Über Mengen von Randwerten meromorpher Funktionen.

Autor(en): **Meier, Kurt E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **30 (1956)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23911

Über Mengen von Randwerten meromorpher Funktionen

von Kurt E. Meier, Zuoz

Einleitung

Die Funktion $f(z)$ sei meromorph in einem Gebiet G der oberen Halbebene, dessen Rand ein Intervall I der reellen Achse enthält. Sind α und β Winkel des offenen Intervalls $(0, \pi)$ und ist x ein Punkt von I, so führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$s_x(\alpha)$ sei der von x ausgehende Strahl der oberen Halbebene, welcher mit der positiven reellen Achse den Winkel α einschließt.

$w_x(\alpha, \beta)$ bezeichne den offenen Winkelraum der oberen Halbebene, der von den Strahlen $s_x(\alpha)$ und $s_x(\beta)$ begrenzt wird.

Unter $S_x(\alpha)$ verstehen wir die Menge der Häufungswerte von $f(z)$ für den Fall, daß z auf $s_x(\alpha)$ gegen x strebt. Entsprechend definieren wir die Häufungsmenge $W_x(\alpha, \beta)$.

Endlich sei die Menge Γ_x wie folgt erklärt: a ist Element von Γ_x, falls es zwei verschiedene Winkel α und β gibt, so daß weder $S_x(\alpha)$ noch $S_x(\beta)$ den Wert a enthält.

Diesen Definitionen entsprechend, sind die Mengen $S_x(\alpha)$ und $W_x(\alpha, \beta)$ abgeschlossen, Γ_x hingegen ist eine offene Menge.

Die vorliegende Arbeit enthält nun den Beweis zu folgendem

Hauptsatz

Voraussetzung. $f(z)$ sei meromorph in G.

Behauptung. Es gibt eine Teilmenge Z von I vom Maß 0, so daß in jedem Punkt $x \in I - Z$ einer der folgenden Fälle verwirklicht ist:

1) $f(z)$ hat in x einen Winkelgrenzwert.

2) $f(z)$ nimmt in jedem Winkelraum w_x jeden Wert von Γ_x unendlich oft an.

Dieser Satz stellt eine Verschärfung eines bekannten Satzes von *Pleßner*[1]) dar, in welchem an Stelle der Behauptung 2 die Aussage tritt,

[1]) *Pleßner* [5]

daß die zu jedem Winkelraum w_x gehörige Menge der Häufungswerte von $f(z)$ identisch ist mit der vollen Ebene.

Im Unterschied zum Satz von Pleßner enthält nun der in dieser Arbeit bewiesene Satz eine Aussage, die sich nicht nur auf Häufungswerte von $f(z)$ bezieht, sondern auch auf Werte, welche von dieser Funktion tatsächlich angenommen werden[2]).

Damit der Inhalt des Satzes etwas klarer zum Ausdruck kommt, führe ich einige Spezialfälle und Folgerungen an, die auch für sich nicht ohne Interesse sind. Unter M ist jeweils eine beliebige Teilmenge von I von positivem Maß zu verstehen. Ferner bedeutet die Aussage „in fast jedem Punkt", daß eine Menge von Ausnahmepunkten vom Maß 0 zugelassen werden muß.

Satz 1. *Voraussetzungen:*

1) $f(z)$ sei meromorph in G.

2) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren drei Strahlen, deren zugehörige Häufungsmengen von $f(z)$ paarweise punktfremd sind.

Behauptung: In fast jedem Punkt x von M nimmt $f(z)$ in jedem Winkelraum w_x jeden Wert unendlich oft an.

Satz 2 [3]). *Voraussetzungen:*

1) $f(z)$ sei meromorph in G.

2) Zu jedem Punkt x von M gibt es zwei Strahlen, auf welchen $f(z)$ beschränkt ist.

Behauptung: In fast jedem Punkt x von M trifft einer der folgenden Fälle zu:

1) $f(z)$ hat in x einen endlichen Winkelgrenzwert.

2) In jedem Winkelraum w_x befinden sich Pole von $f(z)$.

Satz 3. *Voraussetzungen:*

1) $f(z)$ sei meromorph in G.

2) Zu jedem Punkt x von M gibt es zwei Strahlen, auf welchen für $z \to x$ die Funktion $f(z)$ gegen 0 strebt.

Behauptung: Es trifft einer der folgenden Fälle zu:

1) $f(z) \equiv 0$ in G.

