Die akzessorische Irrationalität der Gleichung fünften Grades

von Mario Howald, Basel

Herrn Professor Andreas Speiser zum siebzigsten Geburtstag gewidmet

Einleitung

Bei der Rückführung der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf einparametrige Resolventen treten nach einem Satz von *Kronecker* (Nr. **5**) unvermeidlich akzessorische Irrationalitäten auf. – Der Einblick in die Natur dieser Irrationalitäten ist *R. Brauer* gelungen (siehe: Ausblick). – *Felix Klein* rückt als Resolvente die Ikosaedergleichung in den Vordergrund und gibt in seinen „Vorlesungen über das Ikosaeder" zwei daraus folgende Auflösungsmethoden an. Innerhalb der „zweiten" Methode – sie steht in Beziehung zum ternären Formenproblem des Ikosaeders – tritt als akzessorische Irrationalität $\sqrt{d}$ auf.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Radikanden d auf Grund der Darstellung in dem Lehrbuch von *A. Speiser* [1, p. 250 ff.].

Im Abschnitt I findet sich eine selbständige, kurze Darstellung der *Klein*schen Auflösungstheorie für die allgemeine Gleichung fünften Grades

$$G_5(x) \equiv x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

(die a_i sind – wenn nichts anderes gesagt wird – als Unbestimmte über dem Körper P_0 der rationalen Zahlen aufzufassen, und die Wurzeln α_i von $G_5(x) = 0$ werden als verschieden vorausgesetzt).

Der Abschnitt II enthält die Ergebnisse (§ 1) meiner Untersuchung. Davon sei hier angeführt, daß d für den gewählten Ansatz im allgemeinen ein homogenes Polynom von 1830 Summanden von der Gestalt

$$\alpha_1^j\alpha_2^k\alpha_3^l\alpha_4^m\alpha_5^n \qquad (j, \ldots : \text{ganz}, \geqslant 0)$$

ist. Die überraschend einfache Methode, welche gestattet, das Riesenpolynom mit geringer Mühe zu überblicken, besteht im wesentlichen darin, daß man Symmetrien der Ikosaedergruppe voll ausnützt. Nicht unerwähnt soll bleiben, daß sich diese Methode aus der Bearbeitung von

Spezialfällen (S. 287, 1., 2.) erst allmählich ergab. Nun, da sie gefunden ist, scheint nichts näher zu liegen als gerade sie.

Rückblickend darf ich sagen: Die vorliegende Arbeit, die das Ergebnis einer Anregung durch Herrn Professor Speiser ist, wäre wohl niemals entstanden, wenn nicht zu meinem Vertrauen in das Ikosaeder noch die gütige Anteilnahme Herrn Professor Speisers hinzugekommen wäre. – Ich denke noch heute – nicht ohne Vergnügen – daran, wie Herr Professor Speiser mich einmal ermunterte, auf dem damals noch ungewissen Gebiet weiterzurechnen, indem er kein geringes Vorbild hinstellte: *Euler*.

I. Über die Kleinsche Theorie der allgemeinen Gleichung fünften Grades $G_5(x) = 0$

1. *Felix Klein* (1849 bis 1925) gibt dem *Abel*schen Beweis, „daß es unmöglich ist, die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf eine Reihenfolge reiner Gleichungen zurückzuführen, seine positive Wendung. Die Aufgabe muß sein, die *Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu bewerkstelligen.*" [2, p. 483.] – Die einparametrige Ikosaedergleichung vom 60. Grad

$$\frac{H^3(x)}{1728\, f^5(x)} = X \,, \tag{1}$$

$$H(x) = -x^{20} - 1 + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10} \,,$$

$$f(x) = x(x^{10} + 11x^5 - 1) \,, \qquad X: \text{ ein Parameter}$$

läßt sich „als eine *Normalgleichung sui generis* ansehen, welche sich vermöge ihrer ausgezeichneten Eigenschaften als die nächste Verallgemeinerung der ‚reinen' Gleichungen

$$x^n = X \tag{2}$$

darstellt" (l. c.). Denn die 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung lassen sich durch die bekannten Ikosaedersubstitutionen aus einer beliebigen unter ihnen berechnen, „wie die n Wurzeln von (2) aus einer derselben durch die n Substitutionen $x' = e^{\frac{2\pi i k}{n}} x$" (l. c.).

Ich verzichte – unter Hinweis auf *Kleins* „Ikosaederbuch" [3] und die Darstellung in *Dickson-Bodewig* [4, p. 196 ff.] – darauf, hier die Ikosaedergleichung zu entwickeln. Die Ikosaedersubstitutionen hingegen seien noch näher charakterisiert.

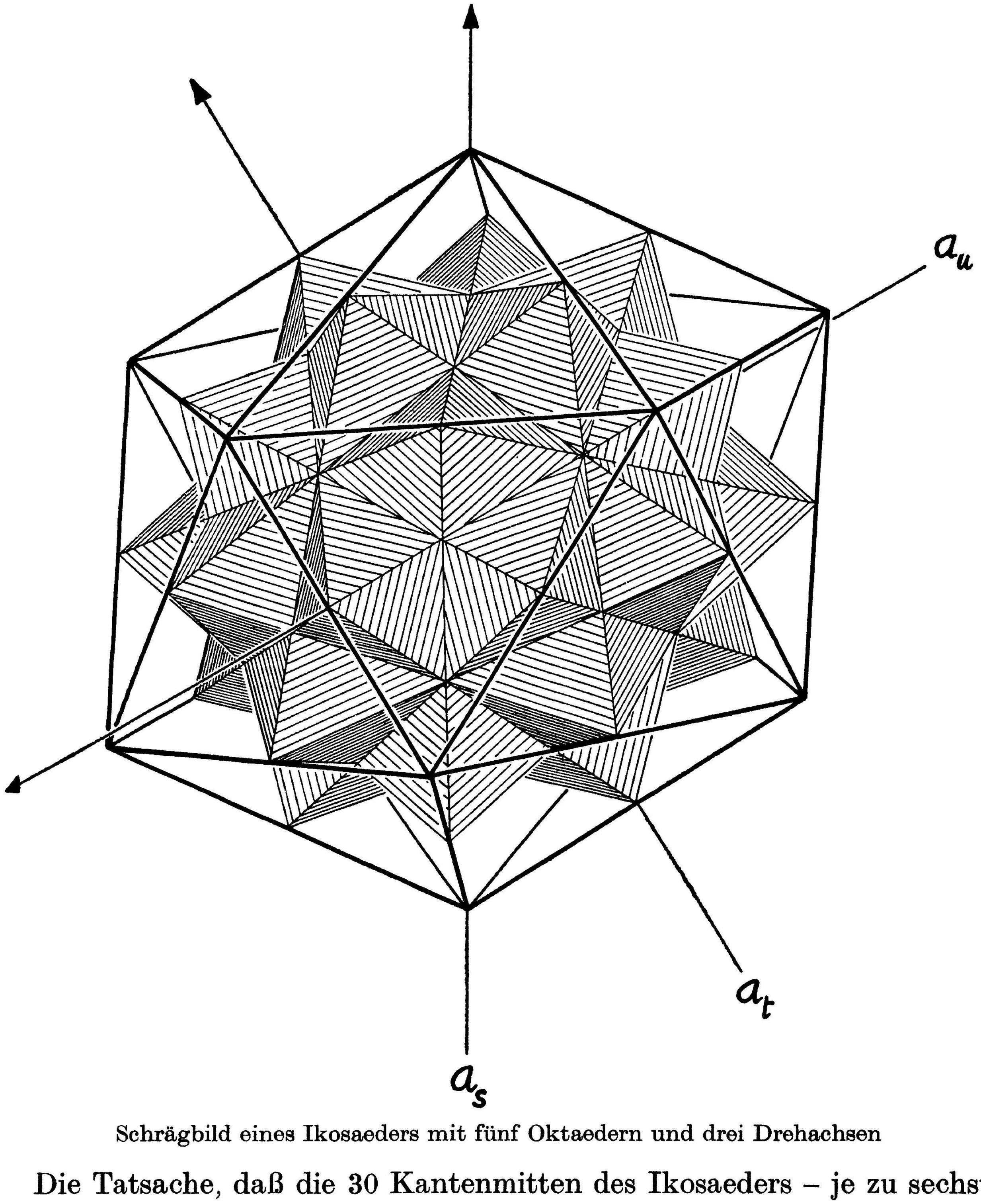
2. Alle automorphen Drehungen des Ikosaeders bilden die Ikosaedergruppe $\mathfrak{G}_i$ von der Ordnung 60. Die Erzeugenden von $\mathfrak{G}_i$ sind:

