Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire.

Autor(en): **de Rham, Georges de**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **28 (1954)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22630

Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire

par GEORGES DE RHAM, Lausanne

Dédié à Monsieur Heinz Hopf pour son soixantième anniversaire

1. Considérons une forme linéaire $\omega = \sum_1^n y_i X_i$ en n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$, dont les coefficients y_i appartiennent à un anneau commutatif A, et des formes extérieures $\alpha, \beta, \ldots$ en les mêmes indéterminées, dont les coefficients appartiennent à un A-module M. Un produit tel que $\omega \wedge \alpha$ est alors bien déterminé, c'est une forme extérieure dont les coefficients appartiennent à M. Pour que α soit *divisible* par ω, c'est-à-dire pour qu'il existe une forme β (à coefficients dans M) telle que $\alpha = \omega \wedge \beta$, il est évidemment nécessaire que $\omega \wedge \alpha = 0$. Cette condition est aussi suffisante lorsque ω est susceptible de faire partie d'une base des formes linéaires en $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans A : il suffit de le vérifier pour $\omega = X_1$, ce qui est immédiat et bien connu. Je me propose d'indiquer ici un cas plus général où cette condition est encore suffisante, et j'en ferai une application à la théorie des formes différentielles et des courants.

Disons que ω jouit de la *propriété* (P), si, pour tout entier $k \geqslant 0$ et $< n$, pour un élément quelconque a de M, le fait que $y_{k+1} a$ soit une combinaison linéaire de $y_1, \ldots, y_k$ à coefficients dans M entraîne que a est lui-même une telle combinaison. En désignant par $(y_1, \ldots, y_k)$ le sous-A-module de M formé par toutes les combinaisons linéaires de $y_1, \ldots, y_k$ à coefficients dans M, cela signifie que $y_{k+1} a \in (y_1, \ldots, y_k)$ entraîne $a \in (y_1, \ldots, y_k)$, et en particulier (pour $k = 0$), $y_1 a = 0$ entraîne $a = 0$. Nous établirons alors la proposition suivante :

I. *Si ω jouit de la propriété (P), pour qu'une forme α de degré $q < n$ soit divisible par ω, il suffit que $\omega \wedge \alpha = 0$.*

Pour abréger l'écriture, il sera commode d'utiliser la notion d'adjointe $*\alpha$ à une forme α par rapport à $X_1^2 + \cdots + X_n^2$, de sorte que

$$*1 = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\,, \quad *X_1 = X_2 \wedge \ldots \wedge X_n\,, \quad *(X_1 \wedge X_2) = X_3 \wedge \ldots \wedge X_n\,, \text{ etc.}$$

Les expressions générales d'une forme α de degré $n-1$ et d'une forme β de degré $n-2$ sont alors

$$\alpha = \sum_i a_i * X_i \ , \qquad \beta = \sum_{i<j} b_{ij} * (X_i \wedge X_j) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} * (X_i \wedge X_j) \ ,$$

où $a_i \in M$, $b_{ij} = -b_{ji} \in M$. Par un calcul immédiat, on a

$$\omega \wedge \alpha = \sum_i y_i a_i * 1 \ , \qquad \omega \wedge \beta = \sum_{i,j} y_j b_{ij} * X_i \ .$$

Ces formules montrent que, pour $q = n-1$, la proposition I se réduit à la suivante: *si les éléments* a_i *de* M $(i = 1, \ldots, n)$ *satisfont à* $\sum_1^n y_i a_i = 0$ *et si la propriété* (P) *est vérifiée, il existe des éléments* b_{ij} *de* M $(i, j = 1, \ldots, n)$ *qui satisfont aux relations* $b_{ij} + b_{ji} = 0$, $a_i = \sum_{j=1}^n y_j b_{ij}$.