2) In fast allen Punkten x von M nimmt $f(z)$ in jedem Winkelraum w_x mit eventueller Ausnahme von 0 jeden Wert an.

---

[2]) Sätze dieser Art sind auch von *Collingwood und Cartwright* [1] bewiesen worden.

[3]) Ein Spezialfall dieses Satzes wurde vom Verf. bereits in [4] bewiesen.

Die Herleitung dieses letzten Resultats erfolgt leicht, indem man sich auf einen bekannten Satz von *Priwaloff*[4]) stützt, welcher aussagt, daß eine im Gebiet G reguläre Funktion identisch gleich Null ist, falls sie auf einer Menge $M \subset I$ von positivem Maß überall den Winkelgrenzwert 0 besitzt.

Beweis des Hauptsatzes. I. Sämtliche rationalen Zahlen des offenen Intervalls $(0, \pi)$ seien in eine Folge $\{\gamma_\tau\}$ $(\tau = 1, 2, 3\ldots)$ angeordnet, desgleichen sämtliche komplexen Zahlen mit rationalem Real- und Imaginärteil: $\{w_\rho\}$ $(\varrho = 1, 2, 3\ldots)$.

Genügen die natürlichen Zahlen σ und τ den Bedingungen $0 < \gamma_\tau - 1/\sigma$, $\gamma_\tau + 1/\sigma < \pi$, so verstehen wir unter $\Delta_x(\sigma, \tau)$ die offene Dreiecksfläche, welche durch die Strahlen $s_x(\gamma_\tau - 1/\sigma)$, $s_x(\gamma_\tau + 1/\sigma)$ und die Gerade $\mathfrak{J}(z) = 1/\sigma$ begrenzt wird.

$P(\varrho, \sigma, \tau)$ sei die Menge der Punkte x von I, zu welchen ein Wert a und zwei Strahlen $s_x(\alpha)$, $s_x(\beta)$ existieren, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $f(z)$ nimmt im Dreieck $\Delta_x(\sigma, \tau)$ nirgends den Wert a an.

(2) $\gamma_\tau > 2/\sigma$, $\gamma_\tau + 2/\sigma < \pi$.

(3) $|a - w_\rho| < 1/\sigma$.

(4) $1/\sigma < \alpha < \beta < \pi - 1/\sigma$.

(5) $|f(z) - w_\rho| \geqq 2/\sigma$, sofern $0 < \mathfrak{J}(z) < 1/\sigma$ und z auf einem der Strahlen $s_x(\alpha)$, $s_x(\beta)$ liegt.

Für den Fall, daß $a = \infty$ Ausnahmewert der Funktion $f(z)$ ist, wäre ein entsprechend abgeändertes System von Bedingungen hinzuzufügen. Damit sich aber der Beweis nicht zu unübersichtlich gestaltet, schließe ich im folgenden diesen Fall aus. Man erkennt leicht, an welchen Stellen im Beweis Ergänzungen anzubringen wären, und daß der zu beweisende Satz auch unter Zulassung dieses Falles seine Gültigkeit beibehält.

II. Wir betrachten die Menge Π aller Punkte $x \in I$, für welche die Behauptung 2 des zu beweisenden Satzes nicht gilt. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß jeder Punkt x von Π mindestens einer der Mengen $P(\varrho, \sigma, \tau)$ angehört, daß also

$$\Pi = \Sigma P(\varrho, \sigma, \tau) \; . \tag{6}$$

Zu jedem Punkt x von Π gibt es einen Wert $a \in \Gamma_x$ und einen Winkelraum w_x, so daß $f(z)$ in w_x in einer Umgebung von x den Wert a nicht annimmt. Die natürlichen Zahlen ϱ, σ, τ lassen sich nun wie folgt bestimmen:

[4]) Vergl. die Beweisdarstellung in [3]

Man wähle zuerst σ_1 und τ so, daß $\gamma_\tau > 2/\sigma_1$, $\gamma_\tau + 2/\sigma_1 < \pi$ und das Dreieck $\Delta_x(\sigma_1, \tau)$ ganz im Winkelraum w_x liegt. Damit sind die Bedingungen (1) und (2) für jedes $\sigma' \geqslant \sigma_1$ erfüllt.

