färbung bedeutet hier eventuell nicht die Zerlegung in 2 Faktoren.

5. Im folgenden setze ich voraus, der erzeugende Prozeß enthalte schließende Kanten und er sei abgeschlossen.

Nach Abschnitt 3 ist es natürlich, die Ecken von G in die drei folgenden Klassen einzuteilen: 1. doppelt erreichbare, 2. einfach erreichbare, 3. nicht erreichbare. Da schließende Kanten vorhanden sind, ist die 1. Klasse nicht leer.

Das Vorangehende legt es ferner nahe, denjenigen Teilgraphen D von G hervorzuheben, dessen Elemente die Ecken der ersten Klasse und die in beiden Richtungen durchlaufbaren Kanten sind.

Jede Kante, die mit einer Ecke von D inzident, aber nur einfach orientiert ist, heißt *Nachbarkante*, ihr zweiter Endpunkt *Nachbarecke*.

Eine rote Nachbarkante kann nur in der Richtung auf D hin orientiert sein – ihr zu D gehöriger Endpunkt ist ja doppelt erreichbar – eine schwarze nur in der Richtung von D weg. Deshalb sollen die roten *Eintrittskanten* die schwarzen *Austrittskanten* genannt werden.

Es kann sein, daß D in getrennte Teile $D_1, D_2 \ldots D_r$ zerfällt, die selbst zusammenhängend sind. Diese Teilgraphen D_i besitzen die folgende Eigentümlichkeit: Jeder hat eine einzige Eintrittskante und mindestens zwei Austrittskanten (es zeigt sich später: genau zwei). Jede seiner Ecken, abgesehen vom Endpunkt E_i der Eintrittskante k_i, kann von E_i aus auf Wechselwegen doppelt erreicht werden, die ganz diesem Teilgraphen angehören (innere Wechselwege).

Beweis: k_i sei eine Eintrittskante in D_i, A ihr Anfangs-, E_i ihr Endpunkt, ferner B und C die Endpunkte der mit E_i inzidenten schwarzen Kanten. Da D_i zusammenhängend ist, muß jede seiner Ecken von E_i aus über B oder C auf einem innern Weg erreichbar sein. Diese beiden Ecken sind von E_i aus auf innern Wechselwegen auch rot erreichbar. Könnte nämlich etwa B von E^* aus auf einem Wechselwege rot erreicht werden, der k_i nicht enthält, so wäre dieser über E_i nach A fortsetzbar. k_i könnte nicht Eintrittskante sein.

Sind nicht alle Ecken in D_i von E_i aus auf innern Wechselwegen doppelt erreichbar, so gibt es unter den von dieser Ecke ausgehenden Wechselwegen mindestens einen, w, der mit Ausnahme seines Endpunktes E' lauter innerlich doppelt erreichbare Ecken enthält. Da E' in G doppelt erreichbar ist, existiert ein von E^* ausgehender zu k_i fremder Wechselweg w', der mit einer roten Kante in dieser Ecke endigt. w' kann Ecken enthalten, die von E_i aus doppelt erreichbar sind oder auch nicht. Im ersten Fall gibt es, von E^* ausgerechnet, eine erste solche, E''. Je nachdem das eine oder das andere zutrifft, kann entweder der Weg $E^* \ldots E''$ oder w' selbst, längs eines innern Wechselweges nach E_i und von dort längs k_i nach A fortgesetzt werden, im Widerspruch zur Voraussetzung über A.

Da jede Ecke in D_i von E_i aus auf inneren Wechselwegen mit beiden Farben erreichbar ist, kann keine unter ihnen außer E_i selbst, mit einer einfach orientierten roten Kante inzident sein. k_i ist also die einzige Eintrittskante. Weil G keine Brücken enthält, müssen Austrittskanten aus D_i existieren, und zwar mindestens zwei, da jede schwarze Kante in einem schwarzen Zykel liegt.

6. Auf die letzten Feststellungen zurückgreifend, kann man G einen neuen gefärbten Graphen G_0 zuordnen, für welchen die Gültigkeit des Satzes 2 leicht einzusehen ist. G_0 wird aus G gewonnen, indem man jeden Teilkomplex D_i samt Nachbarkanten löscht. Ausgenommen sind die Ecken E_i und die Eintrittskanten k_i. Jede Ecke E_i wird mit denjenigen in G schwarz verbunden, welche Träger einer Austrittskante von D_i sind. k^* gehört ohne Zweifel zu G_0 [6]).

Nun sei $[\omega]_0$ die Menge derjenigen gerichteten Wechselwege in G_0, welche mit der orientierten Kante k^* beginnen. In G_0 kann keine Kante auf Wegen aus $[\omega]_0$ in beiden Richtungen durchlaufen werden, da diese oder die entsprechende Austrittskante in G dieselbe Eigenschaft hätte, im Widerspruch zur Definition von G_0. Berücksichtigt man dazu die zweite Bemerkung in Abschnitt 4, so folgt unmittelbar die Existenz von alternierenden Zykeln, welche die mit E^* inzidenten schwarzen Kanten enthalten.

Jedem solchen Zykel entspricht ein gleichartiger in G. Damit ist Satz 2 und nach der Feststellung Zeile 22–24 von Abschnitt 2 auch der Satz von Petersen für brückenlose Graphen bewiesen.

(Aus den Abzählungen von Abschnitt 4 folgt ferner, daß die Ecken E_i in G_0 den Grad 3 haben müssen.)

Enthält der Graph G zwei Blätter, so führt man ihn in einen brückenlosen Graphen G_+ über, indem man einen innern Punkt irgendeiner Kante des einen mit einem gleichartigen des andern Blattes durch eine Kante k verbindet. Man kann G_+ färben, und da jede Kante eines gefärbten Graphen in einem alternierenden Zykel liegt, darf man annehmen, k sei rot. Entfernt man k aus G_+ und löscht die Endpunkte dieser Kante als Ecken, so liegt der gefärbte Graph G vor.

(Eingegangen den 21. September 1953.)

---

[6]) Die Kanten k_i können in G_0 auf Wechselwegen, die mit k^* beginnen in der gleichen Richtung durchlaufen werden wie in G.