Drehung S um a_s durch $\frac{2\pi}{5}$ (vgl. Fig.),

Drehung T um a_t durch π.

Nimmt man noch die Drehung $U = S^2 T S^3 T S^2 T$ um a_u durch π hinzu, so läßt sich $\mathfrak{G}_i$ durch das Schema darstellen:

$$S^\mu,\quad S^\mu T S^\nu,\quad S^\mu U,\quad S^\mu T S^\nu U\quad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots, 4)$$ [3, p. 26].



Schrägbild eines Ikosaeders mit fünf Oktaedern und drei Drehachsen

Die Tatsache, daß die 30 Kantenmitten des Ikosaeders – je zu sechst genommen – Ecken von 5 Oktaedern sind, macht folgende Aussage geometrisch anschaulich: die $\mathfrak{G}_i$ ist einstufig isomorph zur alternierenden

Gruppe $\mathfrak{A}_{60}$ von 5 Elementen, und zwar gilt (wenn $1, 2, \ldots, 5$ die Nummern der Elemente sind):

$$S = (12345), \quad T = (12)(34), \quad U = (14)(23) .$$

Den Ikosaederdrehungen lassen sich in bekannter Weise unimodulare, linear-gebrochene Transformationen der *Gaußschen* Ebene zuordnen.

Die Erzeugenden der nicht-homogenen Substitutionsgruppe $\mathfrak{G}_{60}^{(1)}$ sind:

$$S: \; z' = \varepsilon z, \; (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}) \; ; \quad T: \; z' = \frac{-\frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\sqrt{5}} z + \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt{5}}}{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt{5}} z + \frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\sqrt{5}}} \; ;$$

$$U: \; z' = -\frac{1}{z} .$$

Schreibt man die vorigen Substitutionen homogen, so sind die Erzeugenden der homogenen Substitutionsgruppe $\mathfrak{G}_{120}^{(2)}$:

$$S: \begin{array}{l} z_1' = \pm \varepsilon^3 z_1 \\ z_2' = \pm \varepsilon^2 z_2 \end{array} \qquad T: \begin{array}{l} \sqrt{5}\, z_1' = \mp (\varepsilon - \varepsilon^4) z_1 \pm (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z_2 \\ \sqrt{5}\, z_2' = \pm (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z_1 \pm (\varepsilon - \varepsilon^4) z_2 \end{array}$$

$$U: \begin{array}{l} z_1' = \mp z_2 \\ z_2' = \pm z_1 \end{array} \quad .$$

3. Für die weitere Betrachtung ist erforderlich, von den beiden Auflösungsmethoden für $G_5(x) = 0$, die *Felix Klein* vorschlägt, die „zweite" zu skizzieren [3, p. 239 ff.]; sie geht in drei Schritten vor:

1. a) Man konstruiert aus den Wurzeln α_i von $G_5(x) = 0$ eine „Wurzel" $x(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ der Ikosaedergleichung; das heißt eine Größe, die sich nach $\mathfrak{G}_{60}^{(1)}$ substituiert (wenn α_i den Permutationen von $\mathfrak{A}_{60}$ unterworfen werden).

   b) Durch Einsetzung dieser „Wurzel" in (1) wird der Parameter X als Funktion der Koeffizienten a_i und der $\sqrt{D} = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)$ von $G_5(x) = 0$ berechnet; so gewinnt man die Ikosaedergleichung als Resolvente für $G_5(x) = 0$.

2. Man berechnet eine Wurzel x (die „Ikosaederirrationalität") der so erhaltenen speziellen Ikosaedergleichung. Dieser – transzendente – Teil der Lösung gelingt mit Hilfe hypergeometrischer Reihen („wie die transzendente Auflösung der Gleichung $x^n = X$ durch die binomische Reihe" [2, p. 483]); man vergleiche hierzu [3, p. 62 ff.,

81]. – Dieser Teil kann auch mit Hilfe der elliptischen Funktionen bewältigt werden [3, p. 126 ff., 131].

3. Aus der gewonnenen Ikosaederirrationalität werden rückwärts die α_i bestimmt [3, p. 248 ff.]. Dieser dritte Teil ist – wie der erste – algebraischer Natur.

Im weiteren wird uns nur der Teilschritt 1a beschäftigen.

4. Man adjungiere $\sqrt{D}$ zu $P_0(a_1, \ldots, a_5)$. In bezug auf

$$P_0(a_1, \ldots, a_5, \sqrt{D})$$

wird die Galoische Gruppe von $G_5(x) = 0$ die Gruppe $\mathfrak{A}_{60}$. $\sqrt{D}$ ist eine natürliche Irrationalität für $G_5(x) = 0$, da sie ein Polynom in den α_i ist, dessen Wert aber nicht in $P_0(a_1, \ldots, a_5)$ liegt.