Aus $a \in \Gamma_x$ folgt nun die Existenz zweier Strahlen $s_x(\alpha)$, $s_x(\beta)$, so daß a nicht Element von $S_x(\alpha) + S_x(\beta)$ ist. Da diese Vereinigungsmenge abgeschlossen ist, kann man nun $\sigma_2 \geqslant \sigma_1$ derart bestimmen, daß

$$|f(z) - a| > 3/\sigma_2$$

ist, sofern $0 < \mathfrak{J}(z) < 1/\sigma_2$ und z auf einem der Strahlen $s_x(\alpha)$, $s_x(\beta)$ liegt. Bei weiterer Vergrößerung von σ_2 bleibt diese Bedingung erfüllt (Bedingung 5).

Nun können wir $\sigma \geqslant \sigma_2$ endgültig derart festlegen, daß

$$1/\sigma < \alpha < \beta < \pi - 1/\sigma$$

ist.

Nachdem wir zum Schluß noch die Wahl von ϱ der Bedingung $|w_\rho - a| < 1/\sigma$ entsprechend getroffen haben, erkennt man leicht, daß damit nun alle Forderungen (1) bis (5) erfüllt sind.

III. Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf eine beliebig ausgewählte Menge $P(r, s, t)$.

Wir führen zunächst neue Bezeichnungen ein. Es sei

$$k_1 = \frac{\sin \frac{1}{s}}{2 \sin \gamma_t}\,. \tag{7}$$

Zu jeder natürlichen Zahl $\lambda > s$ erklären wir ferner die Hilfsfunktion $k_2(\lambda)$ wie folgt:

Ist x ein beliebiger Punkt der reellen Achse, so wird durch den Winkel $w_x(\varphi - 1/\lambda, \varphi + 1/\lambda)$ auf der Geraden $\mathfrak{J}(z) = 1$ eine Strecke abgegrenzt. Für festes λ sei nun $k_2(\lambda)$ die maximale Länge einer solchen Strecke, wenn der Wert von φ auf das Intervall

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda} \leqslant \varphi \leqslant \pi - \frac{1}{s} - \frac{1}{\lambda}$$

beschränkt bleibt.

IV. Nun seien sämtliche Paare von rationalen Zahlen des offenen Intervalls $(1/s, \pi - 1/s)$ numeriert. (α_μ, β_μ) sei das Zahlenpaar mit der Nummer μ.

Ist nun

$$\frac{1}{s} < \alpha_\mu - \frac{1}{\lambda} < \alpha_\mu + \frac{1}{\lambda} < \beta_\mu - \frac{1}{\lambda} < \beta_\mu + \frac{1}{\lambda} < \pi - \frac{1}{s}\,,$$

so verstehen wir unter $T(\lambda, \mu)$ die Menge aller Punkte $x \in P(r, s, t)$, zu welchen es zwei Strahlen $s_x(\alpha)$ und $s_x(\beta)$ gibt, so daß neben (5) (für $\varrho = r$, $\sigma = s$) noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$|\alpha - \alpha_\mu| < \frac{1}{\lambda}, \quad |\beta - \beta_\mu| < \frac{1}{\lambda}, \tag{8}$$

$$4k_2(\lambda) < k_1 \cdot \sin\left(\beta_\mu - \alpha_\mu - \frac{2}{\lambda}\right). \tag{9}$$

Mit $\overline{T}(\lambda, \mu)$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von $T(\lambda, \mu)$.

V. In diesem Abschnitt zeige ich, daß jeder Punkt $x \in P(r, s, t)$ mindestens einer der Mengen $T(\lambda, \mu)$ angehört, daß also

$$P(r, s, t) = \Sigma\, T(\lambda, \mu). \tag{10}$$

Ist nämlich $x \in P(r, s, t)$, so existieren zwei Strahlen $s_x(\alpha)$ und $s_x(\beta)$ mit den in Abschnitt I festgelegten Eigenschaften. Man kann nun zuerst den Wert von λ so festsetzen, daß $4k_2(\lambda) < k_1 \cdot \sin(\beta - \alpha - 2/\lambda)$. Dies ist möglich, weil in dieser Ungleichung für $\lambda \to \infty$ die linke Seite gegen 0 strebt, die rechte hingegen gegen den von 0 verschiedenen Wert $k_1 \cdot \sin(\beta - \alpha)$.

Man sieht nun leicht, daß anschließend μ derart festgelegt werden kann, daß (8) und (9) erfüllt sind. Man hat nur dafür zu sorgen, daß α_μ und β_μ hinreichend nahe bei α bzw. β liegen.

