Über das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen.

Autor(en): **Meili, Heino Jürg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **29 (1955)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23279

Über das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen

von Heino Jürg Meili, Zürich

Im Zusammenhang mit der Theorie der asymptotischen Reihen hat sich *Carleman* folgende Frage gestellt:

Es sei gegeben ein Gebiet G der $w = u + iv$-Ebene mit dem Randpunkt w_0 und eine beliebige monotone Folge von positiven reellen Zahlen

$$a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots .$$

Welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen die a_n unterworfen werden, damit für eine in G regulär analytische Funktion $F(w)$, zu der eine positive Zahl k so existiert, daß für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und für jedes w in G die Beziehungen

$$\left| \frac{F(w)}{(w - w_0)^n} \right| \leqq k^n \cdot a_n^n \tag{1}$$

gelten, $F(w) \equiv 0$ folgt?

Dieses Problem ist das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen oder das W-Problem. *Carleman* beantwortet diese Frage in seiner 1926 veröffentlichten Schrift[1]) vollständig für den Fall, daß G der Kreis $|w| < 1$ ist. Er beweist folgende beiden Sätze[2]):

Satz 1. *Hinreichende Bedingung dafür, daß für eine im Kreise $|w| < 1$*

---

[1]) Vgl. *T. Carleman*, Les Fonctions quasi analytiques, Gauthier-Villars 1926.

[2]) Wird die Folge a_n nicht als monoton vorausgesetzt, so bleiben die Carlemanschen Sätze richtig, wenn man die Reihe (2) ersetzt durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^*},$$

unter der Folge a_n^* die Fabersche Minorante der a_n, das heißt die monotone Folge

$$a_n^* = \inf_{\nu \geqq n} a_\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

verstanden.

reguläre analytische Funktion $F(w)$ aus dem Bestehen der Relationen (1) *das identische Verschwinden folgt, ist, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \tag{2}$$

divergiert.

Satz 2. *Konvergiert die Reihe* (2), *so existiert eine im Einheitskreise regulär analytische Funktion $F(w)$, welche nicht identisch verschwindet und für eine geeignete positive Zahl k die Bedingungen* (1) *erfüllt.*

Mit Hilfe konformer Abbildung zeigt *Carleman*, daß für die Halbebene $u > 0$ die Lösung des Eindeutigkeitsproblems dieselbe ist wie für den Einheitskreis.

In seiner drei Jahre später erschienenen Abhandlung[3]) beweist *A. Ostrowski* die beiden Carlemanschen Sätze wesentlich einfacher, indem er die unendlich vielen Bedingungen (1) zu einer einzigen zusammenfaßt:

$$|F(w)| \leqq \operatorname*{Inf}_{n \geqq 0} \cdot (k a_n)^n \cdot |w - w_0|^n \equiv \frac{1}{T\left(\frac{1}{|w - w_0|}\right)}. \tag{3}$$

Mit $T(r)$ bezeichnet er die für $r > 0$ definierte, stetige und monotone Funktion

$$T(r) \equiv \operatorname*{Sup}_{n \geqq 0} \frac{r^n}{(k a_n)^n}.$$

So findet *Ostrowski* eine sehr elegante Lösung des Eindeutigkeitsproblems für den Fall des Kreises $|w| < 1$:

Wenn das Integral

$$\int_1^{\infty} \log T(r) \frac{dr}{r^2} \tag{4}$$

divergiert, verschwindet eine im Einheitskreise regulär analytische Funktion $F(w)$ mit den verlangten Eigenschaften identisch, und im Falle der Konvergenz dieses Integrals läßt sich eine im Einheitskreise regulär analytische Funktion konstruieren, welche die Bedingungen (1) *erfüllt, ohne identisch zu verschwinden.*

Schließlich zeigt *Ostrowski*, daß das Integral (4) und die Reihe (2) gleichzeitig konvergieren und divergieren.

---

[3]) Vgl. *A. Ostrowski*, Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklung, Acta Math. 53, 1929.

In meiner im September 1954 erschienenen Dissertation „Über das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen" (Druckerei Leemann AG, Zürich) habe ich mir die Aufgabe gestellt, die Carlemanschen Sätze auf allgemeinere Gebiete zu verallgemeinern. Zunächst beschränke ich mich auf ein Gebiet G der $w = u + iv$-Ebene, welches von einer Jordankurve Γ begrenzt wird, den Nullpunkt als Randpunkt hat und folgende Bedingungen erfüllt:

1. G liegt symmetrisch in bezug auf die reelle Achse.
2. Auf jedem Kreise um O mit Radius r $(0 < r \leqq 1)$ liegt genau ein Querschnitt von G, ϑ_r. Die Länge dieses Querschnittes sei $\vartheta(r)$, der Winkel, unter dem er von O aus gesehen wird, $\Theta(r)$.
3. Die Funktion $\Theta(r)$ hat im Intervalle $0 < r \leqq 1$ eine positive untere Schranke Θ_m.
4. $\Theta(r)$ ist in diesem Intervalle von beschränkter Schwankung.

Für das Gebiet G finde ich mit Hilfe konformer Abbildung und der Verzerrungssätze von *Ahlfors*[4]) die Antwort auf die Carlemansche Frage:

Falls die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi \int\limits_{1/a_n}^{1} \frac{dr}{r \cdot \Theta(r)}} \tag{5}$$

divergiert, verschwindet eine in G regulär analytische Funktion F (w), *welche die Ungleichungen* (1) *befriedigt, identisch.*

Konvergiert umgekehrt die Reihe (5), *so existiert eine in G regulär analytische Funktion F* (w), *welche nicht identisch verschwindet und die Bedingungen* (1) *erfüllt.*

Es läßt sich beweisen, daß die Divergenz bzw. Konvergenz der Reihe (5) äquivalent ist mit der Divergenz bzw. Konvergenz des Integrals

$$\int\limits_{r=0}^{1} \log T\left(\frac{1}{r}\right) d e^{-\pi \int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)}} . \tag{6}$$

Ein ähnliches Resultat hat *S. Mandelbrojt* in seinem 1952 erschienenen Buche, „Séries adhérentes, Régularisation des Suites, Applications" (Gauthier-Villars), angegeben, Dieses Buch ist mir jedoch erst nach Abschluß der Bearbeitung meiner Dissertation bekannt geworden.

Im weiteren untersuche ich, wie lange die Lösung des Eindeutigkeitsproblems dieselbe bleibt wie für die Halbebene (und den Einheitskreis),

---

[4]) Vgl. *L. Ahlfors*, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Soc. Sci. Fennicae 1930.

wenn man G von der Halbebene abweichen läßt. Es ergibt sich, daß für ein *Warschawski*-Gebiet[5]) dieselben Carlemanschen Sätze gelten wie für die Halbebene. Aus dem Satze über konforme Abbildung, den *S. Warschawski* in seiner Dissertation[5]) beweist, folgt dies direkt. Ich führe aber den Beweis ganz unabhängig vom Warschawskischen Satze, nur mit Hilfe der Ahlforsschen Verzerrungssätze.

(Eingegangen den 24. September 1954.)

[5]) Vgl. *S. Warschawski*, Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, Math. Z. 35, 1932.