Es soll nun nach 1a) $x(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ konstruiert werden. Hierzu benutzt *Felix Klein* die Tatsache, daß $\mathfrak{G}_i$ sich als ternäre Substitutionsgruppe $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$ von der Ordnung 60 darstellen läßt. Die Erzeugenden S, T, U von $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$ kann man [1, p. 254] mit Hilfe der quadratischen Form

$$f_1(z_1, z_2) = A_1 z_1^2 + 2A_0 z_1 z_2 - A_2 z_2^2 \tag{3}$$

finden, indem man auf z_1, z_2 die Substitutionen S, T, U von $\mathfrak{G}_{120}^{(2)}$ ausübt. Es gehe durch eine solche Substitution f_1 über in

$$f_1'(z_1, z_2) = A_1' z_1^2 + 2A_0' z_1 z_2 - A_2' z_2^2 \,.$$

Die Rechnung ergibt:

$$S: \left\{ \begin{aligned} A_0' &= A_0 \\ A_1' &= \varepsilon \cdot A_1 \\ A_2' &= \varepsilon^4 \cdot A_2 \end{aligned} \right. \qquad T: \left\{ \begin{aligned} A_0' &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,(A_0 + A_1 + A_2) \\ A_1' &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) A_1 + (\varepsilon^4 + \varepsilon) A_2) \\ A_2' &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2A_0 + (\varepsilon^4 + \varepsilon) A_1 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3) A_2) \end{aligned} \right.$$

$$U: \left\{ \begin{aligned} A_0' &= -A_0 \\ A_1' &= -A_2 \,. \\ A_2' &= -A_1 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Die Determinante $d = A_0^2 + A_1 A_2$ von $f_1(z_1, z_2)$ bildet mit drei weiteren Invarianten [3, p. 215, 218] das volle Invariantensystem der $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$. Das ternäre Formenproblem lautet: aus beliebigen (aber mit einer

Syzygie verträglichen) Werten der vier erwähnten Invarianten, die 60 zugehörigen Wertsysteme der A_0, A_1, A_2 zu bestimmen [3, p. 219]. Aus $f_1 = 0$ folgt:

$$x = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-A_0 \pm \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}}{A_1} .$$

x substituiert sich nach $\mathfrak{G}_{60}^{(1)}$, wenn A_0, A_1, A_2 die Gruppe $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$ erfahren [1, p. 255]. Nun bleibt nur noch der letzte Schritt zu tun: A_0, A_1, A_2 als Funktionen der α_i so zu konstruieren, daß sie $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$ erfahren, wenn die α_i die Permutationen von $\mathfrak{A}_{60}$ erleiden. Dies gelingt [1, p. 253. 254]; das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}\, A_0 &= \sqrt{5}\, u_\infty + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
\sqrt{5}\, A_1 &= \quad 2(u_0 + \varepsilon\, u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \varepsilon^4 u_4) \\
\sqrt{5}\, A_2 &= \quad 2(u_0 + \varepsilon^4 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \varepsilon^2 u_3 + \varepsilon\, u_4)
\end{aligned} \tag{5}$$

(die Numerierung der u_μ $(\mu = 1, \ldots, 4)$ ist entgegengesetzt zu der in [1]).

Dabei haben die Symbole u_∞, u_μ $(\mu = 0, 1, \ldots, 4)$ folgende Bedeutung:

$$u_\infty = w_1 - w_2 \,, \qquad u_\mu = w_{2\mu+3} - w_{2\mu+4} \qquad (\mu = 0, \ldots, 4) \,. \tag{6}$$

Hierin bedeutet w_1 eine beliebige über $P_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ rationale Funktion der α_i, die zu der durch S erzeugten Untergruppe $\mathfrak{Z}_5$ von $\mathfrak{A}_{60}$ gehört; die w_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, 12)$ gehen aus w_1 hervor durch die Anwendung von

$$E, U, T, UT, TS, UTS, \ldots, TS^4, UTS^4 \,,$$

welche Repräsentanten der 12 rechtseitigen Nebenklassen nach $\mathfrak{Z}_5$ in $\mathfrak{A}_{60}$ sind; genauer gesagt:

$$\begin{gathered}
E: w_1, \qquad U: w_1 \to w_2 \,, \\
TS^\mu: w_1 \to w_{2\mu+3} \,, \qquad UTS^\mu: w_1 \to w_{2\mu+4} \\
(\mu = 0, 1, \ldots, 4) \,.
\end{gathered} \tag{7}$$

5. Man beachte:

1. Zur Konstruktion der A_0, A_1, A_2 ist die numerische Irrationalität $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ erforderlich.
2. Zur Konstruktion von $x(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ ist zudem die Irrationalität $\sqrt{d} = \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}$ nötig.

Beide Irrationalitäten sind der $G_5(x) = 0$ akzessorisch: sie liegen nicht in $P_0(a_1, \ldots, a_5, \sqrt{D})$ und sind nicht ganze rationale Funktionen der Wurzeln α_i von $G_5(x) = 0$.

Die numerische Irrationalität ε erhält weiter keine Beachtung; man denkt sie sich zum Grundkörper von Anfang an adjungiert.

Interessanter ist $\sqrt{d}$. Von dieser akzessorischen Irrationalität sagt der von *Leopold Kronecker* (1823 bis 1891) im Jahr 1861 aufgestellte und von *Felix Klein* 1877 (zur Geschichte: [2, p. 503]) bewiesene Satz: sie ist unumgänglich, da die erreichte Resolvente (die Ikosaedergleichung) einparametrig ist. Die *Kronecker*sche Formulierung des Satzes [5, p. 612]:

„Aber erst vor kurzem ist es mir gelungen, die Hauptfrage zu erledigen und festzustellen, daß die Reduktion der algebraischen Funktion: W auf Funktionen *einer* Variablen und deshalb überhaupt die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades mit Hilfe von algebraischen Funktionen *einer* Variablen unmöglich ist, wenn dabei jener oben angeführte und für die Auflösung der Gleichungen durch Wurzelzeichen geltende Satz *Abels* bestehen bleiben soll.“ Der erwähnte Satz von *Abel* ist in der *Kronecker*schen Mitteilung folgendermaßen wiedergegeben [5, p. 609]: „Wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, so kann man der Wurzel allezeit eine solche Form geben, daß sich alle algebraischen Funktionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, durch rationale Funktionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen.“

Nun gehe ich zu der eigentlichen Aufgabe über: d für eine bestimmte Wahl von $w_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ explizit darzustellen. Aus dem Bisherigen wird ersichtlich, daß d in $P_0(a_1, \ldots, a_5, \sqrt{D}, \varepsilon)$ liegt. Es wird sich zeigen (Nr. 7), daß d in $P_0(a_1, \ldots, a_5, \sqrt{D}, \sqrt{5})$ enthalten ist.

II. Berechnung der akzessorischen Irrationalität $\sqrt{d}$ im Fall $w_1 = \Sigma \alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r \alpha_4^s \alpha_5^t$.

§ 1. Vorblick und Ergebnisse

6. Im ersten Abschnitt hat sich als Determinante einer quadratischen Form (3) ergeben:

$$d = A_0^2 + A_1 A_2 .$$

Diese bleibt ungeändert, wenn A_0, A_1, A_2 die ternären Ikosaedersubstitutionen (4) erfahren. Mit Hilfe der Formeln (5), (6), (7) konstruiert man $d(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ aus den fünf Wurzeln α_i $(i = 1, \ldots, 5)$ von $G_5(x) = 0$ so, daß $d(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ ungeändert bleibt, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_{60}$ von 5 Elementen unterworfen werden.