VI. Im folgenden Teil des Beweises sei $T(l, m)$ eine beliebig unter den $T(\lambda, \mu)$ ausgewählte Menge.

Führen wir die neuen Bezeichnungen

$$\varphi_1 = \alpha_m - 1/l, \quad \varphi_2 = \alpha_m + 1/l, \quad \varphi_3 = \beta_m - 1/l, \quad \varphi_4 = \beta_m + 1/l \tag{11}$$

ein, so gibt es nun zu jedem Punkt $x \in T(l, m)$ zwei Strahlen $s_x(\alpha)$, $s_x(\beta)$ und einen Wert a, so daß folgendes System von Bedingungen erfüllt ist:

(1*) $f(z)$ nimmt im Dreieck $\Delta_x(s, t)$ nirgends den Wert a an.

(2*) $\gamma_t > 2/s$, $\quad \gamma_t < \pi - 2/s$

(3*) $|a - w_r| < 1/s$

(4*) $1/s < \varphi_1 < \alpha < \varphi_2 < \varphi_3 < \beta < \varphi_4 < \pi - 1/s$

(5*) $|f(z) - w_r| \geqq 2/s$, sofern $0 < J(z) < 1/s$ und z auf einem der Strahlen $s_x(\alpha)$, $s_x(\beta)$ liegt.

(6*) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2/l$, $\quad \varphi_4 - \varphi_3 = 2/l$

(7*) $4k_2 < k_1 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2)$

VII. Die folgenden Abschnitte enthalten den Beweis dafür, daß $f(z)$ in fast allen Punkten der Menge $T(l, m)$ einen Winkelgrenzwert besitzt. Ist diese Behauptung begründet, so läßt sich der Beweis wie folgt vollenden:

Da die obige Aussage für jede beliebige der abzählbar vielen Mengen $T(\lambda, \mu)$ gilt, ist sie wegen (10) auch richtig für $P(r, s, t)$. Nun ist aber $P(r, s, t)$ eine beliebig unter den $P(\varrho, \sigma, \tau)$ ausgewählte Menge. Infolgedessen darf man jetzt auf Grund von (6) den Schluß ziehen, daß ein Winkelgrenzwert von $f(z)$ sogar in fast allen Punkten der Menge Π existiert.

Die sich nun anschließende Untersuchung bezieht sich also ausschließlich auf die Menge $T(l, m)$, die wir im folgenden einfach mit T bezeichnen.

VIII. Ist $x \in \overline{T}$ und $m(x, R)$ das Maß derjenigen Teilmenge von $\overline{T}$, welche im Intervall $(x - R, x + R)$ liegt, so nennt man den Grenzwert

$$\lim_{R \to 0} \frac{m(x, R)}{2R},$$

die Dichte der Menge $\overline{T}$ im Punkt x [5]).

Abgesehen von einer Menge Z vom Maß 0 hat die Menge $\overline{T}$ in jedem ihrer Punkte die Dichte 1 [5]).

Wir nehmen nun an, das Maß von $\overline{T}$ sei positiv und bezeichnen mit x_0 einen beliebigen Punkt der Menge $\overline{T} - Z$.

Wegen

$$\lim_{R \to 0} \frac{m(x_0, R)}{2R} = 1$$

kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $R(\varepsilon)$ so festlegen, daß

$$2R - m(x_0, R) < 2R\varepsilon$$

für alle $R \leqslant R(\varepsilon)$ gilt. Wir setzen nun

$$k_3 = 2 \operatorname{ctg} (1/s) \tag{12}$$

und treffen die Wahl $\varepsilon_0 = k_2/4k_3$. Zu diesem ε_0 gibt es nun ein R_0, so daß $2R - m(x_0, R) < Rk_2/2k_3$ für $R \leqslant R_0$.