Cette dernière proposition est évidente pour $n = 1$: les hypothèses entraînent alors en effet $a_1 = 0$ et il suffit de prendre $b_{11} = 0$. Procédant par récurrence, supposons qu'elle est vraie pour $n-1$ au lieu de n. La relation $\sum_1^n y_i a_i = 0$, vérifiée par hypothèse, entraine $y_n a_n \in (y_1, \ldots, y_{n-1})$, d'où, en vertu de (P), $a_n \in (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Il existe donc des éléments b_{nj} de M $(j = 1, \ldots, n-1)$ tels que $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} y_j b_{nj}$, d'où, en substituant dans la relation précédente, $\sum_{i=1}^{n-1} y_i (a_i + y_n b_{ni}) = 0$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe alors des éléments b_{ij} de M $(i, j = 1, \ldots, n-1)$ tels que $b_{ij} + b_{ji} = 0$, $a_i + y_n b_{ni} = \sum_{j=1}^{n-1} y_j b_{ij}$, et en posant encore $b_{in} = -b_{ni}$, $b_{nn} = 0$, on satisfait à toutes les conditions requises.

Pour établir I lorsque $q < n-1$, procédons encore par récurrence. Posant $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \wedge X_n$, $\omega = \omega_1 + y_n X_n$, les formes α_1, α_2 et ω_1 ne contenant pas X_n, on a

$$\omega \wedge \alpha = \omega_1 \wedge \alpha_1 + [\omega_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^q y_n \alpha_1] \wedge X_n \ .$$

Comme $\omega \wedge \alpha = 0$, on a aussi $\omega_1 \wedge \alpha_1 = 0$; par suite, en vertu de ce qu'on vient d'établir si $q = n-2$ et en vertu de l'hypothèse de récurrence si $q < n-2$, il existe une forme β_1, ne contenant pas X_n, telle que $\alpha_1 = \omega_1 \wedge \beta_1$.

Mais $\omega \wedge \alpha = 0$ entraîne aussi $\omega_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^q y_n \alpha_1 = 0$, c'est-à-dire $\omega_1 \wedge [\alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1] = 0$. Si $q > 1$, en vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une forme β_2, ne contenant pas X_n, telle que $\omega_1 \wedge \beta_2 = \alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1$, et en posant $\beta = \beta_1 + \beta_2 \wedge X_n$, il vient

$\omega \wedge \beta = \omega_1 \wedge \beta_1 + (-1)^{q-1} y_n \beta_1 \wedge X_n + \omega_1 \wedge \beta_2 \wedge X_n = \alpha_1 + \alpha_2 \wedge X_n = \alpha.$ Si $q = 1$, α_2 et β_1 sont de degré zéro, la relation $\omega_1 [\alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1] = 0$ implique $y_1 [\alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1] = 0$, d'où, en vertu de (P),

$$\alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1 = 0 \ , \qquad \alpha_2 = y_n \beta_1 \ ,$$
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 X_n = \omega_1 \beta_1 + y_n \beta_1 X_n = \omega \beta_1 \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Dans le cas où le degré de α est égal à n, on a toujours $\omega \wedge \alpha = 0$, mais α n'est pas toujours divisible par ω. Des formules données plus haut, on déduit immédiatement que, *pour que la forme* $a * 1$ *soit divisible par* ω, *il faut et il suffit que* $a \in (y_1, \ldots, y_n)$.

Remarque. Si l'on dispose d'une opération associant à tout élément $a \in (y_1, \ldots, y_k)$ un système déterminé d'éléments $a_1, \ldots, a_k$ de M tel que $a = \sum_1^k y_i a_i$, la démonstration ci-dessus donne un procédé permettant de construire, pour toute forme α divisible par ω, une forme déterminée β satisfaisant à $\alpha = \omega \wedge \beta$.

2. Appliquons ce qui précède aux formes différentielles dans R^n, en posant $X_1 = dx_1, \ldots, X_n = dx_n$. Supposons que *les coefficients* $y_1, \ldots, y_n$ *de* $\omega = \Sigma\, y_i dx_i$ *forment un système de coordonnées dans* R^n *et ne s'annulent simultanément qu'au seul point* O, et prenons pour A l'ensemble des fonctions C^∞ et pour M l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans R^n.