Die ersten beiden Schritte (§ 2), um Genaueres über die Gestalt von $d(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ zu ermitteln, sind: Darstellung von d mit Hilfe

1. der $u_\infty, u_\mu \quad (\mu = 0, 1, \ldots, 4) : d(u)$,
2. der $w_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 12) : d(w)$.

Betrachtet man die Substitutionen der w_ν und der u_∞, u_μ unter den Erzeugenden von $\mathfrak{A}_{60}$:

$$S = (12345) , \qquad T = (12)(34) , \qquad U = (14)(23) ,$$

so ergibt sich:

1. $5d(u) = 5U_1 + 2\sqrt{5}\, U_2$,
2. $5d(w) = 5(W_1 - 2W_2) + 2\sqrt{5}\,(W_3 - W_4)$,

wo U_1, U_2, W_1, W_2, W_3, W_4 *einzeln* invariant sind gegen $\mathfrak{A}_{60}$.

Um weiter zu dringen (§ 3), wähle ich

$$w_1 = \Sigma\, \alpha_1^p\, \alpha_2^q\, \alpha_3^r\, \alpha_4^s\, \alpha_5^t \qquad (p, \ldots, t\colon\ \text{ganz},\ \geqslant 0) ,$$

wobei die Summe über die 5 Glieder zu erstrecken ist, die aus dem hingeschriebenen durch Anwendung von S^μ $(\mu = 0, 1, \ldots, 4)$ hervorgehen. Auf Grund der Unterinvarianten W gewinnt man leicht einen Überblick (Nr. **11**) über die nunmehr vorliegenden Verhältnisse. Es ergeben sich vier Fälle ($d(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ sei wie $d(u)$ in zwei Teile zerlegt):

1. p, q, r, s, t alle voneinander verschieden; d zerfällt in
   15 verschiedene symmetrische Polynome (450 Glieder),
   23 verschiedene alternierende Polynome (1380 Glieder),
   deren Grad $2(p + q + r + s + t)$ ist;

2. p, q, r verschieden, $s = t$; d zerfällt in
   15 verschiedene symmetrische Polynome (Gesamtzahl: $10 + 2\cdot 5 = 20$; Gliederzahl: $540 + 2\cdot 180 = 900$)
   10 verschiedene (paarweise verwandte, Nr. **11**, b) alternierende Polynome ($10\cdot 60 = 600$ Glieder),
   insgesamt: 30 Polynome (1500 Glieder);

3. p; $q = r$, $s = t$; d zerfällt in
   8 verschiedene symmetrische Polynome (Gesamtzahl: $2\cdot 7 + 1 = 15$; $2\cdot 175 + 120 = 470$ Glieder),
   2 verschiedene (verwandte) alternierende Polynome (Gesamtzahl: 3; $3\cdot 60 = 180$ Glieder),
   insgesamt: 18 Polynome (650 Glieder);

4. $p \neq q$, $r = s = t$; d zerfällt in
   5 verschiedene symmetrische Polynome, insgesamt: $2 \cdot 5 = 10$ symmetrische Polynome (300 Glieder).

Schließlich (§ 4) führe ich die Rechnung für

1. $p = 2, \quad q = 1, \quad r = s = t = 0$
2. $p = 3, \quad q = 2, \quad r = 1, \quad s = t = 0$

bis zur Darstellung von d mit Hilfe der Koeffizienten a_i von $G_5(x) = 0$. Die Ergebnisse sind beziehungsweise:

$$1. \quad 5d = (5 - 2\sqrt{5})(-8a_1^3a_3 + 3a_1^2a_2^2 - 16a_1^2a_4 + 38a_1a_2a_3 - 12a_2^3 + 40a_2a_4 - 45a_3^2); \tag{8}$$

$$2. \quad 5d = 5\cdot(2a_2^4a_4 - 2a_2^3a_3^2 - 10a_2^2a_3a_5 - 8a_2^2a_4^2 + 20a_2a_3^2a_4 - 9a_3^4) + 2\sqrt{5}\cdot(a_2^4a_4 + a_2^3a_3^2 + 5a_2^2a_3a_5 - 4a_2^2a_4^2 - 14a_2a_3^2a_4 + 9a_3^4) \tag{9}$$

(hier wurde die Gleichung in der Gestalt $x^5 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$ angenommen).

Für beide Fälle werden numerische Beispiele angeführt (die auch zu Kontrollzwecken verwendet wurden):

zu 1):

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$$
$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -2, \quad \alpha_5 = 3$$
$$5d = (5 - 2\sqrt{5})\cdot 2464 \;;$$

zu 2):

a) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -2, \quad \alpha_5 = 0$

$d = 360\cdot(5 + \sqrt{5})$;

b) $x^5 - 23x^3 + 6x^2 + 112x - 96 = 0$

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = -3, \quad \alpha_4 = 4, \quad \alpha_5 = -4$

$5d = 5\cdot 11654856 + 2\sqrt{5}\cdot 4147524$.

An Hand dieser numerischen Beispiele sieht man leicht, daß $\sqrt{d}$ im allgemeinen irrational ist über $P_0(a_1, \ldots, a_5, \sqrt{D}, \sqrt{5})$. Da a_i und $\sqrt{D}$ in diesen Fällen rational sind, muß nur nachgewiesen werden, daß $\sqrt{d}$ irrational ist über $P_0(\sqrt{5})$. Dies ist getan, wenn feststeht, daß d nicht das Quadrat einer Zahl r aus $P_0(\sqrt{5})$ ist. Zum Beispiel:

$$d = 36\cdot(50 + 10\sqrt{5}) \;;$$

wäre $d = r^2$, so müßte die Norm von $50 + 10\sqrt{5}$

$$(50 + 10\sqrt{5})(50 - 10\sqrt{5}) = 2000$$

eine Quadratzahl sein; dies ist aber nicht so.

§ 2. Darstellung von d als Polynom in den u_∞, u_μ einerseits und den w_ν andrerseits.

7. Setzt man in $d = A_0^2 + A_1 A_2$ für A_0, A_1, A_2, die Ausdrücke (5) ein, so folgt nach kurzer Rechnung:

$$5d(u) = 5U_1 + 2\sqrt{5}\,U_2 \;, \tag{10}$$

wo

$$\begin{aligned} U_1 &= u_\infty^2 + u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \\ U_2 &= U_{21} + U_{22} - U_{23} \\ U_{21} &= u_\infty(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \\ U_{22} &= u_0u_1 + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + u_4u_0 \\ U_{23} &= u_0u_2 + u_1u_3 + u_2u_4 + u_3u_0 + u_4u_1 \;. \end{aligned} \tag{11}$$

Diese Gliederung berücksichtigt das Verhalten der u_∞, u_μ gegenüber S, T, U. Zur Begründung seien zunächst (in Zyklenschreibweise) die Substitutionen der w_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, 12)$ angegeben. Ich setze

$$w_1 = \sum_{\mu=0}^{4} \varphi_\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \;. \tag{12}$$

Dabei bedeutet $\varphi_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ irgendeine (nicht zyklische) über P_0 rationale Funktion der α_i, aus der $\varphi_\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ durch die Operationen S^μ $(\mu = 0, 1, \ldots, 4)$ hervorgehen. Aus w_1 mögen nach (7) die w_ν gebildet sein. Unter der *Voraussetzung*, daß in φ_0 die Anordnung der Variablen-Indizes sich in die natürliche Ordnung $1, 2, 3, 4, 5$ höchstens unter Umkehrung des Durchlaufungssinnes einordnen läßt, ergibt sich folgendes Verhalten der w_ν gegenüber S, T, U:

1. Anwendung von $S = (1\,2\,3\,4\,5)$:
   (w_1) definitionsgemäß
   (w_2) da $U = (14)(23)$ in der Anordnung $1, 2, 3, 4, 5$ lediglich den Durchlaufungssinn ändert (Figur)
   $(w_3 w_5 w_7 w_9 w_{11})$
   $(w_4 w_6 w_8 w_{10} w_{12})$ definitionsgemäß.