Das Intervall $(x_0 - R_0, x_0 + R_0)$ bezeichnen wir im folgenden mit I_0. Nun bestätigt man leicht folgendes Ergebnis:

Ist $x^* \in I_0$ und $2\vartheta^* > k_2/k_3 \mid x^* - x_0 \mid$, so enthält das Intervall $(x^* - \vartheta^*, x^* + \vartheta^*)$ sicher Punkte von $\overline{T}$. (13)

[5]) Vergl. [2], p. 210—211

Aus $x^* \in I_0$ und $\vartheta^* > (k_2/2k_3) \mid x^* - x_0 \mid$ folgt nämlich

$$\vartheta^* > 2 \mid x^* - x_0 \mid - m(x_0, \mid x^* - x_0 \mid) .$$

IX. Es sei nun $z_0 \in w_{x_0}(\varphi_2, \varphi_3)$ und $\mathfrak{J}(z_0) = y_0$ genüge den Bedingungen:

$$y_0 < R_0/k_3 \ , \tag{14}$$

$$y_0 < 1/s(1 + k_1) \ . \tag{15}$$

Unter diesen Bedingungen beweise ich nun die Existenz einer Vierecksfläche V mit folgenden Eigenschaften:

(a) $z_0 \in V$.

(b) $d(V) < k_1 y_0$, wobei $d(V)$ den Durchmesser von V bezeichnet.

(c) Auf dem Rand von V gilt: $\mid f(z) - w_r \mid \geqq 2/s$.

Es sei ζ_1 der Schnittpunkt des Strahles $s_{x_0}(\varphi_1)$ mit der Geraden $\mathfrak{J}(z) = y_0$ und ξ_0 jener Punkt der reellen Achse, dessen Strahl $s_{\xi_0}(\varphi_1)$ durch z_0 geht (vgl. Fig. 1). Wir setzen $\xi_0' = \xi_0 - k_2 y_0$. Der Strahl $s_{\xi_0'}(\varphi_1)$ schneidet die Gerade $\mathfrak{J}(z) = y_0$ in einem Punkt z_0'. Aus (4*) (6*)

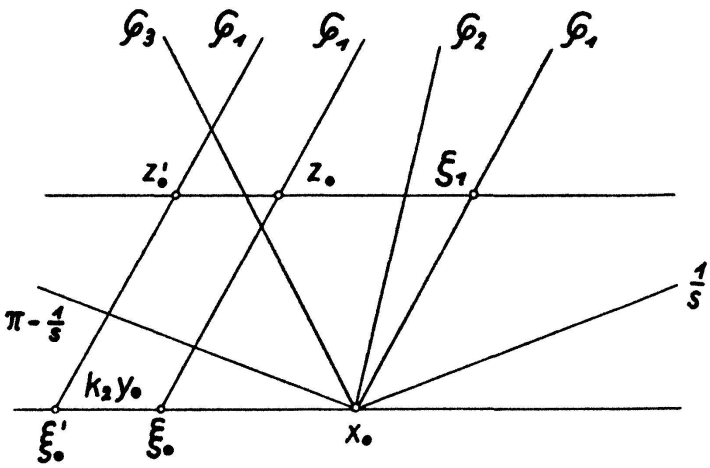

Fig. 1

und der geometrischen Bedeutung von $k_2 = k_2(l)$ folgt, daß der Punkt z_0' im Winkelraum $w_{x_0}(1/s, \pi - 1/s)$ liegt. Dies gilt auch für ζ_1. Infolgedessen ist $\mid z_0' - \zeta_1 \mid = \mid \xi_0' - x_0 \mid < 2y_0 \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{1}{s}\right) = y_0 \cdot k_3$. Wegen (14) gilt dazu $\mid \xi_0' - x_0 \mid < R_0$, also $\xi_0' \in I_0$.

Das Intervall (ξ_0', ξ_0) enthält nun sicher einen Punkt von $\overline{T}$, also auch einen Punkt ξ_1 von T. Mit den Bezeichnungen von Abschnitt VIII gilt nämlich $\mid x^* - x_0 \mid < \mid \xi_0' - x_0 \mid < y_0 k_3$ und $2\vartheta^* = k_2 y_0$, also entsprechend (13) wirklich $2\vartheta^* > (k_2 \mid k_3) \mid x^* - x_0 \mid$.