Choisissons une fonction $\varrho(t)$ d'une variable, C^∞, nulle pour $|t| > 1$ et égale à 1 pour $|t| < \frac{1}{2}$. A toute fonction $a(y_1, \ldots, y_n)$ nous pouvons associer les fonctions a_i $(i = 1, \ldots, n)$ définies par

$$a_i(y_1, \ldots, y_n) = \tag{1}$$
$$= \varrho(y_1) \cdots \varrho(y_n) \frac{a(0, \ldots, 0, y_i, \ldots, y_n) - \varrho(y_i)\, a(0, \ldots, 0, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{y_i}$$

On a les identités

$$a(y_1, \ldots, y_n) - \varrho(y_1) \cdots \varrho(y_k)\, a(0, \ldots, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{k} y_i a_i \ . \tag{2}$$

Il est clair que $a_i \in M$ si $a \in M$. Les fonctions de $(y_1, \ldots, y_k)$ sont celles qui s'annulent pour $y_1 = \ldots = y_k = 0$, et pour une telle fonction l'identité ci-dessus se réduit à $a = \sum_{i=1}^{k} y_i a_i$. Ainsi la propriété (P) est vérifiée, et nous avons un procédé qui, en vertu de la remarque faite plus haut, fournit une opération, qu'on désignera par P^*, qui associe à toute forme α de degré $q > 0$ divisible par ω une forme déterminée $P^*\alpha$ de degré $q-1$ satisfaisant à $\omega \wedge P^*\alpha = \alpha$.

Cette opération P^* est linéaire, parce que les a_i dépendent linéairement de a. Nous allons étendre sa définition à toutes les formes. Tout d'abord, si $\alpha = a * 1$ est de degré n, il suffit de poser

$$P^*(a * 1) = \sum_1^n a_i * dx_i \; .$$

En introduisant la distribution de Dirac δ définie par $\delta[a * 1] = a(0, \ldots, 0)$ et posant $\sigma = \varrho(y_1) \ldots \varrho(y_n) * 1$, l'identité (2) donne, pour $k = n$,

$$\alpha = \omega \wedge P^* \alpha + \delta[\alpha]\sigma \; . \tag{3}$$

La condition pour que ω divise α peut alors s'écrire $\delta[\alpha] = 0$.

Si le degré de α est égal à zéro, nous poserons $P^* \alpha = 0$. Enfin, si ce degré est compris entre zéro et n, nous poserons

$$P^* \alpha = P^*[\alpha - P^*(\omega \wedge \alpha)] \; ,$$

le second membre de cette relation étant déjà défini puisque les formes $\omega \wedge \alpha$ et $\alpha - P^*(\omega \wedge \alpha)$ sont divisibles par ω.

Cette forme $\beta = \alpha - P^*(\omega \wedge \alpha)$ étant divisible par ω satisfait à $\beta = \omega \wedge P^* \beta$, d'où

$$\alpha = \omega \wedge P^* \alpha + P^*(\omega \wedge \alpha) \; . \tag{4}$$

L'opération P^* ainsi définie est une application linéaire *continue* de l'espace vectoriel de toutes les formes C^∞ à support compact en lui-même. L'opération duale P change tout courant[1]) T en un courant PT défini par $PT[\alpha] = T[P^*\alpha]$. Les relations (3) et (4) entraînent, par dualité,

$$\text{si } T \text{ est de degré zéro,} \qquad T = P(T\omega) + T[\sigma]\delta \; , \tag{5}$$

$$\text{si } T \text{ est de degré} > 0, \qquad T = P(T \wedge \omega) + (PT) \wedge \omega \; . \tag{6}$$

On en déduit : *les distributions T qui satisfont à $T\omega = 0$ sont les multiples de la distribution de Dirac δ, et tout courant T de degré > 0 qui satisfait à $T \wedge \omega = 0$ est divisible par ω*. Ce dernier résultat ne pouvait pas se déduire immédiatement de I, car en prenant pour M l'ensemble des distributions, la propriété (P) n'est pas vérifiée, puisque $y_1 T = 0$ n'entraîne pas $T = 0$.

---

[1]) *L. Schwartz*, Théorie des distributions, I, Paris 1950. — *G. de Rham and K. Kodaira*, Harmonic Integrals. The Institute for Advanced Study, Princeton 1950.