2. Anwendung von $T = (12)(34)$:
   $(w_1 w_3)$ $(w_2 w_4)$ definitionsgemäß

$(w_5 w_{11})$ da $S(TS)T = TS^4$

$(w_6 w_{12})$ $S^4(UTS)T = UTS^4$ (mit Hilfe der geometrisch evidenten Beziehung $US^4 = SU$ auf Voriges zurückführbar)

$(w_7 w_8)$ $S^3(TS^2)T = UTS^2$

$(w_9 w_{10})$ $S^2(TS^3)T = UTS^3$.

3. Anwendung von $U = (14)(23)$:

$(w_1 w_2)$ definitionsgemäß

$(w_3 w_4)$ da $TU = UT$ (Ikosaeder!)

$(w_5 w_{12})$ $(TS)U = UTS^4$

$(w_6 w_{11})$ $(UTS)U = TS^4$

$(w_7 w_{10})$ $(TS^2)U = UTS^3$

$(w_8 w_9)$ $(UTS^2)U = TS^3$.

Aus diesen Permutationen ergibt sich wegen (6) weiterhin:

S: $(u_\infty)(u_0 u_1 u_2 u_3 u_4)$

T: $(u_\infty u_0)(u_1 u_4)(u_2 - u_2)(u_3 - u_3)$

U: $(u_\infty - u_\infty)(u_0 - u_0)(u_1 - u_4)(u_2 - u_3)$.

Damit wird ersichtlich:

$U_1, U_{21}, U_{22}, U_{23}$ sind einzeln invariant gegenüber S und U ,

U_1, U_2 sind je invariant gegenüber T.

Man beachte noch, daß (11) zyklisch geschrieben ist; dieses Prinzip wird im folgenden ausgiebig verwendet.

8. In (11) werden nun für u_∞, u_μ die Binome (6) eingesetzt. Das Ergebnis der einfachen Ausrechnung schreibe ich abgekürzt, indem ich von einem Zyklus nur den Anführer hinschreibe. Zudem stehen in eckiger Klammer Elemente (Zyklen), welche durch die Permutation U ineinander übergeführt werden. So ergibt sich:

$$U_1 = W_1 - 2W_2$$

$$W_1 = [w_1^2 + w_2^2] + [w_3^2 + \cdots + w_4^2 + \cdots] \qquad \text{(12 Glieder)}$$

$$W_2 = [w_1 w_2] + [w_3 w_4 + \cdots] \qquad \text{(6 Glieder)}$$

$$U_2 = W_3 - W_4$$

$$W_3 = [w_1 w_3 + \cdots + w_2 w_4 + \cdots] + [w_3 w_5 + \cdots + w_4 w_6 + \cdots] + [w_3 w_8 + \cdots] + [w_4 w_7 + \cdots] \qquad \text{(30 Glieder)}$$

$$W_4 = [w_1 w_4 + \cdots + w_2 w_3 + \cdots] + [w_3 w_6 + \cdots] + [w_4 w_5 + \cdots] + [w_3 w_7 + \cdots + w_4 w_8 + \cdots] \qquad \text{(30 Glieder);}$$

$$5d = 5(W_1 - 2W_2) + 2\sqrt{5}\,(W_3 - W_4)\ . \tag{13}$$

Da U_1 und U_2 je invariant sind gegen $\mathfrak{A}_{60}$, folgt: W_μ ($\mu = 1, \ldots, 4$) ist invariant gegen $\mathfrak{A}_{60}$. Daß W_μ, als Polynom in den w_ν, keine Unterinvariante bezüglich $\mathfrak{A}_{60}$ enthält, ist leicht festzustellen: man übe auf die Elemente der ersten eckigen Klammer (des ersten Zyklus) die Substitution T aus; dadurch wird in jeder der übrigen Klammern ein Element erreicht.

§ 3. Darstellung von d als Polynom in den α_i für den Fall $\varphi_0 = \alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r \alpha_4^s \alpha_5^t$.

9. Von nun an ist

$$\varphi_0 = \alpha_1^p\, \alpha_2^q\, \alpha_3^r\, \alpha_4^s\, \alpha_5^t \qquad (p, q, \ldots, t\colon \text{ ganz } \geqslant 0)\ ,$$

wo α_i die fünf *verschiedenen* Wurzeln von $G_5(x) = 0$ sind. Höchstens drei der Exponenten $p, q, \ldots, t$ dürfen einander gleich sein, da sonst $d \equiv 0$ ist; aus demselben Grund soll $p = q$, $r = s = t$ ausgeschlossen bleiben. Zur *Abkürzung* soll im folgenden gelten:

$$(j, k, l, m, n) \equiv \alpha_1^j\, \alpha_2^k\, \alpha_3^l\, \alpha_4^m\, \alpha_5^n\ .$$

Damit wird

$$w_1 = \Sigma\,(p, q, r, s, t)\ , \tag{14}$$

wo über alle aus (p, q, r, s, t) durch wiederholte Anwendung von $S = (tsrqp)$ hervorgehenden verschiedenen Glieder zu summieren ist. Bildet man nun d auf Grund dieser Wahl von w_1, so ergibt sich ein homogenes Polynom vom Grad $2(p + q + r + s + t)$. Aus (13) schließt man: d zerfällt in mindestens vier alternierende Polynome. Es wird sich zeigen, daß die Unterinvarianten W_μ als Polynome *in den* α_i noch weiter zerfallen. Die Methode, nach der ich zur endgültigen Gliederung von $d(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ verfahre, sei gleich erläutert.

In W_μ komme das Glied (j, k, l, m, n) vor. Wegen der Invarianz von W_μ gegen $\mathfrak{A}_{60}$ müssen mit diesem Glied alle 60 durch Anwendung von $\mathfrak{A}_{60}$ daraus hervorgehenden Glieder auch in W_μ vorkommen. In bezug auf diese 60 Glieder müssen folgende Fälle unterschieden werden:

1) j, k, l, m, n sind alle voneinander verschieden: die 60 Glieder sind alle voneinander verschieden und bilden in ihrer Gesamtheit die zu (j, k, l, m, n) gehörenden „geraden" Anordnungen, deren Summe ein alternierendes Polynom $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ ist. – Durch Anwendung irgendeiner ungeraden Permutation (zum Beispiel einer Transposition) gehe A über in das Polynom A', welches die Summe der zu (j, k, l, m, n) gehörenden „ungeraden" Anordnungen ist. – Als alternierendes Polynom

ist A darstellbar in der Form

$$A = \tfrac{1}{2}(S_1 + S_2\sqrt{D}) \ ,$$

wo S_1, S_2 symmetrische Polynome in den α_i sind ($S_1 = A + A'$, $S_2\sqrt{D} = A - A'$) [6, p. 170].