Da $\xi_1 \in T$ ist, gibt es einen den Bedingungen (4*) und (5*) entsprechenden Strahl $p_1 = s_{\xi_1}(\alpha_1)$. Es sei z_1 sein Schnittpunkt mit der Geraden

$\mathfrak{J}(z) = y_0$ (vgl. Fig. 2). Bezeichnen wir ferner mit Z_1' und Z_1'' die Schnittpunkte der Strahlen $s_{\xi_1}(\varphi_1)$ bzw. $s_{\xi_1}(\varphi_2)$ mit der Geraden $\mathfrak{J}(z) = y_0$,

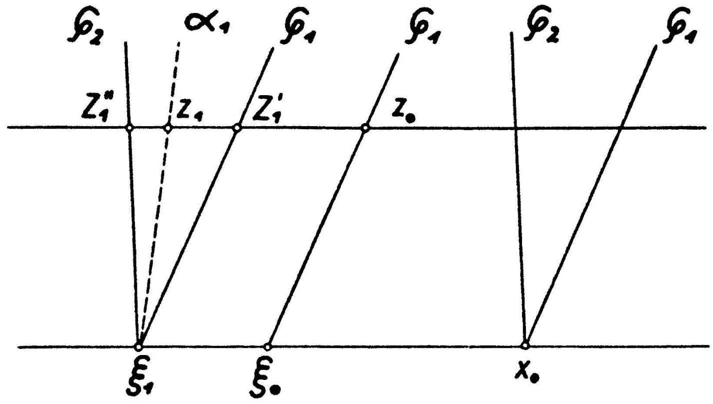

Fig. 2

so gilt $|z_1 - z_0| = |z_1 - Z_1'| + |Z_1' - z_0| \leqslant |Z_1'' - Z_1'| + |Z_1' - z_0|$. Nun ist aber $|Z_1' - z_0| < k_2 y_0$ und nach der Definition von k_2 dazu $|Z_1'' - Z_1'| < k_2 y_0$, folglich:

$$|z_1 - z_0| < 2k_2 y_0 \quad (z_1 \text{ liegt links von } z_0)\ . \tag{16}$$

Analog beweist man, daß es im Intervall I_0 noch drei weitere Punkte ξ_2, ξ_3, ξ_4 von $\overline{T}$ mit folgenden Eigenschaften gibt: Ihre den Bedingungen (4*) und (5*) entsprechenden Strahlen $p_2 = s_{\xi_2}(\alpha_2)$, $p_3 = s_{\xi_3}(\beta_1)$, $p_4 = s_{\xi_4}(\beta_2)$ schneiden die Gerade $\mathfrak{J}(z) = y_0$ in Punkten z_2, z_3, z_4, so daß

$$|z_2 - z_0| < 2k_2 y_0 \quad (z_2 \text{ liegt rechts von } z_0)\ , \tag{17}$$

$$|z_3 - z_0| < 2k_2 y_0 \quad (z_3 \text{ liegt links von } z_0)\ , \tag{18}$$

$$|z_4 - z_0| < 2k_2 y_0 \quad (z_4 \text{ liegt rechts von } z_0)\ . \tag{19}$$

Die Strahlen p_1, p_2, p_3, p_4 begrenzen nun eine Vierecksfläche V, welche offensichtlich den Punkt z_0 enthält. V erfüllt ferner die Bedingung (b). Da nämlich p_1 und p_4 und ebenso p_2 und p_3 Winkel größer als $\varphi_3 - \varphi_2$ einschließen, folgt auf Grund einer einfachen planimetrischen Überlegung unter Berücksichtigung von (16) bis (19), daß

$$d(V) < \frac{4k_2 y_0}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

und daraus nach (7*) wirklich $d(V) < k_1 y_0$.

Endlich liegt zufolge (15) die ganze Vierecksfläche V im Streifen $0 < \mathfrak{J}(z) < 1/s$. Nach (5*) gilt daher auf ihrem Rand $|f(z) - w_r| \geqslant 2/s$.

X. ξ^* sei derjenige Punkt der reellen Achse, dessen Strahl $s_{\xi^*}(\gamma_t)$ durch z_0 geht (vgl. Fig. 3). Als Folge von (14) liegt ξ^* im Intervall I_0.

Eine einfache Rechnung ergibt nun, daß der Winkelraum

$$w_{\xi^*}(\gamma_t - 1/s, \gamma_t + 1/s)$$

die offene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius

$$y_0 \cdot \frac{\sin \frac{1}{s}}{\sin \gamma_t} = 2 y_0 k_1$$

enthält.