Considérons plus généralement, dans une variété C^∞ à n dimensions V, une forme différentielle ω de degré 1, C^∞, *ne s'annulant qu'en des points isolés en chacun desquels le jacobien de ses coefficients par rapport aux coordonnées locales est différent de zéro.* Si une forme α, C^∞ dans V, est localement divisible par ω, elle est globalement divisible par ω ; car on peut alors trouver un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ localement fini de V et des formes β_i telles que $\alpha = \omega \wedge \beta_i$ dans U_i ; si $1 = \Sigma\, \varphi_i$ est une partition de l'unité, où φ_i est une fonction C^∞ à support dans U_i, la forme $\beta = \Sigma\, \varphi_i \beta_i$ est C^∞ dans V et satisfait à $\alpha = \omega \wedge \beta$. De même, un courant localement divisible par ω est aussi globalement divisible par ω. Cela étant, les résultats ci-dessus entraînent immédiatement le suivant :

Pour qu'une forme α de degré q, C^∞ dans V, soit divisible par ω, il faut et il suffit, si $q < n$, que $\omega \wedge \alpha = 0$; si $q = n$, il faut et il suffit que α s'annule en tous les points où ω s'annule. Pour qu'un courant T de degré > 0 soit divisible par ω, il faut et il suffit que $\omega \wedge T = 0$; les distributions T qui satisfont à $T\omega = 0$ sont les combinaisons linéaires des distributions de Dirac relatives aux zéros de ω.

3. Soit G le plus grand groupe linéaire connexe qui laisse invariante la forme quadratique

$$u = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 , \qquad (\varepsilon_i = \pm 1) .$$

Pour qu'une distribution T soit *invariante* relativement à G, il faut et il suffit que $dT \wedge du = 0$; cela résulte de ce que

$$dT \wedge du = \Sigma\, X_{ij}(T) dx_i \wedge dx_j ,$$

où les X_{ij} sont les symboles de transformations infinitésimales qui engendrent G. La forme différentielle $du = \sum_{1}^{n} \varepsilon_i 2 x_i dx_i$ satisfaisant aux conditions imposées à ω au début du n° 2, il en résulte que, *pour toute distribution invariante T, il existe une distribution S, déterminée à un multiple près de δ, qui satisfait à $dT = S du$.* Cette distribution S, invariante puisque $dS \wedge du = 0$, sera appelée dérivée de T par rapport à u et notée $S = \dfrac{dT}{du}$. Réciproquement, la condition d'invariance de S étant en même temps la condition pour que $S du$ soit une différentielle exacte, pour toute distribution invariante S il existe une distribution T, définie à une constante près, qui satisfait à $dT = S du$, et qui est nécessairement invariante.

Posons $\square = \sum_1^n \varepsilon_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. De la relation, valable pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\square^k(x_i T) = x_i \square^k T + 2k\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\square^{k-1} T) ,$$

on déduit, en remplaçant T par δ, tenant compte de $x_i \delta = 0$, multipliant par $\varepsilon_i 2dx_i$ et sommant, $du \; \square^k \delta + 4kd(\square^{k-1}\delta) = 0$, d'où, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$\frac{d}{du} \square^k \delta = - \frac{1}{4(k+1)} \square^{k+1} \delta + C\delta ,$$

avec une constante arbitraire C. On en déduit, en désignant par $Q(\square)$ un polynome arbitraire en $\square$ à coefficients constants de degré $< p$,

$$\frac{d^p}{du^p} \delta = \frac{1}{p!} \left(- \frac{\square}{4} \right)^p \delta + Q(\square)\delta .$$

Par suite, la dérivée p-ième $\frac{d^p T}{du^p}$ d'une distribution invariante T est déterminée à une distribution près de la forme $Q(\square)\delta$.

Cette notion de dérivée par rapport à u permet de répondre à une question concernant la détermination de toutes les distributions invariantes relativement à G.