2) j, k, l verschieden, $m = n$: die „geraden" und „ungeraden" Anordnungen sind nicht mehr unterscheidbar; die 60 Glieder bilden die Gesamtheit der nun noch möglichen $\frac{5!}{2!}$ verschiedenen Anordnungen, deren Summe ein symmetrisches Polynom ist.

3) Die Fälle

$$\begin{aligned} &j \neq k = l, m = n \\ &j \neq k, l = m = n \\ &j = k, l = m = n \\ &j, k = l = m = n \end{aligned}$$

liefern ebenfalls symmetrische Polynome, deren Gliederzahlen allerdings kleiner als 60 sind: 30, 20, 10, 5.

10. Ich wende dies nun der Reihe nach auf W_μ ($\mu = 1, \ldots, 4$) an. Da W_μ als Polynom in den w_ν keine Unterinvariante bezüglich $\mathfrak{A}_{60}$ enthält, kann alles aus seinem ersten Glied erschlossen werden:

1) $$\begin{aligned} W_1 &= w_1^2 + \cdots \\ &= (2p, 2q, 2r, 2s, 2t) + 2[(p+t, q+p, r+q, s+r, t+s) \\ &\quad + (p+s, q+t, r+p, s+q, t+r)] + \cdots \ . \end{aligned}$$

Aus den drei hingeschriebenen Gliedern von w_1^2 entsteht das *ganze* Polynom W_1 durch Anwendung von $\mathfrak{A}_{60}$. Denn es ergibt sich auf Grund von Nr. **9**, 1): W_1 hat mindestens 180 Summanden. Daß W_1 nicht mehr als 180 solcher Summanden enthalten kann, ist klar: W_1 hat 12 Glieder von der Form w_ν^2, von denen jedes 15 Summanden liefert (vgl. Nr. 8). W_1 wird also durch drei alternierende Polynome zu je 60 Gliedern gebildet.

2) $W_2 = w_1 w_2 + \cdots = \Sigma(p, q, r, s, t) \cdot \Sigma(s, r, q, p, t) + \cdots$
(Die Bedeutung von Σ ist aus einem Vergleich mit (14) ersichtlich.)

Man multipliziere den ν-ten Summanden der ersten Summe mit dem ν-ten Summanden der zweiten Summe ($\nu = 1, 2, \ldots, 5$). Aus den so erhaltenen fünf Produktgliedern schließt man mit Hilfe von Nr. **9**, 3) ähnlich wie bei W_1, daß W_2 aus fünf symmetrischen Polynomen zu je 30 Summanden besteht.

3) $W_3 = w_1 w_3 + \cdots = \Sigma(p, q, r, s, t) \cdot \Sigma(q, p, s, r, t) + \cdots$.

Man multipliziere zuerst wie bei W_2, sodann – um Glieder aus *verschiedenen* alternierenden Polynomen zu erhalten – den ν-ten Summanden der ersten Summe mit dem μ-ten Summanden der zweiten Summe ($\nu = 1, 2, \ldots, 5$; $\mu = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, 5$). Dieses Vorgehen hat seinen Grund darin, daß infolge von $T = (12)(34)$ Produktglieder wie $(p, q, r, s, t) \cdot (p, t, r, q, s)$ und $(t, p, q, r, s) \cdot (q, p, s, r, t)$ bei der Multiplikation auftreten; nach Nr. **11** a) gehören sie aber zum selben alternierenden Polynom. – Hat man die Multiplikation in der angegebenen Art ausgeführt, so sieht man leicht: W_3 besteht aus fünf symmetrischen Polynomen zu je 30 Summanden und aus 10 alternierenden Polynomen zu je 60 Summanden.

4) $W_4 = w_1 w_4 + \cdots = \Sigma(p, q, r, s, t) \cdot \Sigma(r, s, p, q, t) + \cdots$.

Man verfahre wie bei W_3 (hier wegen $UT = (13)(24)$). Ergebnis: W_4 zerfällt wie W_3 und hat genau 750 Summanden.

11. Die explizite Darstellung von d für die vier in Nr. **6** erwähnten Fälle ergibt sich nun ohne weiteres auf Grund der in Nr. **10** skizzierten allgemeinen Gestalt von d. Bei der Durchführung sind folgende Bemerkungen nützlich: Sei $S(j, k, l, m, n)$ (bzw. $A(j, k, l, m, n)$) das symmetrische (bzw. alternierende) Polynom $\Sigma\, \alpha_1^j \alpha_2^k \alpha_3^l \alpha_4^m \alpha_5^n$, wo über alle verschiedenen Glieder zu summieren ist, die aus dem ersten durch Anwendung von $\mathfrak{S}_{120}$ (bzw. $\mathfrak{A}_{60}$) hervorgehen. Dann gilt:

a) $A(j, k, l, m, n) = A(k, j, m, l, n)$, da die Anordnungen der Exponenten durch gerade Permutationen auseinander hervorgehen;

b) $A(j, k, l, m, n) \neq A(k, j, l, m, n)$, da die Anordnungen der Exponenten durch ungerade Permutationen auseinander hervorgehen; ich nenne solche alternierende Polynome *verwandt* (im folgenden sind solche in eckigen Klammern zusammengefaßt);

c) $[A(j, k, l, m, n) + A(k, j, l, m, n)] = S(j, k, l, m, n)$,
$[A(j, k, l, m, n) - A(k, j, l, m, n)] = \sigma \cdot \sqrt{D}$
(σ: symmetrisches Polynom).

Da im folgenden lediglich die Fälle 2 und 4 von Nr. **6** weiter bearbeitet werden sollen, beschränke ich mich auf deren explizite Darstellung. Dabei ist d in der Gestalt (10) zugrunde gelegt.