Nun liegt im Intervall $(\xi^* - k_2 y_0/2, \xi^* + k_2 y_0/2)$ sicher ein Punkt von $\overline{T}$ und infolgedessen auch ein Punkt ξ^{**} von T. Die Begründung

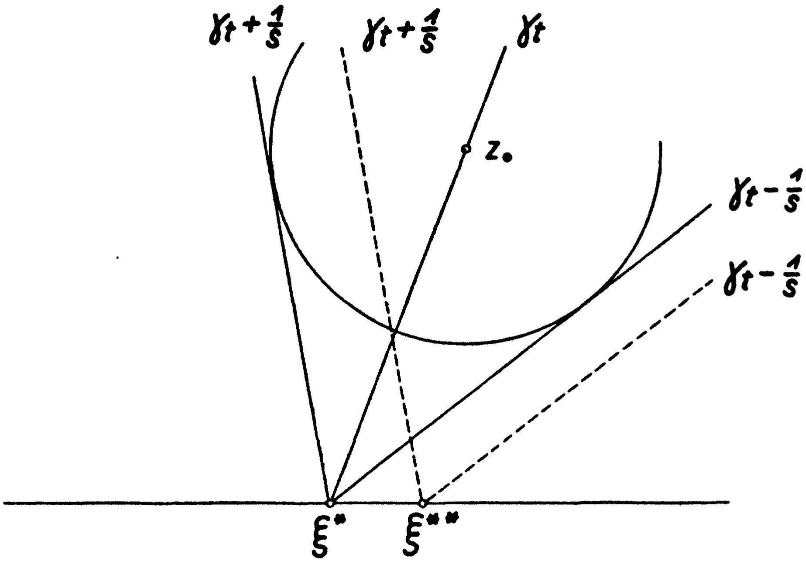

Fig. 3

dieser Behauptung erfolgt wieder leicht auf Grund von (13). Wegen (7*) ist ferner $k_2 < k_1$ und damit $|\xi^{**} - \xi^*| < k_1 y_0/2$.

Jetzt betrachten wir die Kreisscheibe K mit Mittelpunkt z_0 und Radius $y_0 k_1$. Man erkennt leicht, daß K vollständig im Winkelraum

$$w_{\xi^{**}}(\gamma_t - 1/s, \gamma_t + 1/s)$$

liegt und wegen (15) sogar im Dreieck $\Delta_{\xi^{**}}(s, t)$. Es gibt folglich einen Wert a, $|a - w_r| < 1/s$, den die Funktion $f(z)$ in K nicht annimmt.

Für das Folgende ist nun die Tatsache von größter Wichtigkeit, daß der Kreis K das im letzten Abschnitt konstruierte Viereck V überdeckt. Dies folgt aus $d(V) < k_1 y_0$ und $z_0 \in V$.

XI. Wir betrachten nun wieder das zum Punkt z_0 konstruierte Viereck V. Auf seinem Rande gilt

$$|f(z) - w_r| \geqslant 2/s \,. \tag{20}$$

Nach Abschnitt X gibt es ferner einen Wert a, $|a - w_r| < 1/s$, welchen $f(z)$ im Innern von V nicht annimmt. Es folgt daraus, daß die Ungleichung (20) auch für das Innere von V gültig bleibt, insbesondere also für $z = z_0$.

Damit ist also für alle Punkte z_0 des Winkelraumes $w_{x_0}(\varphi_2, \varphi_3)$, welche den Bedingungen (14) und (15) genügen $|f(z_0) - w_r| \geqslant 2/s$. Die zu diesem Winkelraum gehörige Häufungsmenge $W_{x_0}(\varphi_2, \varphi_3)$ ist folglich nicht die volle Ebene.

Diese Aussage hat Gültigkeit für alle Punkte x_0 von $\overline{T}$, in welchen diese Menge die Dichte 1 hat, also nach Abschnitt VIII für fast alle Punkte von $\overline{T}$. Aus dem in der Einleitung erwähnten Satz von Pleßner folgt damit, daß $f(z)$ in fast allen Punkten von $\overline{T}$ (also auch von T) einen Winkelgrenzwert besitzt.

Nach Abschnitt VII ist damit der Beweis vollendet.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *E.F.Collingwood and M.L.Cartwright*, Boundary theorems for a function meromorphic in the unit circle, Acta Math., 87 (1952) 83—146.

[2] *L.M.Graves*, The theory of functions of real variables, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1946

[3] *N.Lusin und J.Priwaloff*, Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques, Ann. Ecole norm. (3) 42 (1924), 143—191.

[4] *Kurt E. Meier*, Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen, Comment. Math. Helv., 24 (1952), 238—259.

[5] *A.Pleßner*, Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs, reine angew. Math., 158 (1927), 219—227.

(Eingegangen 28. April 1955)