Il est aisé de déterminer les distributions invariantes dans $R^n - O$, comme l'a fait M. Methée[2]) dans le cas où $u = - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 + x_n^2$; en désignant par D_1 le domaine ($u < 0$ ou $u \geqslant 0$ et $x_n > 0$), par D_2 le domaine ($u < 0$ ou $u \geqslant 0$ et $x_n < 0$), par f_i la restriction à D_i de l'application f de R^n dans R qui envoie le point $(x_1, \ldots, x_n)$ sur le point de R d'abcisse $\xi = u$, à chaque paire (T_1, T_2) de distributions dans R satisfaisant à la condition de compatibilité $T_1 = T_2$ pour $\xi < 0$ correspond une distribution invariante T dans $R^n - 0$ définie par $T = f_i^* T_i$ dans D_i $(i = 1, 2)$, et l'on obtient ainsi toutes les distributions invariantes dans $R^n - O$. Si la signature de u est (a, b) avec $a > 1$ et $b > 1$, on voit de même que les distributions invariantes T dans $R^n - O$ correspondent aux distributions T_0 dans R par $T = f_0^* T_0$, f_0 étant la restriction de f à $R^n - O$. Enfin, si $a = b = 1$, $n = 2$, $u = x_1^2 - x_2^2$, il faut considérer les quatre domaines $D_1(x_1 + x_2 > 0)$, $D_2(x_1 - x_2 > 0)$, $D_3(x_1 + x_2 < 0)$ et $D_4(x_1 - x_2 < 0)$; à chaque système de quatre distributions T_i dans R satisfaisant aux conditions de compatibilité

---

[2]) *P. D. Methée*, Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz, Comment. Math. Helv. 28, p. 225—269, § 4.

$T_1 = T_2$ et $T_3 = T_4$ pour $\xi > 0$, $T_2 = T_3$ et $T_4 = T_1$ pour $\xi < 0$, correspond une distribution invariante T dans $R^2 - O$, définie par $T = f_i^* T_i$ dans D_i (f_i étant la restriction de f à D_i), et l'on obtient ainsi toutes les distributions invariantes dans $R^2 - O$.

Ainsi, dans tous les cas où u est indéfinie, les distributions invariantes dans $R^n - O$ sont associées aux distributions dans R ou aux systèmes de deux ou quatre distributions dans R satisfaisant à certaines conditions de compatibilité.

D'autre part, les distributions invariantes dont le support se réduit au point O sont les combinaisons linéaires des $\square^k \delta$ $(k = 0, 1, \ldots)$[3]. Si une distribution invariante dans $R^n - O$ peut être prolongée en une distribution invariante dans R^n, le prolongement sera donc déterminé à une combinaison linéaire près des $\square^k \delta$. La question se pose alors de savoir si ce prolongement est toujours possible. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi : *si la forme quadratique u est indéfinie, toute distribution invariante dans $R^n - O$ peut être prolongée en une distribution invariante dans R^n.*

Pour cela, remarquons qu'en vertu des définitions ci-dessus, si $T = \dfrac{d^p S}{du^p}$ et si $\{T_i\}$ et $\{S_i\}$ sont les systèmes associés à T et S, on a $T_i = \dfrac{d^p S_i}{d\xi^p}$. Les T_i étant donnés, en vertu d'un théorème connu de la théorie des distributions[4]), pour p assez grand, dans un voisinage du point $\xi = 0$, les S_i seront égales à des fonctions continues. Alors, dans le voisinage correspondant du cône $u = 0$, S sera égale à une fonction continue qui se prolonge en O par continuité, et de ce prolongement de S dans R^n résulte par la formule $T = \dfrac{d^p S}{du^p}$ un prolongement de T dans R^n, déterminé à une combinaison linéaire près des $\square^k \delta$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Si la forme quadratique u est définie positive, les distributions invariantes T dans $R^n - O$ correspondent, par la formule $T = f_0^* T_0$, aux distributions T_0 dans la demi-droite $\xi > 0$ de R. Si T_0 peut être prolongée dans R, on voit comme ci-dessus que T peut être prolongée dans R^n. Mais il peut arriver que T_0 ne puisse pas être prolongée dans R, comme par exemple $T_0 = \exp. \dfrac{1}{\xi}$, et alors T ne peut pas être prolongée dans R^n.

(Reçu le 20 avril 1954)

---

[3]) Cf. *P. D. Methée*. loc. cit., § 3.

[4]) *L. Schwartz*, loc. cit. p. 85.