1) p, q, r verschieden, $s = t$:

$$\begin{aligned}U_1 = {} & 2(S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - S_5) + S(2p, 2q, 2r, 2s, 2s) \\ & - 2S(p+r, p+r, 2q, 2s, 2s) + 2A(p+s, p+q, q+r, r+s, 2s)\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_2 = {} & S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 + S(p+q, p+q, 2r, 2s, 2s) \\ & + S(2p, q+r, q+r, 2s, 2s) + S(2p, q+s, q+s, 2r, 2s) \\ & + S(p+r, p+s, 2q, r+s, 2s) - 2S(p+r, p+r, q+s, q+s, 2s) \\ & - S(2p, 2q, r+s, r+s, 2s) - S(p+s, p+s, 2q, 2r, 2s) \\ & - S(p+q, p+r, q+r, 2s, 2s) \\ & + [A(p+s, q+r, p+r, 2s, q+s) - \ldots] \\ & + [A(2s, p+r, p+q, r+s, q+s) - \ldots] \\ & + [A(2s, r+s, 2p, q+s, q+r) - \ldots] \\ & + [A(2r, q+s, 2s, p+s, p+q) - \ldots] \\ & - A(p+q, q+r, r+s, p+s, 2s)\ ;\end{aligned}$$

hierin ist zu setzen:

$$\begin{aligned}S_1 &= S(p+r, p+s, q+s, q+s, r+s) \\ S_2 &= S(p+s, p+s, q+s, q+s, 2r) \\ S_3 &= S(2p, q+s, q+s, r+s, r+s) \\ S_4 &= S(p+s, p+s, q+r, q+r, 2s) \\ S_5 &= S(p+q, p+q, r+s, r+s, 2s)\,.\end{aligned}$$

2) $p \neq q$, $r = s = t$:

Im vorigen ist r für s zu setzen; nun treten keine alternierenden Polynome mehr auf:

$$\begin{aligned}U_1 = -U_2 = {} & 3S(2p, 2q, 2r, 2r, 2r) \\ & + 2\cdot[S(p+q, p+r, q+r, 2r, 2r) \\ & \quad - S(p+r, p+r, 2q, 2r, 2r) - S(2p, q+r, q+r, 2r, 2r) \\ & \quad - 3S(p+q, p+q, 2r, 2r, 2r)]\,.\end{aligned}$$

§ 4. Darstellung von d mit Hilfe der Koeffizienten a_i von $G_5(x) = 0$ für $\varphi_0 = \alpha_1^2\alpha_2$, $\varphi_0 = \alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3$. Numerische Beispiele.

12. Zunächst sei in Nr. **11**, 2) gesetzt:

$$p = 2, \quad q = 1, \quad r = s = t = 0\,.$$

Es ergibt sich:

$$U_1 = -U_2 = 3S(4,2) + 2S(3,2,1) - 2S(4,1,1) - 6S(3,3) - 6S(2,2,2)\ ;$$

Gliederzahlen: je 130 für U_1 und U_2.

Mit Hilfe der Tabellen von Faà di Bruno [7, p. 312] werden U_1, U_2 als Polynome in den a_i ausgerechnet. Das Ergebnis ist in (8) zu finden.

Ein numerisches Beispiel:

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$$

hat als Wurzeln

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -2, \quad \alpha_5 = 3 .$$

Nun wird d auf zwei Wegen ausgerechnet:

1) aus $d(u)$; (10), (6), (14), (7):

$$\begin{aligned} &u_\infty = 14 + 10 , && u_0 = 10 - 16 , && u_1 = -13 - 7 , \\ &u_2 = 4 - 2 , && u_3 = -7 - 31 , && u_4 = 19 - 17 ; \\ &U_1 = -U_2 = 2464 ; \end{aligned}$$

2) aus $d(a)$; (8):

$$U_1 = -U_2 = 2464 .$$

13. Zu einem anderen Beispiel setze man in Nr. **11**, 1)

$$p = 3 , \quad q = 2 , \quad r = 1 , \quad s = t = 0 .$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned} U_1 = {} & 2(S_1 + S_2 - 3S_3 - S_4 - 6S_5 - S_6) + S(6, 4, 2) - 6S(4, 4, 4) ; \\ U_2 = {} & S_1 - S_2 - 3S_3 - S_4 + 6S_5 + S_6 - S(6, 4, 1, 1) \\ & + S(6, 3, 3) + 3S(6, 2, 2, 2) + S(5, 5, 2) - S(5, 4, 3) \\ & + 2S(4, 4, 3, 1) - 2S(4, 4, 2, 2) - S(4, 3, 3, 2) \\ & + [A(5, 4, 2, 1, 0) - \ldots] + [A(6, 3, 2, 1, 0) - \ldots] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &S_1 = S(4, 3, 2, 2, 1) , && S_2 = S(5, 3, 3, 1) , && S_3 = S(3, 3, 2, 2, 2) , \\ &S_4 = S(6, 2, 2, 1, 1) , && S_5 = S(3, 3, 3, 3) , && S_6 = S(5, 5, 1, 1) . \end{aligned}$$

Für den alternierenden Teil A in U_2 muß wegen Nr. **11**, c) gelten: $A = \sigma \cdot \sqrt{D}$. Da $\sqrt{D}$ in den α_i den Grad 10 und A den Grad 12 haben, folgt:

$$\sigma = a \cdot S(2, 0, 0, 0, 0) + b \cdot S(1, 1, 0, 0, 0) , \qquad (a, b \ \text{ganz}) .$$

Zur Bestimmung der beiden Konstanten a, b ist erforderlich, daß die ausmultiplizierte Gestalt von $\sqrt{D}$ bekannt sei.

Diese Gestalt kann durch folgende Überlegung anschaulich werden: Der Summand $\alpha_1^4 \alpha_2^3 \alpha_3^2 \alpha_4^1 \alpha_5^0$ kommt in $\sqrt{D}$ ein einziges Mal vor; damit auch $A(4, 3, 2, 1, 0)$ (vgl. Nr. **9**, 1). Da aber $\sqrt{D}$ bei Transposition das Vorzeichen wechselt, muß mit $A(4, 3, 2, 1, 0)$ notwendig auch $-A(3, 4, 2, 1, 0)$ darin enthalten sein. Hiermit ist $\sqrt{D}$ schon völlig ausgeschöpft: denn andere als die schon erwähnten Summanden müssen mindestens zwei gleiche Exponenten aufweisen, und somit – wegen des Alternierens bei Transposition – in Paaren sich annullieren. Also ist schließlich:

$$\sqrt{D} = A(4, 3, 2, 1, 0) - A(3, 4, 2, 1, 0) \ .$$

Nun soll nach dem früher Gesagten $A = \sigma \cdot \sqrt{D}$ sein. Führt man die Multiplikation rechts in ihren ersten Zügen durch und nützt dabei wie bisher die Tatsache aus, daß alternierende und symmetrische Polynome vorliegen, so ergibt ein einfacher Koeffizientenvergleich:

$$a = 1 \ , \qquad b = 2 \ .$$

So folgt endlich:

$$A = \sqrt{D} \cdot S^2(1, 0, 0, 0, 0) \ .$$

Mit Hilfe der Tabellen von F. N. David und M. G. Kendall [8, p. 431 ff.] wird obige Darstellung von d in Potenzproduktsummen ersetzt durch eine solche in Potenzsummen: $s_j \equiv S(j, 0, 0, 0, 0)$. Zur Vereinfachung werde $G_5(x) = 0$ in die Gestalt

$$x^5 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

gebracht; so wird $s_1 = 0$, und es ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} 10d = {} & 5 \cdot [5 s_{10} s_2 - 6 s_8 s_2^2 - 4 s_7 s_3 s_2 - 5 s_6^2 + 6 s_6 s_4 s_2 + 2 s_6 s_2^3 \\ & + 4 s_6 s_3^2 - s_5^2 s_2 + 4 s_5 s_3 s_2^2 - s_4 s_3^2 s_2 - 2 s_4^2 s_2^2 - s_3^4 - s_3^2 s_2^3] \\ & + \sqrt{5} \cdot [5 s_{10} s_2 - 10 s_8 s_2^2 - 5 s_6^2 + 10 s_6 s_4 s_2 + 4 s_6 s_2^3 - s_5^2 s_2 \\ & + 4 s_5 s_3 s_2^2 - 3 s_4 s_3^2 s_2 - 4 s_4^2 s_2^2 + s_3^4 - s_3^2 s_2^3] \ . \end{aligned}$$

Der letzte Schritt zum Ziel besteht nun noch darin, daß für die Potenzsummen Polynome in den Gleichungskoeffizienten a_i eingesetzt werden; diese findet man mit Hilfe der Newtonschen Formeln. Die sich ergebende Gestalt von d ist in (9) angegeben.

Zwei numerische Beispiele:

1. Auf Grund der in Nr. 6 unter 2a angegebenen speziellen Gleichung. Einerseits ist nach (9): $5d = 5 \cdot 1800 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 900$; andrerseits folgt aus (10), (6), (14), (7) wegen $w_1 = w_3 = -w_9 = -w_{10} = 10$, $w_2 = w_4 = -w_7 = -w_8 = 40$, $w_5 = w_6 = w_{11} = w_{12} = -20$:

$$5d = 5 \cdot 1800 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 900 \ .$$

2. Auf Grund der in Nr. 6 unter 2b angegebenen speziellen Gleichung rechne man wie vorhin d zweimal aus. Beide Male ergibt sich:

$$5d = 5 \cdot 11654856 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 4147524 \ .$$

Ausblick

Innerhalb der *Klein*schen „zweiten“ Auflösungsmethode (Nr. **3**) wäre der nächste Schritt: den Parameter X zu berechnen. Vorderhand scheint die Rechnung hierzu umfangreich und unübersichtlich zu sein; doch hat die Frage, *wie* sie zu bewältigen sein mag, nach dem Bisherigen etwas Verlockendes. – Mit diesem – noch auszuführenden – Schritt wäre die Brücke von der allgemeinen Gleichung fünften Grades zur Ikosaedergleichung konkret geschlagen.

Im Zusammenhang mit der Ikosaedergleichung möge hier noch auf eine Arbeit hingewiesen werden. Herr *Ott-Heinrich Keller* berechnet [9, p. 456 ff.] auf Grund seiner Umgestaltung einer *Hilbert*schen Formel die Diskriminante $\varDelta$ der Ikosaedergleichung ohne Kenntnis der Körperbasis:

$$\varDelta = 5^{785} \cdot 3^{210} \cdot 2^{420} \cdot X^{40} \cdot (1 - X)^{30} .$$

Nach dem *Kronecker*schen Satz ist der erwähnte Brückenschlag ohne akzessorische Irrationalität nicht möglich. Herr Professor *R. Brauer* gibt nun [10, p. 473 ff.] – unter anderem aus der Theorie der Algebren – einen Einblick in die Natur der akzessorischen Irrationalitäten, und zwar nicht nur für $G_5(x) = 0$. Er zeigt, daß die Auflösung einer in P_0 rationalen Gleichung $f(x) = 0$ dann und nur dann mit einem Formenproblem äquivalent ist – auf ein Formenproblem rückführbar ist – wenn unter gewissen aufzustellenden einfachen normalen Algebren eine vollständige Matrixalgebra vorkommt. Tritt keine solche vollständige Matrixalgebra auf, so kann die Rückführbarkeit durch Körpererweiterung erzwungen werden. Und zwar muß der Erweiterungskörper Zerfällungskörper einer der erwähnten Algebren sein; diese *wird* dann eine vollständige Matrixalgebra. – Im Fall der $G_5(x) = 0$ ist der Index der zugehörigen Algebren gleich 2; zur Rückführung auf die Ikosaedergleichung ist die Adjunktion einer Quadratwurzel zum Körper $P_0(\sqrt{D}, \varepsilon)$ notwendig, die wegen der Einfachheit der alternierenden Gruppe von fünf Elementen akzessorische Irrationalität ist.

Herr Professor Brauer teilte mir in einem Brief (11. September 1953) mit, daß er selbst eine Arbeit verfaßt habe, von der aber nur ein ganz kurzer „Abstract“ [11, p. 625] veröffentlicht sei. In dieser Arbeit stellt Herr Professor Brauer auf Grund invarianten-theoretischer Überlegungen ein Polynom A in den a_i $(i = 0, 1, \ldots, 4)$ von

$$a_0 x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + \cdots = 0$$

auf, dessen Quadratwurzel als akzessorische Irrationalität verwendet werden kann.

LITERATUR

[1] *A. Speiser*, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Springer, Berlin 1937.

[2] *F. Klein*, Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades. – Ges. Abh. Bd. 2, p. 481 ff. Springer, Berlin 1922.

[3] *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Teubner, Leipzig 1884.

[4] *L. E. Dickson-Bodewig*, Höhere Algebra. Teubner, Leipzig und Berlin 1929.

[5] *L. Kronecker*, Mittheilung über seine algebraischen Arbeiten in der Gesamtsitzung vom 27. Juni 1861. – Monatsberichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1861, 1. Hälfte, p. 609–617. (Auch in: J. Reine Angew. Math. Bd. 59, Berlin 1861, p. 306 ff.)

[6] *N. Tschebotaröw*, Grundzüge der Galoischen Theorie. Noordhoff, Groningen 1950.

[7] *F. Faà di Bruno*, Einleitung in die Theorie der binären Formen. Teubner, Leipzig 1881.

[8] *F. N. David and M. G. Kendall*, Tables of symmetric Functions (Part I). Biometrika, Vol. 36, London 1949, p. 431 ff.

[9] *O.-H. Keller*, Eine Bemerkung zur Berechnung der Diskriminante imprimitiver Gleichungen, insbesondere der Ikosaedergleichung. Math. Ann. Bd. 116, Berlin 1939, p. 456–462.

[10] *R. Brauer*, Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen. Math. Ann. Bd. 110, Berlin 1935, p. 473–500.

[11] *R. Brauer*, On algebraic equations of the fifth and sixth degrees. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 42, 1936, p. 625.

Zu Rate wurden gezogen:

H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes. Methuen, London 1948.

R. Fricke, Lehrbuch der Algebra, Bd. 2. Vieweg, Braunschweig 1926.

O. Haupt, Einführung in die Algebra, Bd. 1, 2. AVG, Leipzig 1929.

F. Klein, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2. Springer, Berlin 1922.

Tr. Nagell, Introduction to Number Theory. Almqvist & Wiksell, Stockholm 1951.

E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, 1. Bd., 1. H., p. 168 ff. Teubner, Leipzig und Berlin 1910.

H. Weber, Lehrbuch der Algebra Bd. 1–3. Vieweg, Braunschweig 1899–1912.

(Eingegangen den 16. März 1954.)